Pot 624.04/CAL/Pro

J. Calavera
Dr. Ingeniero de Caminos

Proyecto y Cálculo de Estructuras de Hormigón

Tomo I

METIRE UT SCIAS
INTEMAC
INSTITUTO TÉCNICO DE MATERIALES Y CONSTRUCCIONES

UNIVERSITAT D'ALACANT
UNIVERSIDAD DE ALICANTE
Nº DOCUMENTO
Nº COPIA 500261582

A Marina, José, Beatriz, Javier, Jaime, Ignacio, Ana y Fátima. Todos ellos, encantadoras dificultades para terminar este libro.

© José Calavera Ruiz
INTEMAC, S.A.
Depósito legal:
ISBN: 84 88764 06 5 Tomo I
ISBN: 84 88764 05 7 (Obra completa)
Impreso en España por
INFOPRINT, S.A.

PRÓLOGO

"Esperar a saber bastante, para actuar con toda seguridad, es condenarse a la inacción".

Jean Rostand

Este libro contempla, en su totalidad, el proyecto y el cálculo del hormigón estructural, es decir, las estructuras de hormigón en masa, las estructuras de hormigón armado y las de hormigón pretensado, tanto en su variante de armaduras pretesas como en la de armaduras postesas.

En cierta manera la raíz de este libro está en otro libro mío, más breve y restringido sólo al hormigón armado, titulado "Proyecto y Cálculo de Estructuras de Hormigón para Edificios" del que se publicaron dos ediciones, en 1983 y 1991, respectivamente. Sin embargo el nuevo libro, aparte de su extensión mucho mayor (aún conservando una parte del material de él) difiere profundamente de aquél, en particular en los aspectos siguientes:

- La publicación de la Instrucción de Hormigón Estructural EHE a primeros de Enero de 1999 ha supuesto no sólo cambios muy profundos en el tratamiento de muchos temas, sino que ha incluido múltiples campos y teorías nuevos.
- Este nuevo libro aborda también los otros campos no cubiertos por EHE, es decir las estructuras de hormigón en masa, las de hormigón pretensado con armaduras pretesas y las de hormigón pretensado con armaduras postesas.
- Se cubre el campo completo de la Edificación, las Obras Industriales y las Obras Públicas.
- Como he tratado de hacer en la mayoría de mis libros, también en éste intento presentar los temas aunando el rigor teórico con la aplicabilidad práctica y prestando una atención especial al tema de los detalles constructivos.

Pienso que el libro, aparte de ser útil a los profesionales en ejercicio, también podrá serlo a los alumnos de últimos cursos de las Escuelas Técnicas. Naturalmente, dada la extensión y detalle con que se presentan la mayor parte de los temas, el uso del libro como texto en las Escuelas ha de ser guiado por la experiencia de los profesores, para decidir lo que debe seleccionarse, cosa difícil dados los actuales planes de estudio.

Algunos aspectos del libro requieren comentarios específicos:

Notaciones y Unidades. He seguido las del CEB, básicamente coincidentes con las del Eurocódigo EC-2 y con la Instrucción EHE. En una nota inicial se expone el tema de las unidades, que evidentemente resultará nuevo para muchos lectores, pero que al ser ya el utilizado en toda Europa y tener un importante desarrollo en Norteamérica y Canadá, no presenta más opción que la del decidido paso a su uso cotidiano.

Cálculo Manual y Cálculo Informático. En la formación universitaria, este dilema es ya clásico. En los Capítulos 3 al 11, junto a otros temas de inmediata aplicación práctica, he presentado un resumen de los métodos de cálculo manual. La formación de un profesional, con sólo los recursos informáticos, constituye no sólo un gran error sino también un grave riesgo. Los métodos de cálculo manual, los aproximados que expongo en el Capítulo 15 y los métodos de predimensionamiento incluidos en el Capítulo 16, son básicos en la formación de un Proyectista. Quien se forme sólo con recursos informáticos, ni desarrollará su intuición ni adquirirá el sentido de los órdenes de magnitud, aptitudes esenciales para la labor de proyecto.

Normativa. Básicamente el libro se ajusta a la Instrucción española de Hormigón Estructural EHE (1999). Sin embargo, frecuentemente se completan sus especificaciones con las de las Normas siguientes:

MODEL CODE 90 (CEB-FIP) (1990)
EUROCÓDIGO EC-2 (1993)
BUILDING CODE REQUIREMENTS FOR STRUCTURAL CONCRETE (ACI 318-95)

Las adiciones a diversos temas de acuerdo con estas Normas, se han realizado cuando presentan una documentación alternativa o complementaria, que ha parecido interesante. Ello se hace siempre con el cuidado que el cambio de normativa requiere.

Designación de armaduras. Tanto en armaduras activas como en pasivas nos hemos ceñido a la normativa española, hoy muy en la línea de las normas CEN del Comité Europeo de Normalización. Sin embargo, como muchos de mis libros son de uso frecuente en Iberoamérica, he mantenido también designaciones de acero, y por supuesto tratamientos de cálculo, correspondientes a aceros que están allí en uso y no lo están en Europa.

La ordenación del libro. Los Capítulos 1 a 16 se han dedicado al cálculo estructural, incluida la determinación de las acciones. El Capítulo 10, en particular, presenta temas sobre los que la información disponible suele ser escasa y que sin embargo tienen gran trascendencia en el cálculo de las estructuras y en el coste de las mismas.

El Capítulo 17 presenta los métodos de cálculo no lineal y los de redistribución limitada, hoy de empleo obligado en muchos casos.

Los Capítulos 18 al 23 tratan los métodos de cálculo de esfuerzos de los tipos estructurales básicos.

El Capítulo 25 realiza un estudio extenso del tema de juntas, tanto de dilatación como de trabajo y contracción. Aunque las dos últimas corresponden a la fase de ejecución, es esencial que el proyectista las especifique y prevea adecuadamente.

Los Capítulos 25 a 31 contienen la introducción al Hormigón Pretensado, que he tratado de hacer con el detalle y el rigor necesarios. En particular el Capítulo 29 dedicado a las pérdidas de fuerza en el pretensado, lo he redactado con mucha extensión ya que pienso que, con independencia de su cuantificación numérica, la comprensión cierta de las pérdidas es esencial para tener un concepto claro del pretensado. Se ha hecho un gran esfuerzo con la inclusión de numerosas fotografías que espero sirvan para quienes se inicien en el pretensado, para familiarizarse con los equipos y procesos de esta técnica.

Los Capítulos 30 y 33 merecen muy especial mención. El 30 está dedicado a la Durabilidad, un aspecto cuya importancia hoy nadie discute, pero he tratado de resaltar en él la gran importancia que el proyecto tiene en la durabilidad. El Capítulo 33, dedicado al método de Bielas y Tirantes, una de las novedades en todas las Normas recientes y muy en particular de la Instrucción EHE, amplía el tema considerablemente.

Los Capítulos 34 a 48 se dedican fundamentalmente a la exposición del cálculo de los diferentes Estados Límite Últimos y de Servicio.

He dedicado el Capítulo 49 a las Piezas Compuestas, tema esencial para el proyecto de piezas prefabricadas y generalmente poco tratado en las diferentes Normas.

Los Capítulos 50 y 51 están dedicados a los elementos auxiliares en las construcciones de estructuras de hormigón, tales como sistemas de atado, separadores, soldadura, tensores, elementos de suspensión, "inserts diversos", etc. y a los detalles constructivos fundamentales.

Los Capítulos 52 a 70 se dedican al dimensionamiento y armado de los diferentes tipos de piezas. Quiero destacar el Capítulo 70, dedicado a los pavimentos, porque los errores en su proyecto son con frecuencia múltiples y de graves consecuencias.

He añadido cinco Anejos que tratan temas muy específicos, entre los que debo destacar el de las tolerancias y el del proyecto con hormigón de alta resistencia.

En muchos Capítulos se hace referencia a gráficos y tablas que facilitan el cálculo y que alcanzan el número de 139. Van dispuestos al final del libro para no interrumpir la lectura.

Aún con la considerable extensión del libro, no es posible naturalmente entrar en tipos de estructuras muy especializadas. Lo he hecho, en algunos casos, en otro de mis libros. En todo caso la bibliografía que acompaña a cada capítulo, puede ser una buena guía para las ampliaciones y profundizaciones.

Debo terminar expresando mi agradecimiento a muchas personas que me han ayudado en múltiples aspectos. A Enrique González Valle, Juan Cortés Bretón, Justo Díaz Lozano, Jaime Fernández Gómez, Ramón Alvarez Cabal y José Mª Izquierdo Bernaldo de Quirós, todos ellos de INTEMAC, por sus críticas y sugerencias.

A Raúl Rodríguez y Francisco Santos, también de INTEMAC, por su ayuda en la programación de los Ejemplos de los Capitulos 31 y 48, respectivamente.

A Noelia Ruano, Claudia Patricia Garavito (Ingeniera Civil Colombiana) y a Benjamín Navarrete (Constructor Civil de la Universidad Católica de Santiago de

Chile), doctorandos en mi Cátedra de la Escuela de Ingenieros de Caminos de Madrid, les debo un doble agradecimiento por su revisión general de todo el original y por la corrección de las pruebas de imprenta.

He tenido la fortuna de seguir contando con la colaboración de Maxi Carrero, Isabel Muñiz, Mercedes Julve y María José Giménez para la mecanografía y con la de Antonio Machado, Julián Pérez y Teodomiro Villalón, para la delineación de figuras.

He de terminar agradeciendo a INTEMAC su constante ayuda para la edición de este libro, en particular a A.M. Calavera, Jefe del Servicio de Documentación de INTEMAC, que ha coordinado la edición.

Madrid, Marzo de 1999

José Calavera

NOTACIONES DE REFERENCIAS

1. Se recuerda que las referencias a otros apartados del libro se realizan por su número
   P. ej. "Véase 10.8 ..."

2. La notación entre corchetes indica fórmulas
   [10.2]

3. La notación entre paréntesis indica referencias bibliográficas
   P. ej. (10.2)
   es la segunda referencia bibliográfica del Capítulo 10

UNIDADES

En este libro se ha adoptado el Sistema Internacional de Unidades y Medidas (S.I.). Este sistema es el adoptado por la Instrucción española EHE-98, por el Eurocódigo EC-2 de Estructuras de Hormigón y por el MODEL CODE CEB-FIP 1990.

El sistema es el correspondiente a la Norma Internacional ISO 1000 (3ª Edición, 1 de Noviembre de 1992) "S.I. units and recomendation for the use of these multiples and of certain other units".

De acuerdo con ello, las unidades básicas son las siguientes:

Cantidad básica	Unidad básica S.I.	
	Nombre	Símbolo
Longitud	Metro	m
Masa	Kilogramo	kg
Tiempo	Segundo	s

De ellas se derivan las que figuran a continuación:

Cantidad derivada	Unidad S.I. derivada		
	Nombre especial	Símbolo	Expresión en términos de unidades básicas o derivadas S.I.
Frecuencia	Hercio	Hz	$1\ Hz = 1 s^{-1}$
Fuerza	Newton	N	$1\ N = 1\ kg \cdot m/s^2$
Presión, tensión	Pascal	Pa	$1\ Pa = 1\ N/m^2$

UNIDADES DE EXPRESIÓN DE LAS FÓRMULAS

En general todas las fórmulas de este libro están expresadas en *mm* y *N*. En los casos en que se usan otras (múltiplos o submúltiplos), se **indica expresamente** en cada caso.

En cambio, los datos se expresan en los múltiplos de uso habitual en la normalización europea, transformándose en las unidades S.I. antes de sustituirlos en las fórmulas. A continuación se indican los más habituales.

Cantidad	Unidades S.I.	
	Símbolos	Equivalencias
1. Densidad	kg/m^3	-
2. Peso específico	kN/m^3	$1\ kN/m^3 = 10^{-6}\ N/mm^3$
3. Longitudes dimensionales de las piezas de la estructura		
Luces	m	1 m = 1000 mm
Anchos	mm	-
Cantos	mm	-
Recubrimientos, etc.	mm	-
4. Áreas de las armaduras	mm^2	-
5. Áreas de las secciones transversales de las piezas	mm^2	-
6. Capacidades mecánicas de las áreas de armaduras	kN	1 kN = 1000 N
7. Esfuerzos axiles	kN	1 kN = 1000 N
8. Esfuerzos cortantes	kN	1 kN = 1000 N
9. Esfuerzos rasantes	kN	1 kN = 1000 N
10. Momentos flectores	m kN	$1\ m\ kN = 10^6\ mm\ N$
11. Momentos torsores	m kN	1 kN = 1000 N
12. Módulos de elasticidad	N/mm^2	-
13. Módulos resistentes	mm^3	-
14. Momentos de inercia	mm^4	-
15. Acciones		
- Puntuales	kN	1 kN = 1000 N
- Lineales uniformemente repartidas	kN/m	1 kN/m = 1 N/mm
- Superficiales uniformemente repartidas	kN/m^2	$1\ kN/m^2 = 10^{-3}\ N/mm^2$
16. Tensiones	N/mm^2	-
17. Resistencias del hormigón	MPa (Megapascales)	$1\ MPa = 1\ N/mm^2$

CAPÍTULO 1

PLANTEAMIENTO ESTRUCTURAL DEL EDIFICIO

1.1 INTRODUCCIÓN

La función primaria de la estructura es resistir las acciones a que ha de estar sometida. En este sentido, muchas veces ha sido comparada al esqueleto en el cuerpo humano, aunque el carácter dinámico del esqueleto hace que la comparación no resulte completamente exacta.

La resistencia de la estructura, mencionada en el párrafo anterior, debe entenderse en sentido amplio y no restringirse solamente a la resistencia mecánica de las solicitaciones derivadas de las acciones actuantes. En particular la resistencia a las acciones ambientales y la adecuada durabilidad durante el período de vida útil previsto en el proyecto de la estructura, son aspectos también esenciales.

Raras veces la estructura constituye por sí misma la construcción y lo más frecuente es que esté interconectada con otras partes, tales como los cerramientos, divisiones e instalaciones. En este sentido, la estructura no debe nunca ser concebida aisladamente sino que es necesario integrarla desde la concepción inicial en el conjunto del proyecto, de forma que resulte plenamente compatible con el resto de la obra.

Esta compatibilidad no siempre es fácil de alcanzar, especialmente porque el gran desarrollo actual de los métodos de cálculo y de las calidades de los materiales ha conducido a que nuestras estructuras sean, o puedan ser, mucho más flexibles que lo eran antiguamente. En sentido vertical, la flexibilidad de los forjados de los edificios está creando problemas en las tabiquerías. Las acciones horizontales sobre edificios cada vez más altos y más esbeltos, han conducido a daños en fachadas y han obligado a desarrollar los sistemas de fachadas "flotantes" y de muros cortina (1.1)[1].

1 Los números entre paréntesis corresponden a las referencias bibliográficas indicadas al fin de cada capítulo.

En algunos casos, la estructura cumple, aparte sus funciones resistentes, otras tales como las de cerramiento, división o contención. La tendencia actual es clara en ese sentido y está basada en el principio general de construcción de que es interesante desde el punto de vista económico asignar a cada elemento el máximo número de funciones posibles.

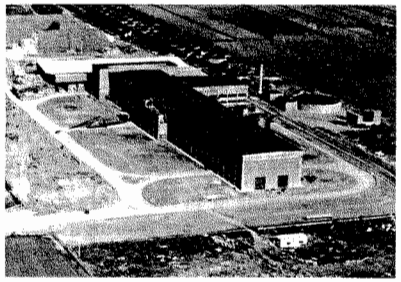
Sin embargo, la función resistente prima siempre en el concepto esencial de la estructura y resalta su trascendencia desde muchos puntos de vista, pero sobre todo desde el del riesgo y la responsabilidad que su proyecto y ejecución suponen. En claras palabras, el Profesor Fernández Casado lo expresa en su libro "RESISTENCIA" (1.2).

"Este horizonte de la rotura da un dramatismo vital a esta esfera de conocimientos"

1.2 TIPOS DE CONSTRUCCIONES

Los tipos de construcciones de hormigón y en particular los edificios han llegado hoy a un grado de diversificación tal, que suponen el empleo de un número muy variado de soluciones estructurales.

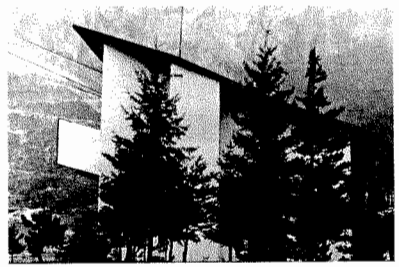
Fotografía 1-1. Torres de Jerez (Madrid)
Arquitecto: A. Lamela; Ingenieros de Caminos: C. Fernández Casado; J. Manterola; L. Fernández Troyano



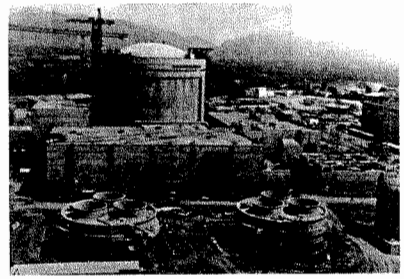
Fotografía 1-2. Factoría de papelera de Andalucía, Menjibar (Jaén)
Ingeniero de Caminos: J. Calavera Ruiz

La fotografía 1-1 corresponde a las Torres de Jerez, en Madrid, proyectadas como edificios para oficinas, "colgados" de unos núcleos resistentes. La fotografía 1-2 es de la Factoría de Papelera de Andalucía en Menjíbar (Jaén) y representa uno de los tipos de edificio industrial sometido a mayores cargas de uso, que además tienen un fuerte carácter dinámico. La fotografía 1-3 representa la Estación Inferior del Teleférico de Fuente-Dé (Santander). Su estructura, en la que se anclan los cables del teleférico, que en 1.419 m de longitud salvan un desnivel de 754 m sin apoyos intermedios entre estaciones, se encuentra sometida a acciones horizontales muy importantes. La fotografía 1-4 corresponde al Edificio de Contención de la Central Nuclear de Ascó y se refiere a un tipo de construcción de tecnología muy avanzada y de elevada complejidad de proyecto. La fotografía 1-5 es del Ferial de Ganado de Torrelavega. La

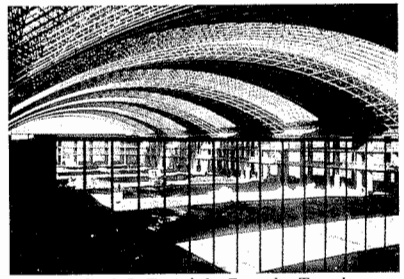
estructura de hormigón desempeña aquí un doble papel, pues por un lado soporta las cargas verticales de zonas secundarias de exposición y de paso de visitantes y, por otro lado, fue utilizada simultáneamente para resistir los empujes inclinados de la cubierta en bóveda espacial de 60 m de luz. La fotografía 1-6 corresponde a las Torres del World Trade Center de Nueva York, con 110 plantas de altura, que deben ser citadas como un ejemplo de integración de conceptos en el proyecto y de excelente correlación entre proyecto y proceso constructivo.



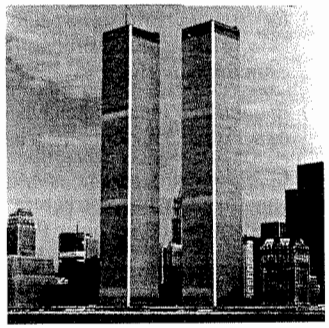
Fotografía 1-3. Teleférico de Fuente-De (Santander).
Ingeniero de Caminos: J. Calavera Ruiz
Arquitecto: A. Hernández Morales



Fotografía 1-4. Edificio de contención en la Central Nuclear de Asco, Ascó (Tarragona)
Oficina de ingeniería del proyecto INYPSA-INITEC-BECHTEL



Fotografía 1-5. Ferial de Ganado, Torrelavega (Santander)
Arquitecto: F. Cabrillo; Ingenieros de Caminos: J. Calavera Ruiz; E. González Valle

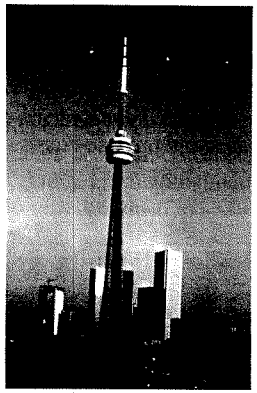


Fotografía 1-6. World Trade Center (Nueva York); Arquitectos: M. Yamasaki and Associated-E. Robertson and sons; Ingenieros Consultores: L.E. Robertson and Associated

La fotografía 1-7 corresponde a las Torres Petronas en Kuala-Lumpur, construidas con estructura de hormigón armado de alta resistencia (80 MPa) y que con 88 plantas y 450 m de altura constituyen por ahora el récord de altura en edificios.

Finalmente, la fotografía 1-8 presenta la Torre de Comunicaciones de la CNR en Toronto, que con 549 m es el récord de altura en construcciones de hormigón.

Fotografía 1-7. Torres Petronas (Kuala Lumpur)



Fotografía 1-8. Torre de Comunicaciones de la CNR (Toronto)

1.3 EXIGENCIAS DE COMPORTAMIENTO

La complejidad y abundancia de los tipos de estructura, tal como hemos señalado en el apartado anterior, conduce a que también sean complejas las condiciones de comportamiento que se les han de exigir. Podemos destacar las siguientes:

a) *Resistencia.* En este aspecto, el progreso de los métodos de cálculo, por un lado, y los estudios probabilísticos sobre la seguridad, por otro, permiten hoy estudios muy rigurosos.

b) *Estabilidad.* Independientemente de los puros aspectos resistentes, el edificio ha de ser estable, tanto frente a acciones de vuelco como a movimientos del terreno.

c) *Cumplimiento de las condiciones de servicio.* Durante la vida útil de la construcción, la estructura debe mantenerse en un nivel aceptable de condiciones de servicio. Entre los estados límite de servicio, cabe destacar:

- Deformaciones verticales de forjados y vigas.
- Deformaciones laterales de la estructura.
- Fisuración excesiva de las piezas, debida al alargamiento de las armaduras.
- Fisuración o desintegración del hormigón debidas a tensiones excesivas de compresión.
- Percepción por lo ocupantes de los movimientos del edificio. (Vibraciones producidas por cargas de uso, flechas laterales debidas al viento, etc.). (1.3), (1.4), (1.5), (1.6).

d) *Ductilidad.* Se entiende por ductilidad de una estructura la capacidad de soportar deformaciones después de alcanzada la deformación de agotamiento, mientras aún resiste cargas.

e) *Durabilidad.* Una estructura de hormigón debe ser proyectada, construida y utilizada de forma que bajo las condiciones de uso y de exposición ambiental previsible, mantenga en un nivel adecuado su seguridad, funcionalidad y buen aspecto durante el tiempo explícito o implícito para su vida útil.

La capacidad de absorción de energía de una pieza de hormigón armado está basada en su ductilidad y es a su vez esencial para que la estructura pueda resistir sin derrumbamiento, acciones horizontales tales como las producidas por terremotos, explosiones, etc.

1.4 ACCIONES SOBRE LA ESTRUCTURA

La estructura ha de resistir acciones de muy variados tipos. Algunas son de carácter permanente y otras de carácter variable. Entre ellas, las hay que actúan en dirección vertical u horizontal y otras que pueden actuar en cualquier sentido. Una clasificación genérica es la siguiente:

Las acciones pueden clasificarse desde cuatro puntos de vista generales:

- Por su naturaleza
- Por su variación en el tiempo
- Por su variación en el espacio
- Por su carácter estático o dinámico

Clasificación de las acciones por su naturaleza. Desde este punto de vista pueden distinguirse:

- *Acciones directas.* Son las que se aplican de forma directa a la estructura, como por ejemplo el peso propio de la estructura, las restantes cargas permanentes, las sobrecargas de uso, las acciones de viento, los empujes del terreno, etc.
- *Acciones indirectas.* Son aquellas deformaciones o aceleraciones importantes impuestas a la estructura y que de forma indirecta producen fuerzas sobre la estructura, como por ejemplo las acciones reológicas, los efectos de las variaciones de temperatura, los asientos de los cimientos, las acciones del pretensado, las acciones sísmicas, etc.

Clasificación de las acciones por su variación en el tiempo. Desde este punto de vista pueden distinguirse:

- *Acciones permanentes.* Las denominaremos con la letra G y son aquellas que actúan en todo instante con magnitud y posición constantes, como por ejemplo el peso propio de la estructura, las restantes cargas permanentes y las sobrecargas de carácter fijo.
- *Acciones permanentes de valor no constante.* La denominaremos con la letra G*, y son aquellas que actúan en todo instante con posición fija, pero cuya magnitud no es constante a lo largo del tiempo, tales como las acciones reológicas, los asientos en los cimientos, la fuerza del pretensado, etc.
- *Acciones variables.* Las denominaremos con la letra Q y son aquellas que pueden actuar o no sobre la estructura, como por ejemplo las sobrecargas de

uso, las acciones de viento, las debidas a las variaciones de temperatura, las debidas a los procesos constructivos empleados, etc.

- *Acciones accidentales.* Las denominaremos con la letra A y son aquellas cuya probabilidad de actuación es muy baja pero que producen efectos de gran importancia, como por ejemplo los impactos imprevistos, las explosiones, los efectos sísmicos, etc.

Clasificación de las acciones por su variación en el espacio. Desde este punto de vista pueden distinguirse:

- *Acciones fijas.* Son las que actúan siempre en el mismo punto y con la misma dirección y sentido, como por ejemplo los pesos propios de la estructura y las cargas permanentes.
- *Acciones libres.* Son aquellas cuyo punto de aplicación, dirección o sentido puede cambiar a lo largo del tiempo, como por ejemplo las sobrecargas de uso.

Clasificación de las acciones por su carácter estático o dinámico. Pueden distinguirse:

- *Acciones estáticas o cuasi-estáticas.* Son aquellas que no presentan variaciones especiales de su intensidad a lo largo de la vida de la estructura, o bien presentan sólo un número reducido de variaciones apreciables.
- *Acciones dinámicas.* Son las que presentan un número elevado de variaciones importantes de su intensidad a lo largo de la vida de la estructura.

Nuestras exigencias de seguridad no son iguales frente a todos los tipos de acciones. Frente a aquellas cuya aparición se considera muy probable, normalmente se exige que el edificio mantenga sus condiciones de servicio. Para otras, como las acciones sísmicas y la mayoría de las accidentales, se exige simplemente que no se produzca el derrumbamiento de la estructura, pero se acepta no sólo que el edificio no mantenga íntegras sus condiciones de servicio, sino que incluso se produzcan agotamientos locales de la estructura. Lo contrario, al conducir a la exigencia de niveles altos de seguridad frente a acciones sumamente improbables, conduciría a un coste insostenible de la mayoría de las estructuras.

1.5 SISTEMAS ESTRUCTURALES

El número de sistemas estructurales es enormemente variado. A continuación y de manera convencional, los analizaremos someramente, clasificándolos en dos grandes grupos según sean primordialmente aptos para resistir acciones verticales u horizontales.

1.5.1 SISTEMAS ESTRUCTURALES ADECUADOS PARA RESISTIR ACCIONES VERTICALES

La solución clásica está constituida por forjados, vigas y pilares que transmiten las cargas a la cimentación. (Fig. 1-9).

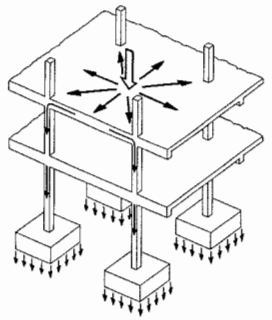


Figura 1-9

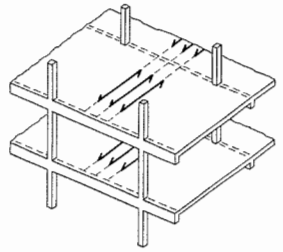


Figura 1-10

La organización más habitual es la de entramados paralelos entre sí, enlazados por forjados o losas trabajando en una sola dirección. (Fig. 1-10).

Para luces grandes, y en especial para edificios industriales, pueden disponerse entramados cruzándose en dos sentidos, en cuyo caso los forjados se transforman en placas. (Fig. 1-11).

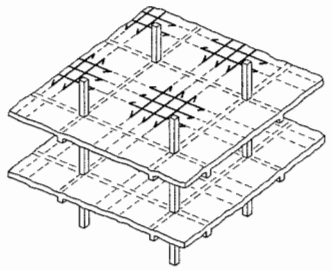


Figura 1-11

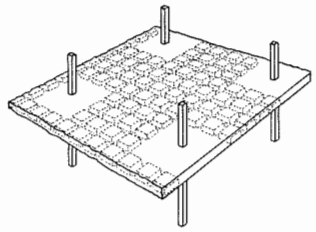


Figura 1-12

Una variante interesante del caso anterior es la de los forjados sin vigas, o placas sobre apoyos aislados, bien macizas o bien aligeradas, tal como se indica en la Fig. 1-12.

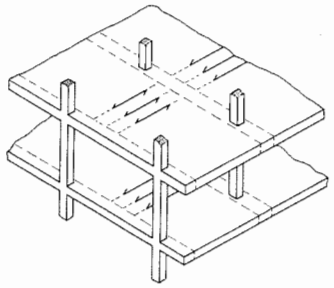


Figura 1-13

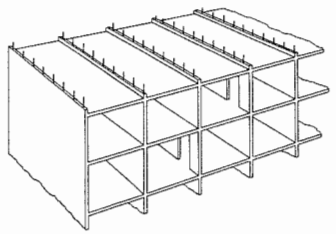


Figura 1-14

El interés principal de este tipo de solución reside en el hecho de que permite una mayor facilidad de distribución en los edificios de viviendas, oficinas, etc., al no existir vigas aparentes en los techos. Una solución alternativa a la indicada en la figura 1-10 se indica en la 1-13 y emplea vigas planas, es decir del mismo canto del forjado.

Finalmente, un sistema actualmente en uso es el de losas y muros construidos por el sistema de "encofrados túnel" o sistemas variantes que se indica en la figura 1-14.

1.5.2 SISTEMAS ESTRUCTURALES ADECUADOS PARA RESISTIR ACCIONES HORIZONTALES

Si éstas no son muy importantes, el sistema de entramados puede seguir siendo una solución válida (Fig. 1-15). Los forjados funcionan como grandes vigas horizontales, repartiendo las acciones horizontales a todos los entramados mediante lo que habitualmente se denomina "Acción diafragma".

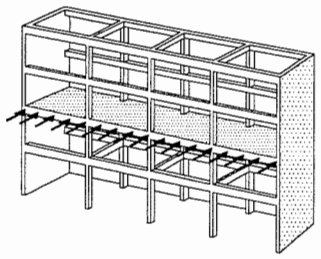


Figura 1-15

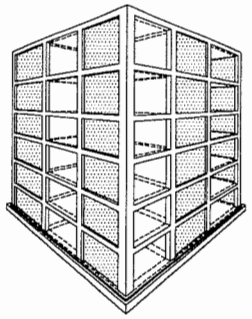


Figura 1-16

Mayor rigidez se consigue rellenando los recuadros de los entramados, total o parcialmente, con materiales tales como ladrillo, bloques prefabricados, etc. (Fig. 1-16).

Si las acciones horizontales cobran importancia, será necesario asociar pantallas y entramados, solidarizados por los forjados, tal como se indica en la figura 1-17.

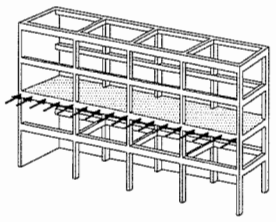


Figura 1-17

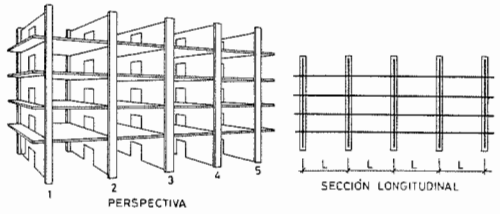


Figura 1-18

La solución puede estar constituida íntegramente por pantallas, tal como se indica en la figura 1-18.

Una variante interesante de lo anterior es la indicada en la figura 1-19, con pantallas alternadas en los diferentes pisos, permitiendo la creación de grandes espacios diáfanos (1.3). Obsérvese que la luz funcional de las losas es el doble de la luz estructural.

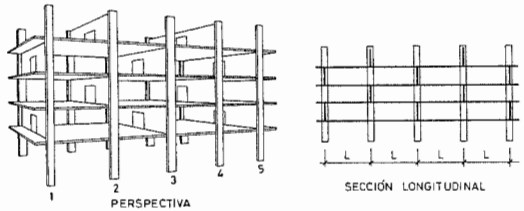


Figura 1-19

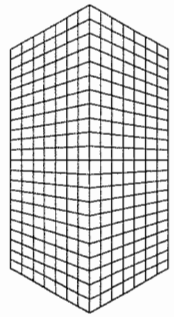


Figura 1-20

Para estructuras muy altas y esbeltas, suele emplearse la solución en tubo (Fig. 1-20). Se entiende por estructura en tubo aquella formada por tres o más estructuras o pantallas unidas por sus bordes para resistir las acciones horizontales funcionando como un voladizo. Los tubos pueden materializarse en cajas de escaleras, huecos de ascensores y organizarse también en las fachadas, aligeradas por los huecos necesarios (1.4).

Una solución, aún más potente en cuanto a recursos, es la indicada en la figura 1-21, compuesta de un tubo en fachada y un núcleo interior, conocida por "tubo en tubo".

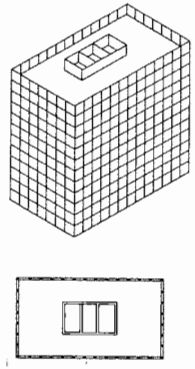


Figura 1-21

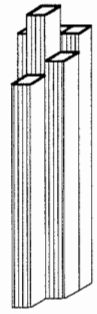


Figura 1-22

La agrupación de estructuras "tubo en tubo" en paquetes interconectados conduce (Fig. 1-22) al paquete de tubos, que es actualmente la solución de mayores posibi-

lidades para edificios de muy gran altura. Algunos desarrollos adicionales serán indicados en los Capítulos 15 y 66 y pueden ampliarse en las referencias (1.3) y (1.4).

Las torres y depósitos de agua constituyen un caso de construcciones a las que el hormigón proporciona una excelente solución estructural.

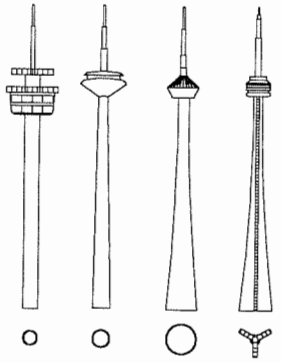


Figura 1-23

Las secciones tubulares y/o nervadas, son clásicas en este tipo de estructuras. La figura 1-23 muestra las soluciones más típicas. Todas ellas son realizadas hoy con encofrados deslizantes.

La figura 1-24 muestra algunos casos reales.

Fotografía 1-24 a). Torre de Rotterdam
Arquitecto: K. Senf

Fotografía 1-24 b). Torre de Nennslingen
Arquitecto: Gespann
Ingenieros: E. Heinle; F. Leonhardt

Fotografía 1-24 c). Depósito de agua de la Fábrica de Tetracero (Madrid)
Ingeniero de Caminos: J. Calavera

BIBLIOGRAFÍA

(1.1) CALAVERA, J.; "Compatibility of structures with the other parts of the building". C.I.B. Congress. News Review. Estocolmo. 1983.

(1.2) FERNÁNDEZ CASADO, C.; "Resistencia". Dossat. Madrid. 1950.

(1.3) RESPONSE OF BUILDINGS TO LATERAL FORCES. ACI Committee 442.

(1.4) TALL BUILDINGS SYSTEMS AND CONCEPTS. American Society of Civil Engineers. 1980.

(1.5) CONWAY, D.J.; "Human Response to Tall Buildings". Dowden. Hutchinson. Ross Inc. Pensilvania. 1977.

(1.6) PLANING AND ENVIRONMENTAL FOR TALL BUILDINGS. American Society of Civil Engineers. 1981.

CAPÍTULO 2

DEFINICIÓN DE ESFUERZOS Y ENLACES

2.1 ESFUERZOS

Dada una pieza recta, definimos convencionalmente en ella un sentido de avance. Definido este sentido, quedan definidos en la pieza los extremos dorsal y frontal (D y F respectivamente en la figura 2-1). Elegida una rebanada elemental en la pieza, el sentido de avance permite definir la cara dorsal (BB') y la frontal (CC').

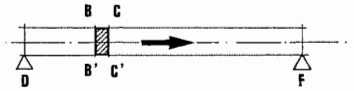


Figura 2-1

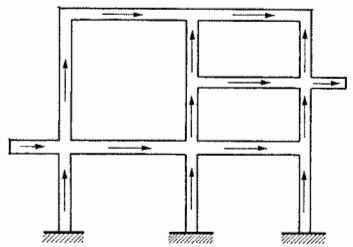


Figura 2 -2

En los entramados habituales, suele adoptarse, como sentido de avance en dinteles, el de izquierda a derecha, y en soportes, el ascendente, aunque por supuesto esto es puramente convencional (fig. 2-2).

Dada una pieza recta (fig. 2-3), si elegimos en ella una rebanada, la solicitación en la cara frontal se reduce, en el caso más general, a tres vectores, Nx, Ny, Nz, y tres momentos, Mx, My, Mz, referidos a un triedro cuyo centro 0 coincide con el centro de gravedad de la cara frontal de la rebanada; el eje X', con la directriz de la pieza, siendo

su sentido positivo el de avance; los ejes Y', Z', son los ejes principales de inercia de la sección correspondiente a la cara frontal. La solicitación en la cara dorsal de la rebanada, cuando el espesor de ésta tiende a cero, se reduce a seis componentes opuestos (en el límite iguales en valor y de signo contrario).

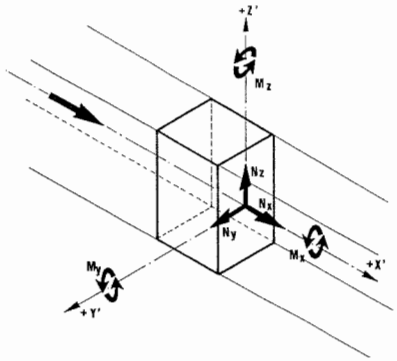


Figura 2-3

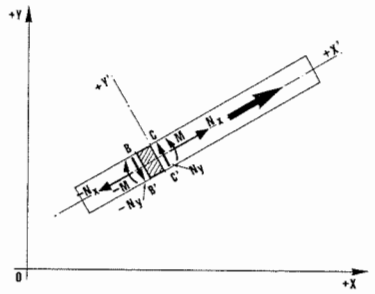


Figura 2-4

Los doce componentes que actúan sobre ambas caras de la rebanada dan lugar a los seis esfuerzos siguientes:[1]

N_x y su opuesto, constituyen el esfuerzo axil, positivo cuando la componente N_x en la cara frontal es positiva, o sea cuando N_x y su opuesto producen tracción en la rebanada.

N_y y su opuesto, constituyen el esfuerzo cortante V_y positivo cuando lo es la componente N_y en la cara frontal, o sea cuando el par formado por N_y y su opuesto tienden a hacer girar la rebanada alrededor del eje Z' en el sentido de giro del semieje + X' al semieje + Y'.

N_z y su opuesto, constituyen el esfuerzo cortante V_z positivo cuando lo es la componente N_z en la cara frontal, o sea cuando el par formado por N_z y su opuesto tienden a hacer girar la rebanada alrededor del eje Y' en el sentido de giro del semieje +X' al semieje +Z'.

M_y y su opuesto, constituyen el momento flector M_{fy} positivo cuando la componente M_y en la cara frontal coincide con el sentido de giro del semieje +X' al semieje +Z'.

M_z y su opuesto, constituyen el momento flector M_{fz} positivo cuando la componente M_z en la cara frontal coincide con el sentido de giro del semieje +Y' al semieje +X'.

M_x y su opuesto, constituyen el momento torsor M_t positivo cuando su componente M_x en la cara frontal coincide con el sentido de giro del semieje +Z' al semieje +Y'.

1 En todo lo que sigue, las fuerzas se consideran positivas en los sentidos positivos de los ejes. Para los momentos, se considera positivo el sentido de giro contrario a las agujas del reloj.

En resumen, la solicitación más general sobre una rebanada de una pieza recta está constituida por:

N_x	Esfuerzo axil
V_y, V_z	Esfuerzos cortantes
M_{fy}, M_{fz}	Momentos flectores
M_t	Momento torsor

Cuando $V_y = M_{fz} = M_t = 0$, estamos en el caso de solicitación en el plano definido por la directriz de la pieza y por el eje Z', principal de inercia.

El caso de piezas con un plano de simetría, denominado plano medio, en el que están situadas las acciones, es muy frecuente en la construcción de hormigón armado.

En ese caso (fig. 2-4), una vez fijado el sentido de avance, se definen los extremos dorsal y frontal de la pieza (D, F) y las caras frontal y dorsal (BB', CC') de la rebanada. El sistema de ejes es ahora O X' Y' y la solicitación se reduce a tres esfuerzos:

Esfuerzo axil N: Formado por el par de vectores N_x, - N_x. Es positivo cuando lo es la componente N_x de la cara frontal respecto al sistema de ejes X', Y', o sea cuando produce tracción en la rebanada.

Esfuerzo cortante V: Formado por el par de vectores N_y, - N_y. Es positivo cuando lo es la componente Ny de la cara frontal respecto al sistema de ejes X', Y', o sea cuando tiende a hacer girar la rebanada en sentido contrario al reloj.

Momento flector M_t: Formado por el par de momentos M, -M. Es positivo cuando lo es la componente M de la cara frontal, o sea cuando el sentido de M es contrario al reloj.

Debe notarse que los esfuerzos no son fuerzas ni momentos, sino pares de fuerzas o momentos, iguales y de signo contrario cuando el espesor de la rebanada tiende a cero. Sus dimensiones son las de una fuerza para esfuerzos axiles y cortantes y las de una longitud por una fuerza para los momentos flectores.

2.2 ENLACES

Denominamos enlace a la unión de una pieza en sus extremos a otras piezas o elementos. La existencia del enlace supone siempre una coacción en esa extremidad de esa pieza, en el sentido de que está impedido el corrimiento en el sentido de alguno de los tres ejes, o los giros alrededor de dichos ejes (fig. 2-3). El número máximo de coacciones ha de ser por tanto 6, y en cualquier apoyo en el espacio, siendo R el número de reacciones (coacciones) y G el de grados de libertad, se ha de cumplir

$$R + G = 6 \qquad [2.1]$$

En la tabla T-2.1 se indican algunos esquemas de dispositivos de apoyo.

En estructuras planas, la ecuación anterior se transforma en

$$R + G = 3 \qquad [2.2]$$

y la tabla T-2.2 indica algunos esquemas.

TABLA T-2.1

ENLACES EN ESTRUCTURAS ESPACIALES

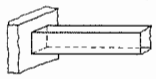
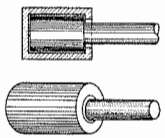
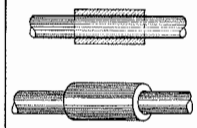
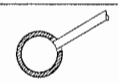
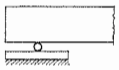
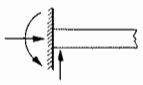
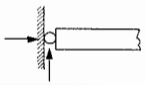
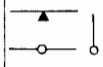
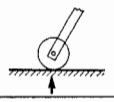
ESQUEMA	DENOMINACIÓN	REACCIONES	GRADOS DE LIBERTAD
	EMPOTRAMIENTO	6	0
	COJINETE	5	1
	DESLIZADERA	4	2
	RÓTULA ESFERICA	3	3
	RÓTULA SOBRE RODILLOS	2	4
	APOYO ESFÉRICO	1	5

TABLA T-2.2

ENLACES EN ESTRUCTURAS PLANAS

ESQUEMA DE REACCIONES	DENOMINACIÓN	REACCIONES	GRADOS DE LIBERTAD	REPRESENTACIONES ESQUEMÁTICAS
	EMPOTRAMIENTO	3	0	
	ARTICULACIÓN	2	1	
	RODILLO	1	2	

2.3 DEFORMABILIDAD DE APOYOS

Cuando un apoyo sufre corrimientos o giros en el sentido de alguna de las coacciones que presenta, se denomina apoyo deformable frente a esa coacción.

Un caso particular importante de apoyo deformable es el apoyo elástico, que es aquel cuya deformación es proporcional a la reacción producida.

Los esfuerzos producidos por la deformación de los apoyos, se denominan generalmente como esfuerzos debidos a las deformaciones impuestas.

CAPÍTULO 3

COEFICIENTES ELÁSTICOS

3.1. INTRODUCCIÓN. MÉTODOS DE CÁLCULO LINEAL

Entendemos por métodos de cálculo lineal de estructuras, aquéllos que se basan en la hipótesis de que el material que constituye la estructura cumple las leyes de HOOKE y BERNOUILLI. Esto conduce, como veremos, a la ausencia de puntos singulares en las curvas deformadas de los ejes de las piezas (o, si se quiere, a la continuidad de las derivadas primeras de las funciones que representan dichas curvas deformadas), por lo que a veces son designados como métodos basados en la "continuidad teórica". La esencia de estos métodos está basada en la relación lineal entre momentos y curvaturas y en ellos las solicitaciones son proporcionales a las acciones.

Por supuesto, estos métodos no han estado ni están exentos de críticas y desde hace algunos años empiezan a ser sustituidos por otros basados en hipótesis de deformación plástica o al menos no lineal.

Entre los primeros están los métodos basados en la formación de rótulas plásticas y entre los segundos aquéllos basados en el establecimiento experimental de las funciones no lineales momentos/curvaturas, cuestión esta última en la que se está trabajando intensamente.

Al margen de que los métodos clásicos puedan, en el futuro, ser parcial o totalmente abandonados, es forzoso reconocerles que el extraordinario desarrollo que ha tenido el cálculo de las estructuras y la importancia de sus realizaciones están fundamentalmente basados en ellos.

3.2. ECUACIÓN DE LA ELÁSTICA DE UNA PIEZA RECTA

Sea una viga recta AB (Fig. 3-1) y sea APB la curva deformada de su eje bajo la acción de las cargas.

A cada punto P de la viga, le corresponde una semitangente t en el sentido de avance, a la cual va ligado un ángulo φ, formado por la paralela PQ al semieje + X y la semitangente t. El ángulo φ es positivo cuando se recorre de PQ a t en sentido contrario al reloj.

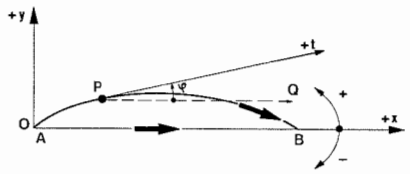


Figura 3-1

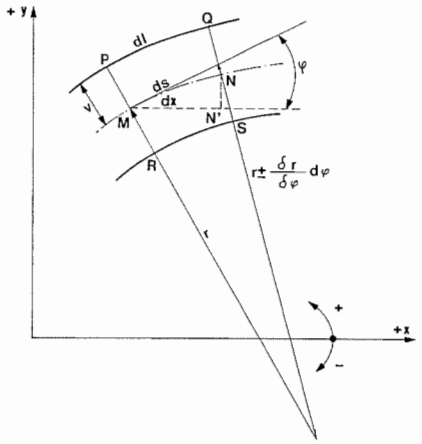


Figura 3-2

En la figura 3-2 se representa una rebanada PR, QS, de espesor en la fibra neutra MN. Para determinar la ecuación de la elástica es necesario establecer las hipótesis siguientes:

Primera Hipótesis. Ley de HOOKE

La relación entre tensiones y deformaciones es de la forma $\sigma = \varepsilon E$, donde E (módulo de elasticidad) es una constante de cada material.

Segunda Hipótesis. Ley de BERNOUILLI

Las secciones planas y perpendiculares al eje antes de la deformación siguen siendo planas y perpendiculares al eje después de ella.

Primeramente determinamos los radios de curvatura en los distintos puntos de la elástica.

Por la hipótesis de Bernouilli, las curvas MN y PQ son paralelas (normales comunes), luego para el trozo MN se puede escribir.

$$\frac{r}{r+v} = \frac{ds}{dl} \rightarrow \frac{r}{r+v-r} = \frac{ds}{dl-ds} \rightarrow \frac{v}{r} = \frac{dl-ds}{ds}$$

pero dl – ds es la variación de longitud de PQ, cuya longitud antes de la deformación de la pieza era ds, luego

$$\frac{v}{r} = \varepsilon$$

y como de acuerdo con la ley de HOOKE

$$\sigma = \varepsilon E$$

Y según la ley de NAVIER[1]

$$\sigma = \frac{M_f v}{I}$$

resulta por tanto

$$\frac{v}{r} = \varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{M_f v}{EI} \rightarrow \frac{1}{r} = \frac{M_f}{EI} \qquad [3.1]$$

1ª propiedad

La curvatura[2] en cada punto de la elástica es proporcional al momento flector que actúa en su sección.

2ª propiedad

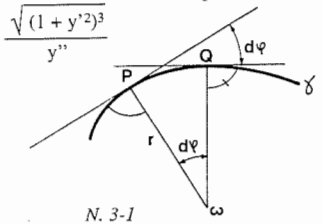
El radio de curvatura vale $r = \frac{EI}{M_f}$, luego, cuando $M_f = 0$, $r = \infty$. En los puntos de momento nulo, la elástica tiene un punto de inflexión (o es recta).

La ecuación de la elástica, sin más errores que los que entrañan las dos hipótesis admitidas, será una función y = f (x), que viene definida por la ecuación diferencial

1 Nótese que la ley de Navier se deduce simplemente de aplicar a la sección las ecuaciones de equilibrio sin más hipótesis previas que las de HOOKE y BERNOUILLI.

2 Sea una curva γ y un punto P. Se toma otro punto Q, tal que $\widehat{PQ} = ds$; las tangentes en P y Q formarán un ángulo que llamamos d φ, que es igual al que forman las normales a la curva en P y Q. Cuando ds→0, se tiene r d φ = ds pues ωP = ωQ en el límite. Por tanto $r = \frac{ds}{d\varphi}$ y por tanto la curvatura (que se define como el valor inverso del radio de curvatura r) vale $\frac{d\varphi}{ds}$.

Recuérdese que la expresión del radio de curvatura r para una curva y = f(x) en coordenadas cartesianas rectangulares es: $r = \frac{\sqrt{(1+y'^2)^3}}{y''}$



N. 3-1

$$r = \frac{\sqrt{(1 + y'^2)^3}}{y''} = \frac{EI}{M_f}$$

Como las deformaciones de las piezas utilizadas en construcción son siempre muy pequeñas, puede aceptarse que $y' = tg\ \varphi = 0$[1], y resulta la ecuación

$$y'' = \frac{M_f}{EI} \qquad [3.2]$$

Por tanto, si $M_f > 0$, la curva elástica es cóncava para un observador situado en el punto del infinito del eje + y. Si $M_f < 0$, la curva elástica es convexa.

3.3. TEOREMAS DE MOHR

De [3.2] $y' = tg\ \varphi = \int \frac{M_f}{EI} dx$

y sustituyendo tg φ por sen φ se tiene:

$$\text{sen}\ \varphi = \int \frac{M_f}{EI} dx \qquad [3.3]$$

Para dos puntos de abscisas x_1 y x_2 y ángulos de semitangentes φ_1 y φ_2, podemos escribir

$$\text{sen}\ \varphi_2 - \text{sen}\ \varphi_1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{M_f}{EI}\, dx \qquad [3.4]$$

En la definición de signos se ha aceptado como ángulo φ el que forma el eje + x con la semitangente en el sentido de avance, medido en sentido contrario a las agujas del reloj.

Para lo que luego sigue y que consiste en la sustitución del seno por el arco, conviene evitar confusiones como la que puede surgir en el caso de la Fig. 3-3, en la que sen φ_1 es muy pequeño y φ_1 sería próximo a 2 π. Al efecto, convendremos que

$$\text{sen}\ \varphi_1 \sim \varphi_1 = \left[\int \frac{M_f\, dx}{EI}\right]_{x=x_1} \qquad [3.5]$$

1 La sustitución envuelve un pequeño error sin importancia práctica ninguna. Pero obsérvese que en una pieza de sección constante, el caso de momento flector también constante corresponde a la llamada "flexión circular", ya que la elástica es un arco de circunferencia, mientras que la fórmula $y'' = \frac{M_f}{EI}$ conduce a un arco de parábola.

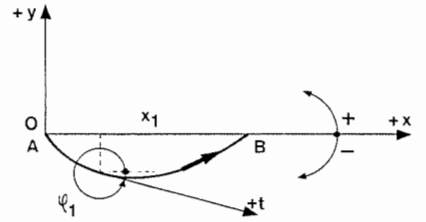


Figura 3-3

con la condición de que φ_1, representa el menor de los dos ángulos que forman el eje + x y la semitangente en sentido de avance, siendo positivo este ángulo si se recorre en sentido contrario al de las agujas del reloj.

3.3.1. PRIMER TEOREMA DE MOHR

Sea el caso indicado en la Fig. 3-4 en el que, de acuerdo con lo anterior, tenemos:

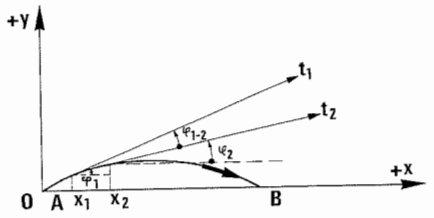


Figura 3-4

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{M_f}{EI} dx \qquad [3.6]$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -\int_{x_1}^{x_2} \frac{M_f}{EI} dx$$

que puede ponerse en la forma

$$\varphi_{2\text{-}1} = -\int_{x_1}^{x_2} \frac{M_f}{EI} dx \qquad [3.7]$$

siendo $\varphi_{2\text{-}1}$ el ángulo recorrido para llevar t_2 a t_1 por el menor de los dos ángulos que forman, de acuerdo siempre con el sistema de signos de ángulos ya establecido.

Teorema:

El ángulo φ_{2-1} formado por las tangentes t_2 y t_1 en dos puntos de la elástica de abscisas x_2 y x_1, es igual al área comprendida entre el eje x, las abscisas x_1 y x_2 y la curva cuyas ordenadas valen en cada punto $\frac{M_f}{EI}$. Si en la viga el producto EI es constante entre las abscisas x_1 y x_2, la curva es la del diagrama de momentos flectores, bastando dividir el área por EI.

3.3.2. SEGUNDO TEOREMA DE MOHR

Sean dos puntos de abscisas x_1 y x_2 (Fig. 3-5). Vamos a determinar el valor del segmento MN, siendo N el punto de la elástica de abscisa x_1 y M el de intersección con su ordenada de la tangente t_2, en el punto de abscisa x_2.

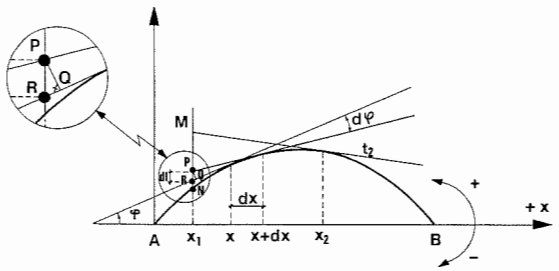


Figura 3-5

Sea x la abscisa de un punto variable entre x_1 y x_2 y x + dx un punto infinitamente próximo. Las semitangentes en estos puntos formarán un ángulo dφ.

En el triángulo PQR, PQ ≈ PR, pues dφ es infinitésimo y podemos aceptar cos φ = 1.

Luego, $dl = (x - x_1)\, d\varphi$

y
$$NM = -\int_{x_1}^{x_2} (x - x_1)\, d\varphi \quad [1]$$

y como φ ≈ sen φ de [3.3] resulta $d\varphi = \frac{M_f}{EI}\, dx$

y
$$NM = -\int_{x_1}^{x_2} (x - x_1)\frac{M_f}{EI}\, dx \qquad [3.8]$$

1 El signo menos se introduce por conveniencia para la regla de signos de $\overrightarrow{NM}$ que se indica más abajo.

NM es positivo cuando el sentido del vector $\overrightarrow{NM}$ coincide con la dirección positiva del eje y.

Teorema:

La distancia de un punto N de la elástica, de abscisa x_1, al punto M donde la tangente a la elástica en otro punto de abscisa x_2 corta a la ordenada de x_1, es igual al momento estático respecto a $x = x_1$ del área encerrada entre el eje x, las ordenadas $x = x_1$, $x = x_2$ y la curva de momentos divididos por EI.

3.4. PIEZA RECTA, EMPOTRADA POR SUS EXTREMOS, DE SECCIÓN EI VARIABLE

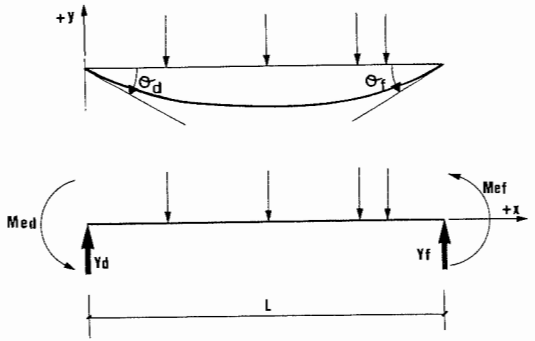


Figura 3-6

Sea M_1 el momento flector en la viga apoyada por sus extremos y sometida a las mismas cargas. Las secciones de apoyo girarían unos ángulos θ_d y θ_f. Para reducir esos ángulos a cero, aplicamos unos momentos en los extremos, de valores M_{ed} y M_{ef}. (Momentos que el empotramiento ejerce sobre los extremos de la pieza).

Consideramos un caso de carga, el de la viga isostática a la que corresponde una ley de momentos M_1 (x), unas reacciones de apoyo Y_{1d}, Y_{1f}, y una ley de esfuerzos cortantes Q_1 (x).

Consideremos otro estado, el de la viga isostática pero sometida solamente a la acción de los momentos exteriores M_{ed}, M_{ef} que dará una nueva ley de momentos flectores M_2 (x), unas reacciones de apoyo Y_{2d}, Y_{2f}, y una ley de esfuerzos cortantes Q_2 (x).

La suma de los dos estados nos da el estado de doble empotramiento.

Tenemos para el segundo estado aplicando las ecuaciones de equilibrio

$$\begin{cases} M_{ef} + M_{ed} + Y_{2f}\,L = 0 \rightarrow Y_{2f} = -\dfrac{M_{ef} + M_{ed}}{L} & [3.9] \\ Y_{2d} + Y_{2f} = 0 \qquad \rightarrow Y_{2d} = \dfrac{M_{ef} + M_{ed}}{L} & [3.10] \end{cases}$$

$$M_2(x) = M_{ef} - \frac{M_{ef} + M_{ed}}{L}(L - x) = M_{ef}\frac{x}{L} + M_{ed}\frac{x - L}{L} \qquad [3.11]$$

La ley de momentos flectores del estado suma será

$$M_f = M_1(x) + M_{ef}\frac{x}{L} + M_{ed}\frac{x - L}{L} \qquad [3.12]$$

La condición de doble empotramiento puede expresarse por medio de los dos teoremas de MOHR aplicados a las secciones extremas.

En primer lugar, el ángulo formado por las tangentes a la elástica en los puntos de abscisas x = 0 y x = L ha de ser nulo, luego

$$\int_0^L \frac{M_f}{EI}\,dx = 0$$

y en segundo lugar, la tangente en el punto de la elástica de abscisa x = L ha de interceptar en la vertical de abscisa x = 0 una distancia nula, o sea

$$\int_0^L x\,\frac{M_f}{EI}\,dx = 0$$

resultando el sistema

$$\int_0^L M_1(x)\,\frac{dx}{EI} + \frac{M_{ef}}{L}\int_0^L x\,\frac{dx}{EI} + \frac{M_{ed}}{L}\int_0^L (x - L)\,\frac{dx}{EI} = 0 \qquad [3.13]$$

$$\int_0^L x\,M_1(x)\,\frac{dx}{EI} + \frac{M_{ef}}{L}\int_0^L x^2\,\frac{dx}{EI} + \frac{M_{ed}}{L}\int_0^L x\,(x - L)\,\frac{dx}{EI} = 0 \qquad [3.14]$$

Resolviendo este sistema se obtiene M_{ed} y M_{ef} y con ello las expresiones generales de los esfuerzos resultan:

$$M_f = M_1(x) + M_{ef}\frac{x}{L} + M_{ed}\frac{x - L}{L} \qquad [3.15]$$

$$Q = Q_1(x) - \frac{M_{ef} + M_{ed}}{L} \qquad [3.16]$$

y las reacciones de apoyo

$$Y_f = Y_{1f} - \frac{M_{ef} + M_{ed}}{L} \qquad [3.17]$$

$$Y_d = Y_{1d} + \frac{M_{ef} + M_{ed}}{L} \qquad [3.18]$$

Caso particular

Un caso particular de notable importancia lo constituye la pieza recta de sección El constante.

En este caso el sistema [3.13], [3.14] se transforma en

$$\int_0^L M_1(x)\,dx + \frac{M_{ef}}{L}\int_0^L x\,dx + \frac{M_{ed}}{L}\int_0^L (x - L)\,dx = 0$$

$$\int_0^L x\,M_1(x)\,dx + \frac{M_{ef}}{L}\int_0^L x^2\,dx + \frac{M_{ed}}{L}\int_0^L x\,(x - L)\,dx = 0$$

o bien

$$\int_0^L M_1(x)\,dx + \frac{L}{2}(M_{ef} - M_{ed}) = 0 \qquad [3.19]$$

$$\int_0^L x\,M_1(x)\,dx + \frac{L^2}{3}M_{ef} - \frac{L^2}{6}M_{ed} = 0 \qquad [3.20]$$

Resolviendo el sistema y llamando:

$A = \int_0^L M_1(x)\,dx =$ área de la curva de momentos flectores en la viga simplemente apoyada con las mismas cargas.

$S = \int_0^L x\,M_1(x)\,dx =$ momento estático, respecto al apoyo dorsal, de la curva de momentos flectores en la viga simplemente apoyada con las mismas cargas.

se obtiene

$$M_{ef} = \frac{2A}{L} - \frac{6S}{L^2} \qquad [3.21]$$

$$M_{ed} = \frac{4A}{L} - \frac{6S}{L^2} \qquad [3.22]$$

3.5. COEFICIENTES ELÁSTICOS

Supongamos una pieza recta de sección EI variable, con articulación dorsal y empotramiento frontal.

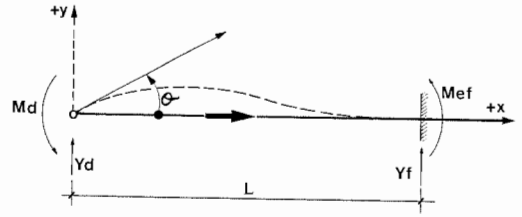


Figura 3-7

Suponemos que en el extremo dorsal (articulado) actúa un momento exterior (no un momento de empotramiento) M_d. Esto producirá un momento de empotramiento frontal M_{ef} y unas reacciones Y_d, Y_f. Vamos a calcularlos.

Aplicando las ecuaciones de equilibrio.

$$Y_d + Y_f = 0$$

$$M_d + M_{ef} + Y_f L = 0 \rightarrow Y_f = -\frac{M_d + M_{ef}}{L}$$

El momento flector en el punto de abscisa x vale

$$M_f = M_{ef} + Y_f (L - x) \qquad [3.23]$$

o bien

$$M_f = M_{ef}\frac{x}{L} + M_d\frac{x - L}{L}$$

Aplicando el segundo teorema de MOHR, imponemos la condición de empotramiento en el apoyo frontal

$$\int_0^L x\, M_f \frac{dx}{EI} = 0 \rightarrow \frac{M_{ef}}{L}\int_0^L x^2 \frac{dx}{EI} + \frac{M_d}{L}\int_0^L (x^2 - Lx)\frac{dx}{EI} = 0$$

y por tanto

$$M_{ef} = -M_d \frac{\displaystyle\int_0^L (x^2 - Lx)\frac{dx}{EI}}{\displaystyle\int_0^L x^2 \frac{dx}{EI}} \qquad [3.24]$$

Esta expresión nos proporciona el valor del momento que resulta en un extremo empotrado, cuando en el otro, libre para girar, se aplica un momento exterior.

En el caso particular de piezas de sección EI constante resulta

$$M_{ef} = -M_d \frac{\displaystyle\int_0^L (x^2 - Lx)\, dx}{\displaystyle\int_0^L x^2\, dx} = \frac{M_d}{2}$$

3.5.1. FACTOR DE TRANSMISIÓN

Se define como el cociente del momento transmitido M_{ef}, al aplicado M_d y lo designaremos por β_{df} (transmisión del extremo dorsal al frontal).

De acuerdo con la fórmula [3.24] resulta

$$\beta_{df} = -\frac{\displaystyle\int_0^L (x^2 - Lx)\frac{dx}{EI}}{\displaystyle\int_0^L x^2 \frac{dx}{EI}} = \frac{M_{ef}}{M_d} \qquad [3.25]$$

Para el caso de sección EI constante, ya hemos visto que $M_{ef} = \frac{M_d}{2}$, es decir,

$$\frac{M_{ef}}{M_d} = \frac{1}{2} \qquad [3.26]$$

Análogamente existe un factor de transmisión β_{fd} (del extremo frontal al dorsal). Podría deducirse una fórmula análoga a la [3.24], pero es más sencillo situar la pieza en posición inversa, en el mismo sentido de ejes. Por supuesto, si la pieza es simétrica, $\beta_{df} = \beta_{fd}$.

3.5.2. RIGIDEZ DE LA PIEZA EMPOTRADA

Se define como la relación entre el momento aplicado en el extremo libre para girar (el dorsal en nuestro caso), y el giro producido. Por tanto, para cada pieza, según se suponga libre para girar el extremo dorsal o el frontal, existe la rigidez dorsal y la frontal (K_d, K_f).

En nuestro caso

$$K_d = \frac{M_d}{\theta} \qquad [3.27]$$

siendo θ el ángulo girado

De acuerdo con el primer teorema de MOHR

$$\theta = -\int_0^L M_f \frac{dx}{EI}$$ puesto que la tangente en el extremo frontal coincide con el eje x

sustituyendo [3.23]

$$\theta = -\frac{M_{ef}}{L}\int_0^L x\,\frac{dx}{EI} - \frac{M_d}{L}\int_0^L (x-L)\,\frac{dx}{EI}$$

y como $M_{ef} = \beta_{df} M_d$ se tiene

$$\theta = -\frac{M_d}{L}\left[\beta_{df}\int_0^L x\,\frac{dx}{EI} + \int_0^L (x-L)\,\frac{dx}{EI}\right]$$

o bien

$$\theta = -\frac{M_d}{L}\int_0^L \left[x\,(1+\beta_{df}) - L\right]\frac{dx}{EI} \qquad [3.28]$$

y por tanto

$$K_d = \frac{M_d}{\theta} = -\frac{L}{\displaystyle\int_0^L \left[x\,(1+\beta_{df}) - L\right]\frac{dx}{EI}} \qquad [3.29]$$

Para el caso particular de sección EI constante resulta

$$K_d = K_f = \frac{4\,EI}{L} \qquad [3.30]$$

3.5.3. RIGIDEZ DE LA PIEZA ARTICULADA

En muchos casos se presentan piezas articuladas y es conveniente calcular la rigidez correspondiente.

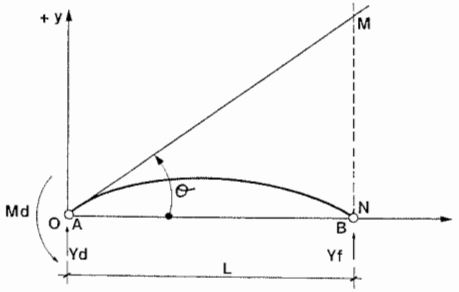


Figura 3-8

Aplicando al caso de la figura 3-8 las ecuaciones de equilibrio.

$$\begin{cases} Y_d + Y_f = 0 \qquad Y_f = -\dfrac{M_d}{L} \\ M_d + Y_f L = 0 \end{cases}$$

$$M_f = -\frac{M_d}{L}(L - x)$$

Aplicando el segundo teorema de MOHR

$$NM = -\int_L^0 (x-L)\left[-\frac{M_d}{L}(L-x)\right]\frac{dx}{EI} = \frac{M_d}{L}\int_0^L (L-x)^2\,\frac{dx}{EI}$$

$$\operatorname{tg}\theta \sim \theta = \frac{NM}{L} = \frac{M_d}{L^2}\int_0^L (L-x)^2\,\frac{dx}{EI}$$

$$K_d = \frac{M_d}{\theta} = \frac{L^2}{\displaystyle\int_0^L (L-x^2)\,\frac{dx}{EI}} \qquad [3.31]$$

Para el caso de sección EI constante resulta

$$K_d = \frac{3\,EI}{L} \qquad [3.32]$$

es decir, que la rigidez en el caso de pieza articulada es tres cuartos de la de la pieza empotrada.

CAPÍTULO 4

CÁLCULO DE ESTRUCTURAS INTRASLACIONALES MÉTODO DE CROSS

4.1 ENTRAMADOS INTRASLACIONALES

Denominamos como tales aquellos entramados cuyos nudos pueden girar pero no experimentan corrimientos en ningún sentido. Un gran número de entramados usuales en construcción pueden asimilarse a este tipo con suficiente precisión.

En todo lo que sigue, se supone que los entramados analizados tienen impedidos los corrimientos de los nudos. No se entra en este apartado en el procedimiento para impedirlos, tema que se tratará más adelante.

4.2 PLANTEAMIENTO GENERAL DEL PROBLEMA. MÉTODO GENERAL DE CÁLCULO

4.2.1. RELACIÓN ENTRE LOS COEFICIENTES ELÁSTICOS

Sea una pieza recta (Fig. 4-1) con empotramiento dorsal y con el apoyo frontal articulado. Apliquemos un momento M'_f en el apoyo frontal tal que el giro producido sea

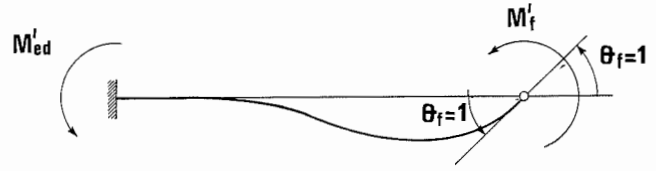


Figura 4-1

$$\theta_f = 1$$

Habrá de ser $M'_f = K_f\,\theta_f = K_f$ y en el empotramiento dorsal aparecerá un momento

$$M'_{ed} = \beta_{fd}\,M'_f = \beta_{fd}\,K_f$$

Supongamos ahora (Fig. 4-2) la articulación dorsal y el empotramiento frontal

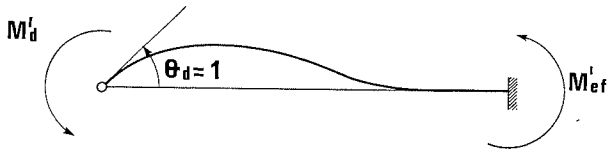


Figura 4-2

y apliquemos análogamente un momento en el extremo dorsal, libre para girar, tal que se produzca un giro unidad. Será

$$M'_d = K_d\,\theta_d = K_d$$
$$M'_{ef} = \beta_{df}\,M'_d = \beta_{df}\,K_d$$

Pero de acuerdo con el teorema de MAXWELL el momento M'_{ed} producido en el extremo dorsal cuando en el frontal se aplica un giro determinado ha de ser igual al momento M'_{ef} producido en el extremo frontal cuando en el dorsal se aplica el mismo giro. Por tanto,

$$M'_{ed} = M'_{ef}$$

es decir,

$$\beta_{fd}\,K_f = \beta_{df}\,K_d \qquad [4.1]$$

que establece una relación entre los cuatro coeficientes elásticos de una pieza recta.

4.2.2. ECUACIONES GENERALES DE LA PIEZA ELÁSTICAMENTE EMPOTRADA

Supongamos primero una pieza rígidamente empotrada en sus extremos y sometida a un conjunto de acciones (P, M, q) y sean M_{ed}, M_{ef} los momentos de empotramiento perfecto dorsal y frontal producidos por dicho conjunto de acciones (Fig. 4-3a).

Los momentos reacción de los apoyos sobre las extremidades de la pieza son pues M_{ed}, M_{ef} (Fig. 4-3b).

Apliquemos ahora al apoyo frontal B un momento exterior M'_f tal que produzca un giro θ_f en ese apoyo (liberado sólo para girar elásticamente bajo la acción de ese momento). El valor del momento será $K_f\,\theta_f$ y se transmitirá (Fig. 4-3c) al extremo A empotrado rígidamente un momento $\beta_{fd}\,K_f\,\theta_f$. Análogamente apliquemos ahora en el extremo dorsal un momento M'_d tal que produzca un giro θ_d. El valor del momento será $K_d\,\theta_d$ y se transmitirá al extremo B, de nuevo rígidamente empotrado, un momento $\beta_{df}\,K_d\,\theta_d$. (Fig. 4-3d).

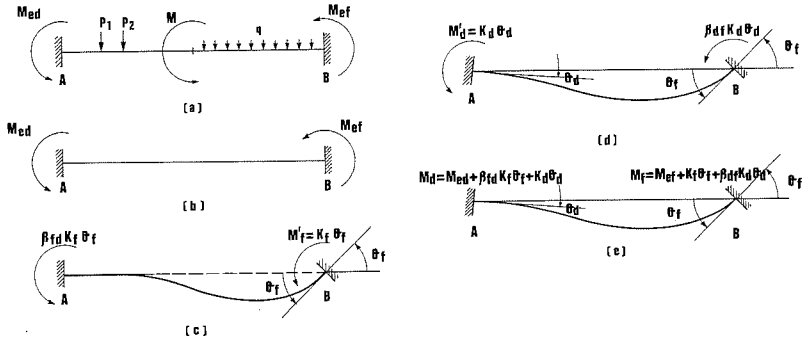


Figura 4-3

El estado suma de b), c) y d), es decir el producido por las acciones directamente aplicadas a la pieza más las debidas a los giros elásticos de sus extremos, viene representado por e) y los momentos finales de empotramiento elástico resultan (Fig. 4-3e)

$$M_d = M_{ed} + \beta_{fd}\,K_f\,\theta_f + K_d\,\theta_d$$
$$M_f = M_{ef} + K_f\,\theta_f + \beta_{df}\,K_d\,\theta_d$$

pero como $\beta_{fd}\,K_f = \beta_{df}\,K_d$ según [4.1]

$$M_d = M_{ed} + K_d\,[\theta_d + \beta_{df}\,\theta_f] \qquad [4.2]$$
$$M_f = M_{ef} + K_f\,[\theta_f + \beta_{fd}\,\theta_d] \qquad [4.3]$$

Ecuaciones que permiten calcular los momentos de empotramiento elástico, conocidos los de empotramiento perfecto, los giros de los extremos y los coeficientes elásticos de la pieza[1].

1 Es importante destacar que en estas ecuaciones las piezas se suponen empotradas en ambos extremos. Por tanto, en el caso de pieza articulada en un extremo, deben utilizarse las rigideces y factores de transmisión de la pieza biempotrada, con la condición de momento nulo en el extremo articulado.

4.2.3. MÉTODO GENERAL DE CÁLCULO

Supongamos el entramado de la Fig. 4-4. El método general de cálculo de cualquier entramado es el siguiente:

Incógnitas

a) Los giros de cada nudo (iguales a los giros de cada pieza concurrente en el nudo).

b) Los momentos de empotramiento en las extremidades de cada pieza. Conocidos éstos, por superposición con los esfuerzos de la pieza isostática, se tienen los esfuerzos totales.

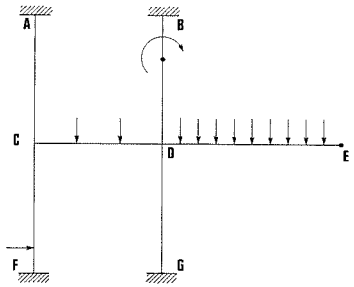


Figura 4-4

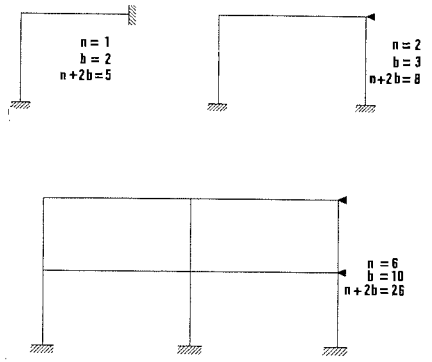


Figura 4-5

Si llamamos n al número de nudos y b al de barras, el número de incógnitas es 2b + n.

Ecuaciones

Por un lado, cada nudo ha de estar en equilibrio, es decir la suma de los momentos en las extremidades de las piezas que concurren en cada nudo ha de ser nula (n ecuaciones). Por otro, en cada barra se han de cumplir las ecuaciones:

$$M_d = M_{ed} + K_d \ (\theta_d + \beta_{df}\, \theta_f)$$

$$M_f = M_{ef} + K_f \ (\theta_f + \beta_{fd}\, \theta_d)$$

lo cual nos proporciona 2 b ecuaciones.

En resumen, el problema se concreta en la resolución de un sistema de 2 b + n ecuaciones con 2 b + n incógnitas[1].

1 Se entiende los giros de los nudos capaces de girar. A estos efectos no se cuentan los extremos perfectamente empotrados ni para el número de incógnitas (giro del nudo) ni para el número de ecuaciones (equilibrio de nudo). Sí se cuenta el momento de empotramiento en esa extremidad de la barra como incógnita y dicha barra para el establecimiento de las ecuaciones [4.2] y [4.3].

La dificultad estriba en que la resolución de los sistemas es muy penosa, incluso para estructuras sencillas. En la figura 4-5 se indica el grado del sistema de ecuaciones para algunos casos particulares[1].

Salvo en casos en que, por consideraciones de simetría, el grado del sistema se reduce, el método es prácticamente inaplicable.

4.3 MÉTODO DE CROSS

El método de Cross enfoca el problema del cálculo del entramado por otro camino.

Consideremos de nuevo el entramado de la figura 4-4. Primeramente procedamos a retirar las cargas que actúan sobre sus piezas. A continuación bloqueamos los nudos, impidiéndoles todo giro. Volvamos ahora a aplicar de nuevo las cargas exteriores. Estas actúan sobre una estructura *alterada*, que tiene impedidos los giros de sus nudos. En este sentido no representa a la estructura verdadera, cuyos nudos hubieran girado bajo la acción de las cargas hasta alcanzar su posición de equilibrio.

En cambio, en la estructura alterada es muy fácil determinar los momentos de empotramiento, pues estando sus nudos bloqueados, dichos momentos son los de empotramiento perfecto. Sin embargo, la suma de los momentos de empotramiento de las piezas concurrentes en cada nudo no será nula, es decir, que el nudo no estará en equilibrio. Dicha suma es en realidad un *momento de desequilibrio*.

Si aplicamos al nudo un momento de igual valor y signo opuesto (*momento equilibrante*) de hecho habremos suprimido el bloqueo del nudo, pues éste no tendrá tendencia al giro.

El momento equilibrante se repartirá entre las extremidades de las distintas piezas concurrentes en el nudo en proporción a sus rigideces, puesto que al girar el nudo, todas las piezas concurrentes giran el mismo ángulo. La relación de la parte de momento equilibrante que se lleva cada pieza, al momento equilibrante total, es lo que llamaremos coeficiente de reparto (o coeficiente de distribución) y es igual, por tanto, al cociente de la rigidez de la pieza considerada, dividido por la suma de las rigideces de todas las piezas que concurren en el nudo.

El nudo en la situación actual parece estar equilibrado, pero no es así, pues al distribuir el momento equilibrante a las extremidades de las distintas piezas concurrentes en el nudo, se realizará una transmisión de momento de esta extremidad a la opuesta. Como en los demás nudos de la estructura se habrá procedido análogamente, también se habrán introducido momentos equilibrantes, distribuyéndolos a las extremidades de sus piezas concurrentes, las cuales transmitirán una parte a sus extremidades opuestas. Es decir que, si hemos equilibrado el nudo C, transmitimos momentos de C a D según la pieza CD, pero al equilibrar el nudo D, transmitiremos momentos a través de DC al nudo C, con lo cual éste no estará en definitiva equilibrado, aunque sí menos desequilibrado que en la etapa inicial.

1 En esta figura y en las siguientes, se ha considerado impedido el corrimiento de los nudos mediante rótulas ficticias introducidas a nivel de cada piso.

Si volvemos a calcular en cada nudo el momento de desequilibrio, aplicando a continuación un nuevo momento equilibrante igual y de signo contrario, procediendo así cíclicamente, los nudos van equilibrándose paulatinamente y la estructura va acercándose a su posición de equilibrio.

El método de Cross es pues un método que, mediante la repetición de ciclos, permite alcanzar la precisión que se desee.

El proceso del método puede resumirse en las siguientes etapas:

1ª) Calcular las rigideces, coeficientes de reparto y coeficientes de transmisión en las extremidades de cada pieza.

2ª) Bloquear los nudos contra el giro.

3ª) Calcular los momentos de empotramiento perfecto para todas las piezas.

4ª) Elegir un nudo para liberarlo en primer lugar. Calcular el momento de desequilibrio de ese nudo.

5ª) Calcular los momentos repartidos por el momento equilibrante, en ese nudo.

6ª) Realizar este reparto en todos los nudos.

7ª) Calcular los momentos transmitidos a los extremos opuestos de todas las piezas que concurren en cada nudo.

8ª) Volver a bloquear cada nudo y elegir el siguiente para ser liberado. Se repiten las etapas 4ª, 5ª y 6ª. Esto se hace con todos los nudos.

9ª) Repetir las etapas 7ª y 8ª hasta que los momentos de desequilibrio sean suficientemente pequeños.

10ª) Sumar momentos en cada extremidad de pieza para obtener los momentos de empotramiento finales.

Más adelante se aclara esto con algunos ejemplos.

4.3.1. VENTAJAS DEL MÉTODO

Las ventajas fundamentales del método de Cross pueden resumirse en los tres puntos siguientes:

a) Su generalidad.

Es aplicable a todo tipo de estructuras, concretamente a todas las formadas por piezas rectas y curvas.

b) Su sencillez.

No exige recordar nada de memoria. Teniendo unas tablas de momentos, rigideces y factores de transmisión, puede resolverse cualquier estructura. Si, como es frecuente, se trata de estructuras con piezas de sección constante en cada vano y con cargas uniformemente distribuidas, no se necesitan ni las tablas.

c) El método permite seguir paso a paso el proceso de distribución de momentos en la estructura, dando un sentido físico muy claro a las operaciones que se realizan.

En nuestra opinión, es conveniente efectuar los cálculos sobre un esquema de la estructura, preferiblemente realizado a escala, anotando siempre cada coeficiente en sitio fijo. Puesto que una de las ventajas del método es su sencillez, en muchos casos la labor del técnico se reduce, a lo sumo, a plantear el método, corriendo a cargo del personal auxiliar el desarrollo de los ciclos de reparto y transmisión. En este caso, si el croquis está realizado a escala, una simple inspección de los valores de los momentos finales basta para detectar los errores graves.

4.3.2. EXTREMOS ARTICULADOS, EXTREMOS PERFECTAMENTE EMPOTRADOS Y CASOS INTERMEDIOS

a) Articulación. Para el caso de articulación en un extremo pueden adoptarse dos procedimientos:

a-1) Suponer la pieza articulada en ese extremo con rigidez de pieza empotrado-articulada. Los momentos de empotramiento perfecto en el extremo empotrado han de ser los correspondientes a la pieza empotrado-articulada y el factor de transmisión del extremo empotrado al articulado es nulo.

a-2) Suponer la pieza biempotrada, con las rigideces, factores de transmisión y momentos de empotramiento perfecto correspondientes a dicho caso.

En el extremo articulado la rigidez relativa $\frac{K}{\sum K}$ se toma como 1.

b) Empotramiento perfecto. Para el caso de empotramiento perfecto, basta tomar

$\frac{K}{\sum K} = 0$ (rigidez de apoyo infinita respecto a la de la pieza).

En definitiva, con el método a-1) a efectos prácticos los extremos articulados se eliminan del Cross.

Lo mismo ocurre en el caso de extremos perfectamente empotrados si la pieza no tiene cargas o momentos directamente aplicados a ella, pues el momento inicial en el extremo empotrado es nulo y ese extremo recibe todos los momentos transmitidos por el nudo opuesto pero él no transmite ninguno, por lo que su momento final es la mitad del correspondiente al extremo opuesto, pudiendo también por tanto eliminarse del cálculo a efectos prácticos.

Las simplificaciones anteriores para extremos articulados o perfectamente empotrados abrevian considerablemente los cálculos especialmente en entramados con número pequeño de piezas.

Para pieza articulada, el método a-1) es el más rápido, pero debe prestarse atención al método a-2), pues como se ve $\frac{K}{\sum K}$ varía de 1 para articulación a

0 para empotramiento perfecto. Este método permite considerar valores intermedios de $\frac{K}{\sum K}$ para casos de empotramientos semirrígidos. Más adelante ampliaremos este tema.

4.3.3. MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO Y MOMENTOS FLECTORES

En la práctica del método (4.3.6) deben distinguirse con claridad ambos conceptos, no siempre coincidentes y ligados al sentido de avance elegido para la pieza considerada.

Sea el pórtico de la Fig. 4-6a sometido a una carga descendente uniformemente repartida sobre el dintel. Supongamos realizado el cálculo por el método de Cross y sean los momentos finales de empotramientos los indicados sobre la figura b)[1]. Los diagramas de momentos flectores se indican en c) y la deformada en d).

Obsérvese que, considerando por ejemplo el pilar izquierdo y con los sentidos de avance indicados en b), el momento de empotramiento (acción del nudo sobre la pieza) en el extremo A es negativo mientras que el momento flector (ver curvatura en la deformada) es positivo.

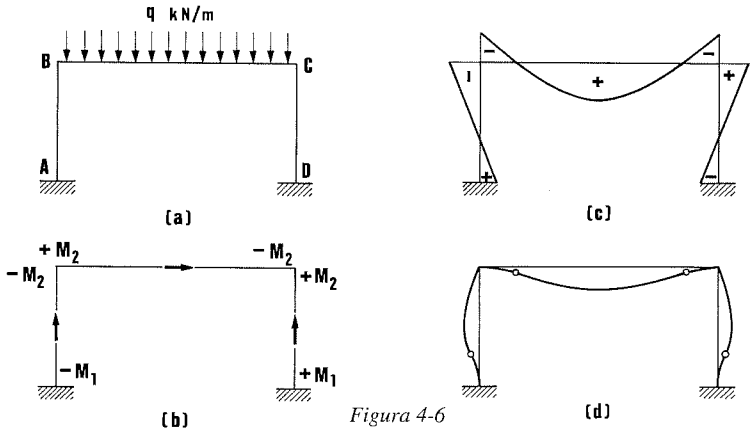


Figura 4-6

Para el extremo B del mismo pilar el momento de empotramiento es negativo y el momento flector lo es también. En definitiva se deduce lo siguiente:

- En el extremo dorsal el momento flector es igual en valor absoluto y de signo contrario al momento de empotramiento.
- En el extremo frontal el momento flector es igual en valor y signo al de empotramiento.

1 Los valores M_1 y M_2 representan en esta ocasión los valores absolutos con objeto de que figure explícito el signo.

Por tanto:

$$M_{fd} = - M_d \qquad [4.4]$$

$$M_{ff} = M_f \qquad [4.5]$$

4.3.4. REACCIONES Y ESFUERZOS TOTALES

Consideramos la parte de entramado indicada en la Fig. 4-7 y en particular la pieza DF y sean M_D y M_F los momentos de empotramiento finales en sus extremos.

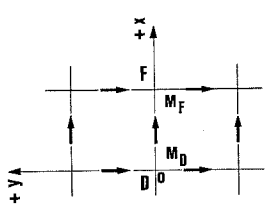


Figura 4-7

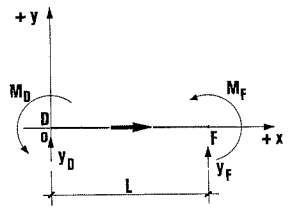


Figura 4-8

Aun cuando no actúen cargas directamente sobre la pieza DF, es decir aun cuando los momentos de empotramiento resultantes M_D, M_F sean debidos a los efectos de las acciones sobre otras piezas, la DF se encuentra en general sometida a esfuerzos cortantes. Su deducción es inmediata en valor y signo asociando un sistema de ejes coordenados con origen en el extremo dorsal y con el eje +X coincidiendo con DF en posición y sentido de avance. Para mayor claridad representamos aislada la pieza DF en la figura 4-8 colocada en la posición habitual con lo cual estamos en el caso analizado en el apartado 3.4

y de acuerdo con [3.9] y [3.10]

$$Y_{2f} = Y_F = - \frac{M_D + M_F}{L} \qquad [4.6]$$

$$Y_{2d} = Y_D = + \frac{M_D + M_F}{L} \qquad [4.7]$$

Las fórmulas [3.9] y [3.10] pueden ponerse en función de los momentos flectores en los apoyos en lugar de emplear los de empotramiento (del nudo sobre la pieza). Basta ver que

$$M_{ed} = - M_{fd}$$

$$M_{ef} = M_{ff}$$

siendo M_{fd} y M_{ff} los momentos flectores dorsal y frontal respectivamente y resulta por tanto:

$$Y_{2f} = Y_F = -\frac{M_{ff} - M_{fd}}{L} \qquad [4.8]$$

$$Y_{2d} = Y_D = -\frac{M_{ff} + M_{fd}}{L} \qquad [4.9]$$

$$M_2 = M_F \frac{x}{L} + M_D \frac{x - L}{L} \qquad [4.10]$$

La Ley de esfuerzos cortantes es:

$$Q = Y_F = -\frac{M_D + M_F}{L} \qquad [4.11]$$

Puede resultar también interesante en algunos casos expresar Q en función de los momentos flectores. Aplicando [4.4] y [4.5] en [4.11].

$$Q = \frac{M_{fd} - M_{ff}}{L} \qquad [4.12]$$

Si sobre la pieza incidiesen cargas directas los esfuerzos totales se obtendrían sumando a los [4.6], [4.7] y [4.10] los correspondientes a la pieza considerada como isostática, tal como se indicó en [3.15], [3.16], [3.17] y [3.18].

Para el caso de los esfuerzos axiles (Fig. 4-9) se procede análogamente. Tomando como ejemplo el pilar AB, el esfuerzo axil transmitido por la planta DAF viene dado por la suma de las reacciones totales, frontal del vano DA y dorsal del vano AF, compuestas a su vez de las correspondientes isostáticas e hiperestáticas tal como hemos visto.

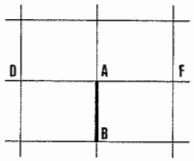


Figura 4-9

4.3.5. CASO DE ENTRAMADO CON VOLADIZOS

Los voladizos al tener libre el extremo opuesto al empotrado en el nudo, ni aceptan momentos al girar los nudos ni tampoco transmiten momentos de un extremo a otro.

Su papel en la aplicación del metodo de Cross se reduce a considerar su momento de empotramiento (acción del nudo sobre la pieza) e incluirlo en la Σ Mo inicial, dejándose de considerar de ahí en adelante el voladizo a todos sus efectos. Los esfuerzos en el voladizo son, naturalmente, los correspondientes isostáticos.

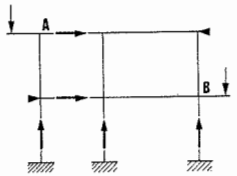


Figura 4-10

Debe prestarse atención al signo con que el momento M del voladizo se introduce en la suma Σ Mo. Al ser acciones del nudo sobre la pieza, con las cargas y sentidos de avance de la figura, el signo de M es negativo para el voladizo A y positivo para el voladizo B. Ver ejemplos b) y d) del apartado siguiente.

4.3.6. EJEMPLOS DE APLICACIÓN

a) Viga continua

Consideramos una viga continua de tres tramos, con luces de 5, 6 y 4,5 m sección 200 x 500 y carga uniformemente distribuida de 20 kN/m (Fig. 4-11).

Se ha comenzado por dibujar un esquema de la estructura. Como las piezas son simétricas, $K_d = K_f = K$. El valor K se ha escrito en el centro de cada pieza. (Si $K_d \neq K_f$, cada valor debe escribirse en la extremidad correspondiente).

A continuación se han calculado los coeficientes de reparto $\frac{K}{\Sigma K}$ en cada uno de los extremos de pieza.

Para los apoyos extremos debe tenerse en cuenta que $\frac{K}{\Sigma K} = 1$, puesto que es apoyo articulado (o deslizante) y no concurren otras piezas en el nudo.

Los factores de transmisión se han escrito junto a los de reparto, en la extremidad de cada pieza. En cada nudo se ha escrito el valor Σ K, puesto que conviene tenerlo anotado para posibles comprobaciones.

Seguidamente se calculan los momentos de empotramiento perfecto (Mo), que en este caso valen $\frac{1}{12}$ ql^2 dorsales y $-\frac{1}{12}ql^2$ los frontales[1]. A continuación, en cada nudo se calcula Σ Mo, que es el momento de desequilibrio[2]. A cada extremidad de

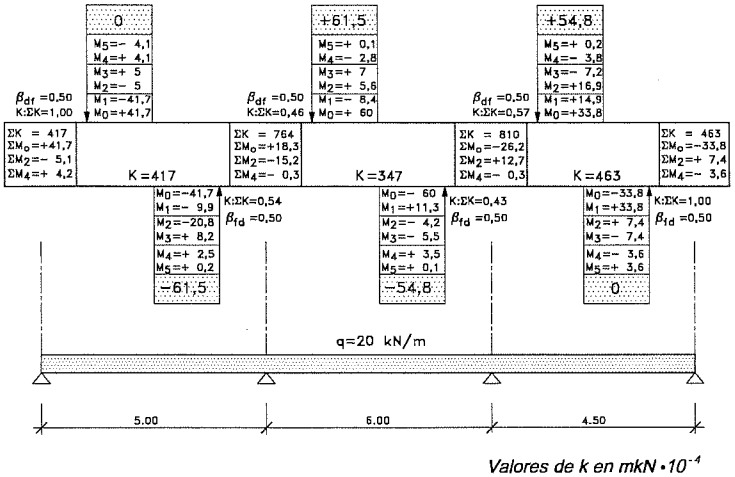
1 Nótese que estos momentos de empotramiento son del nudo sobre la pieza.

2 De hecho, como los valores son momentos del nudo sobre las piezas, los de las piezas sobre el nudo serían – Mo y el momento de desequilibrio del nudo sería Σ (– Mo) y Σ Mo el equilibrante del nudo, que al repartirlo a las piezas debería ser nuevamente cambiado de signo, para obtener momentos sobre las piezas, que son los que nos interesan. Como se verá en lo que sigue, es más sencillo calcular Σ Mo y cambiar de signo al repartir, manejando así siempre momentos del nudo sobre las piezas, es decir, momentos de empotramiento.

pieza se le reparte un momento $-(\sum Mo)\frac{K}{\sum K}$, cuyos valores se escriben como M_1.[1]

La raya que se traza a continuación del valor M_1 sirve para recordar que en ese nudo se ha terminado el ciclo de reparto. Se procede análogamente con los demás nudos y a continuación se realiza la transmisión a los extremos opuestos, cuyos valores se escriben como M_2. Una vez realizadas las transmisiones, se calculan los valores $\sum M_2$, que son los nuevos momentos de desequilibrio y el ciclo se repite tantas veces como la precisión exigible a los resultados lo requiera.

Naturalmente los momentos en los apoyos extremos han de resultar 0, puesto que en estos apoyos todos los momentos al ser K = 1, se equilibran automáticamente.



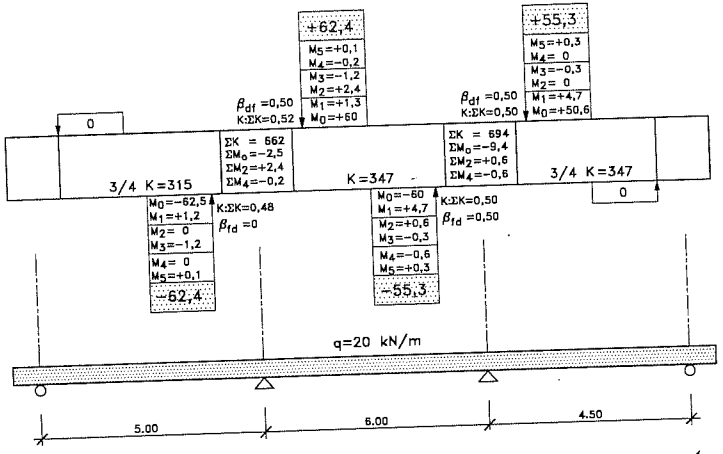
Valores de k en mkN·10⁻⁴

SECCION DE VIGA 200×500

Figura 4-11

En la figura 4-12 se ha resuelto el mismo problema pero con una simplificación que abrevia notablemente los cálculos y que consiste en emplear la rigidez de la pieza empotrada en un extremo y articulada en el otro, que como se recordará es 3/4 de la pieza empotrada. La diferencia con la resolución anterior estriba en que, en este caso, en los extremos opuestos a las articulaciones, el factor de transmisión es nulo, pues la pieza no puede aceptar momentos en la articulación. Por supuesto los momentos de empotramiento M_o son − 62,5 y 50,6 que corresponden a $-\frac{1}{8}pl^2$ y $\frac{1}{8}pl^2$ respectivamente, por tratarse de vigas empotrado-apoyadas.

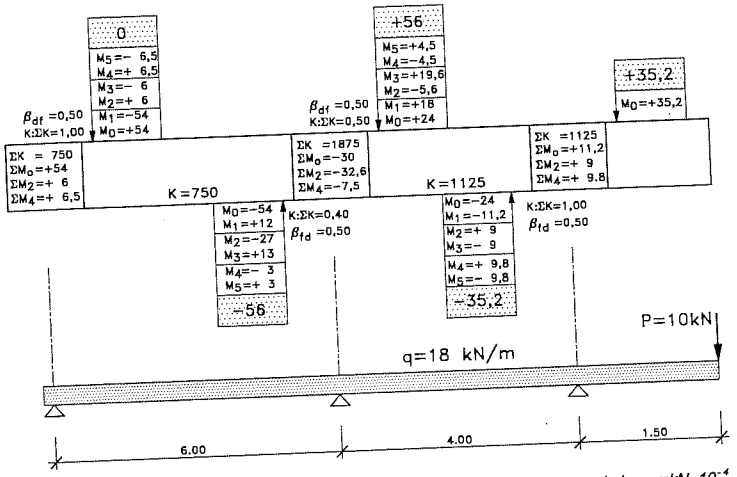
1 En los casos de redondeo de números que terminan en 5, se fuerza la cifra anterior si es par, y no se fuerza si es impar. Esto se hace con la intención de distribuir errores (cfr. Norma UNE 7018).



Valores de k en mkN·10⁻⁴

SECCION DE VIGA 200 x 500

Figura 4-12



Valores de k en mkN·10⁻⁴

SECCION DE VIGA 250 x 600

Figura 4-13

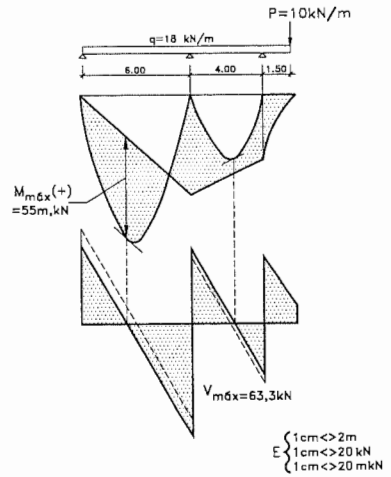


Figura 4-14

Todo el proceso se limita pues a los nudos intermedios, que son los únicos que hay que equilibrar.

b) Viga continua con voladizo

Se trata de una viga continua con luces de 6 y 4 m y un voladizo de 1,50 m, figura 4-13. La única variante es que el momento de empotramiento del voladizo entra naturalmente en el valor ΣM_o del nudo, pero, a partir de dicho momento, la pieza del voladizo no figura en el cálculo, pues si bien su momento de empotramiento inicial actúa sobre el nudo y se reparte por tanto a las restantes piezas, el voladizo no puede recibir momentos de reparto, pues al no estar su extremo opuesto coaccionado por ningún apoyo, no opone resistencia al giro.

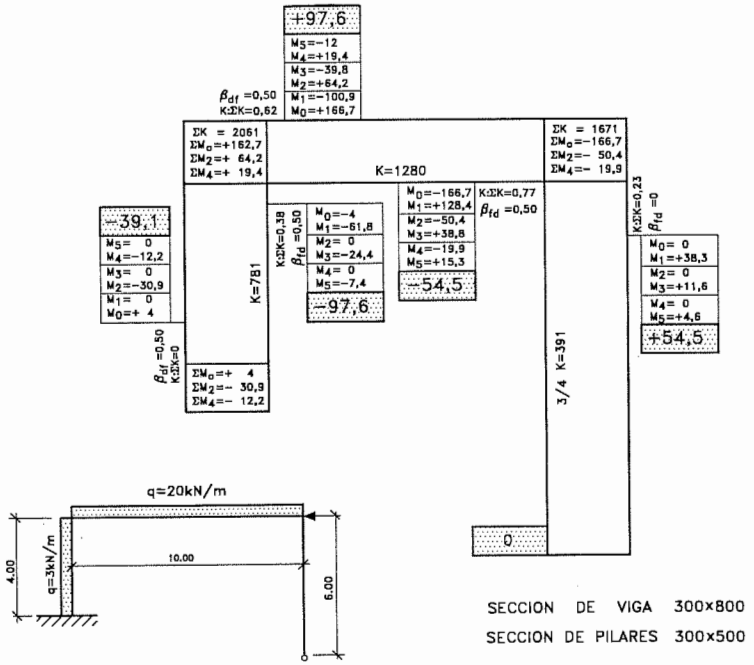
En la figura 4-14, se ha realizado el dibujo de los diagramas de momentos flectores y esfuerzos cortantes para este caso. Se ha comenzado por dibujar las parábolas correspondientes al caso de carga isostática y a continuación llevando en cada apoyo el valor del momento de empotramiento, se han trazado las líneas de cierre. Los trozos de ordenadas comprendidas en la zona rayada proporcionan los momentos flectores del estado suma.

En cuanto a los esfuerzos cortantes, las líneas de trazos corresponden al caso isostático. A ellos hay que añadir los hiperestáticos correspondientes a las reacciones verticales producidas por los momentos de empotramiento (fórmulas [3.9] y [3.10] ó [4.8] y [4.9]).

c) Pórtico simple

Se trata del pórtico dibujado en la figura 4-15 que tiene un pilar empotrado en su cimiento y el otro articulado, existiendo una carga de viento sobre el pilar izquierdo. El cálculo se ha organizado como en los casos anteriores, pero empleando la rigidez de

la pieza articulada para el pilar derecho. Como esta pieza no presenta carga exterior, su momento de empotramiento inicial es nulo.



Valores de k en mkN·10^{-4}

Figura 4-15

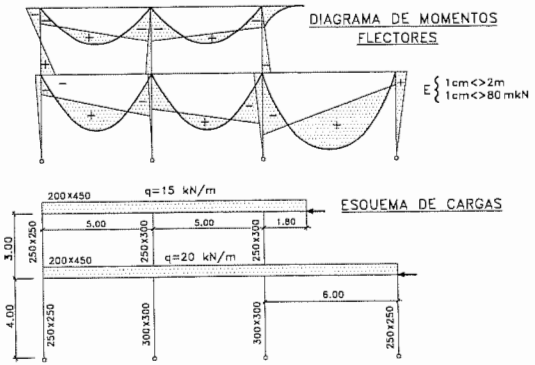


Figura 4-16

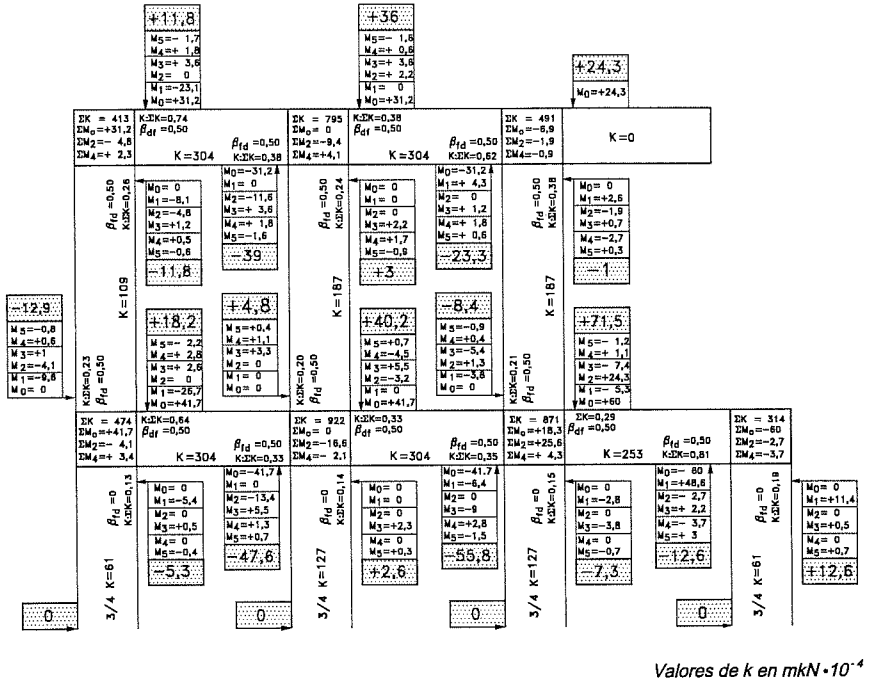


Figura 4-17

d) Pórtico múltiple

Se trata de un entramado normal de edificio indicado en la figura 4-16. El cálculo se detalla en la figura 4-17. Los pilares se han supuesto articulados en su cimiento. Los diagramas de momentos flectores pueden verse en la figura 4-16. Debe recordarse que, aunque la estructura no presenta carga horizontal alguna, los pilares tienen esfuerzos cortantes horizontales. Por ejemplo, en el caso de los pilares de planta baja, si M es el momento de empotramiento en cabeza del pilar y L su luz, el esfuerzo cortante en cabeza y pie de pilar vale según [3.9] y [3.10].

$$Q_f = -\frac{M}{L} \text{ (cabeza del pilar)}$$

$$Q_d = +\frac{M}{L} \text{ (pie del pilar)}$$

variando linealmente entre estos valores de cabeza a pie.

En el caso de los esfuerzos axiles, la carga axil en cada piso es naturalmente la suma de los esfuerzos cortantes de las vigas concurrentes. Dicho valor es igual a la suma de los cortantes debidos a las vigas concurrentes consideradas como isostáticas más las cortantes hiperestáticas obtenidos aplicando las fórmulas [3.9] y [3.10] ó [4.8] y [4.9] a dichas vigas.

4.3.7. SIMPLIFICACIONES POR SIMETRÍA Y ANTIMETRÍA. TEOREMA DE ANDRÉE

Cualquier estado de carga (P, M, q) actuando sobre una estructura simétrica, puede descomponerse en la suma de cargas de valor mitad y sus simétricas, más otro estado de cargas de valor mitad y sus antimétricas. (Fig. 4-18).

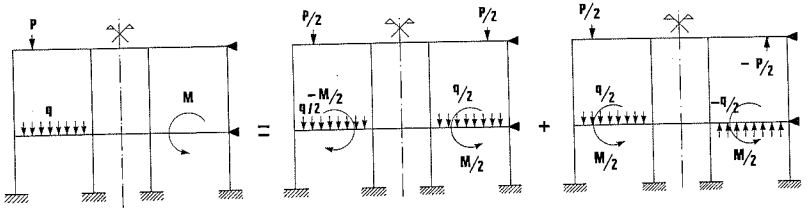


Figura 4-18

Las consideraciones de deformación de la estructura en los casos de simetría y antimetría conducen a las dos conclusiones siguientes:

- En una estructura simétrica, las secciones de los ejes de las piezas de la estructura contenidas en el eje de simetría no giran y sólo experimentan corrimientos a lo largo de dicho eje.
- En una estructura antimétrica, las secciones contenidas en el eje de antimetría giran y sólo experimentan corrimientos en sentido perpendicular a dicho eje.

4.3.8. RIGIDEZ VIRTUAL EN EL CASO DE SIMETRÍA

En las fórmulas [4.2] y [4.3], al ser $M_d = -M_f$, $\theta_d = -\theta_f$ y $M_{ed} = -M_{ef}$ se tiene:

$$M_f = M_{ef} + K_f\,\theta_f\,[1 - \beta_{fd}]$$

$$\frac{M_f - M_{ef}}{\theta_f} = K_f\,[1 - \beta_{fd}]$$

Como $M_f - M_{ed}$ es el momento que ha producido el giro θ_f, podemos definir $\frac{M_f - M_{ef}}{\theta_f} = K_f^v$ como rigidez virtual en caso de simetría.

$$K_f^v = K_f\,[1 - \beta_{fd}] \qquad [4.13]$$

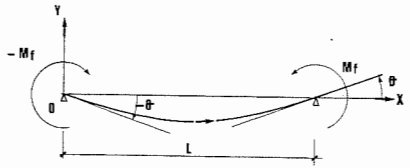


Figura 4-19

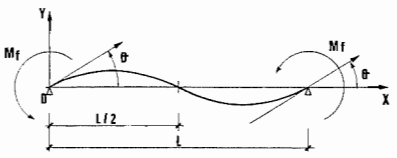


Figura 4-20

Análogamente

$$K_d^v = K_d\,[1 - \beta_{df}] \qquad [4.14]$$

y como $K_f = K_d$ y $\beta_{fd} = \beta_{df}$, $K_f^v = K_d^v$ de acuerdo con la simetría de la estructura.

Para el caso de sección constante, $\beta_{fd} = \beta_{df} = 0{,}5$ y resulta:

$$K_f^v = 0{,}5\,K_f \qquad [4.15]$$

$$K_d^v = 0{,}5\,K_d \qquad [4.16]$$

4.3.9. RIGIDEZ VIRTUAL EN EL CASO DE ANTIMETRÍA

Análogamente, en las fórmulas [4.2] y [4.3] se tiene $M_d = M_f$, $M_{ed} = M_{ef}$ y $\theta_d = \theta_f$ con lo que:

$$M_f = M_{ef} + K_f\,\theta_f\,[1 + \beta_{fd}]$$

$$\text{y}\quad \frac{M_f - M_{ef}}{\theta_f} = K_f^v = K_f\,[1 + \beta_{fd}] \qquad [4.17]$$

Análogamente se obtiene:

$$K_d^v = K_d\,[1 + \beta_{df}] \qquad [4.18]$$

y para pieza de sección constante:

$$K_f^v = 1{,}5\,K_f \qquad [4.19]$$

$$K_d^v = 1{,}5\,K_d \qquad [4.20]$$

Las fórmulas [4.19] y [4.17] se deducen directamente del hecho de que la antimetría supone (Fig. 4-20) la existencia de un punto de momento nulo en la mitad de la luz, por lo que a todos los efectos la pieza real puede reemplazarse por otra de luz mitad empotrada en su extremo real y articulada en una articulación virtual situada en el punto medio de la luz. La rigidez de esta pieza virtual resulta:

$$K_d^v = K_f^v = \frac{3\,EI}{\frac{L}{2}} = \frac{6\,EI}{L} \qquad [4.21]$$

que es vez y media la rigidez de la pieza real.

4.3.10. ENTRAMADOS REDUCIDOS EN CASO DE SIMETRÍA

De acuerdo con lo anterior, si hay simetría de forma y cargas, se tiene lo siguiente:

a) *Entramado con número impar de vanos.* El entramado reducido (Fig. 4-21) es la mitad izquierda, suponiéndose empotramientos virtuales en los puntos medios de BB' y DD'. Los momentos de empotramiento perfecto dorsales de BB' y DD', son los correspondientes a la carga real sobre la luz completa L. En cambio las rigideces de las piezas virtuales BM y DN se toman de acuerdo con [4.13] y [4.14] (Para el caso de sección constante iguales a la mitad de las correspondientes a BB' y DD'). Los momentos de empotramiento en la mitad derecha son iguales en valor absoluto y de signo contrario a los obtenidos para la izquierda.

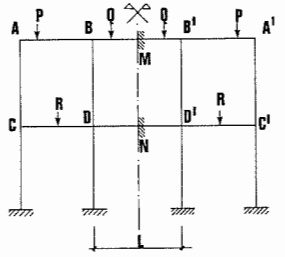


Figura 4-21

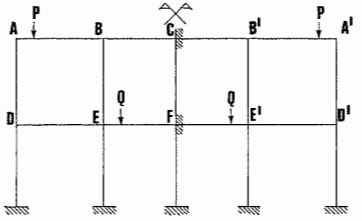


Figura 4-22

b) *Entramado con número par de vanos.* Sea el entramado de la figura 4-22. En este caso la simetría obliga a que el giro de los nudos C y F sea nulo, y por tanto el entramado reducido es el de la mitad izquierda, suponiendo para el cálculo empotramiento perfecto de los dinteles en C y F respectivamente. Los pilares situados en el eje de simetría no están sometidos a momentos flectores ni a esfuerzos cortantes.

Naturalmente, en este caso las rigideces de las piezas BC y EF son las reales y no las virtuales. Los momentos de empotramiento en la mitad derecha son iguales en valor absoluto y de signo contrario, a los obtenidos en la mitad izquierda.

4.3.11. ENTRAMADOS REDUCIDOS EN CASO DE ANTIMETRÍA

Análogamente se pueden presentar los dos casos siguientes, cuando hay simetría de forma y antimetría de cargas:

a) *Entramado con número impar de vanos.* Sea el entramado de la figura 4-23. El entramado reducido es el de la mitad izquierda con articulaciones en M y N. Para la pieza BM, se toman las cargas reales, actuantes sobre BM solamente, como luz se adopta $\frac{L}{2}$ y como rigideces las dadas por [3.32], que en

el caso de sección constante son 1,5 veces las de la pieza de luz L, correspondientes a la pieza de luz $\frac{L}{2}$ y articulada en un extremo[1].

Los momentos de empotramiento en la mitad derecha son iguales en valor absoluto y del mismo signo que en la mitad izquierda.

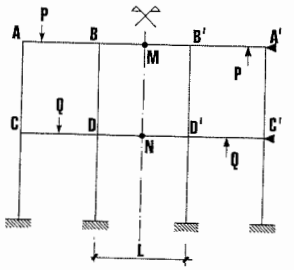


Figura 4-23

b) *Entramado con número par de vanos.* Sea el entramado de la figura 4-24. El entramado reducido es el de la mitad izquierda tomando para las piezas cuyas directrices coinciden con el eje de simetría, momentos de inercia iguales a la mitad de los reales. La razón de esto es que dichas piezas experimentan deformaciones debidas por partes iguales a las cargas situadas en la mitad izquierda y en su simétrica. Para que en el entramado reducido dichas piezas tengan las mismas deformaciones que en el real, al actuar sólo las cargas correspondientes a la mitad del pórtico ha de tomarse momento de inercia, rigideces y esfuerzos iniciales (momentos) mitad.

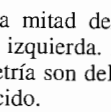
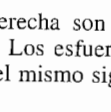
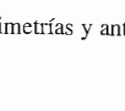
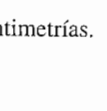
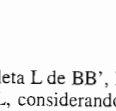
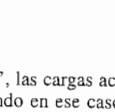
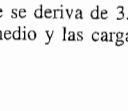
Los momentos de empotramiento en la mitad derecha son iguales en valor absoluto y del mismo signo que en la mitad izquierda. Los esfuerzos en las piezas cuyas directrices coinciden con el eje de simetría son del mismo signo pero de valor doble que los obtenidos en el entramado reducido.

La tabla 4.1 resume todo lo relativo a simetrías y antimetrías.

1 Naturalmente puede también suponerse la luz completa L de BB', las cargas actuantes sobre toda la luz y rigidez 1,5 veces la correspondiente a la luz L, considerando en ese caso la pieza BB' como biempotrada. En sentido estricto, este procedimiento es el que se deriva de 3.3.9 pero parece más intuitivo el expuesto de considerar articulación en el punto medio y las cargas actuantes sobre la mitad izquierda de la pieza.

TABLA 4.1

RESUMEN DE SIMPLIFICACIONES POR SIMETRÍA Y ANTIMETRÍA

	Nº DE VANOS	ENTRAMADOS REALES	ENTRAMADOS REDUCIDOS	RIGIDECES EN PIEZAS VIRTUALES	CARGAS, LUCES Y MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO PERFECTO EN VANOS VIRTUALES	MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO
SIMETRÍA	PAR			$K_{A_1B_1} = K_{AB}$	En A_1B_1 los mismos que en AB.	Los de la mitad derecha son iguales en valor y de signo contrario a los de la mitad izquierda. Las piezas coincidentes con el eje de simetría no tienen momentos.
	IMPAR			$K_{B_1B_1'} = 0.5K_{BB'}$ El valor 0.5 es para piezas de sección EI constante. En general, dicho valor viene dado en las fórmulas(47)y(48).	En B_1B_1' las mismas que en BB'	Los de la mitad derecha son iguales en valor y de signo contrario a los de la mitad izquierda. (El momento en B_1' no es real)
ANTIMETRÍA	PAR			$K_{A_1B_1} = K_{AB}$ $K_{B_1D_1} = 0.5K_{BD}$	En A_1B_1 los mismos que en AB. En B_1D_1 las mismas luces, pero momentos de empotramiento perfecto mitad que los reales.	Los de la mitad derecha son iguales en valor y signo a los de la mitad izquierda. Los de las piezas contenidas en el eje de simetría son dobles de los hallados.
	IMPAR			$K_{B_1B_1'} = 1.5K_{BB'}$ El valor 1,5 es para piezas de sección EI constante. En general, dicho valor viene dado en las fórmulas(51)y(52).	Método a): Extremo B_1 empotrado. En B_1B_1' los mismos que en BB'	Los de la mitad derecha son iguales en valor y signo a los de la mitad izquierda. (El momento en B_1' no es real)
				$K_{B_1M_1} = 1.5K_{BB'}$ El valor 1,5 es para piezas de sección EI constante. En general, dicho valor viene dado en las fórmulas(51)y(52).	Método b): Extremo M_1 articulado. En B_1M_1 luz mitad y cargas las contenidas en el entramado real en esa mitad. Momentos de empotramiento perfecto correspondientes al vano empotrado-articulado de luz $\frac{L}{2}$.	Los de la mitad derecha son iguales en valor y signo a los de la mitad izquierda.

4.3.12. ORDENACIÓN PRÁCTICA DE LOS CÁLCULOS

Hasta aquí, hemos empleado un sistema de ordenación de los cálculos en los distintos ejemplos, que resulta útil para la explicación, pero es muy prolijo para la práctica habitual del método de Cross. De aquí en adelante emplearemos el procedimiento práctico usual consistente en la representación, más esquemática, indicada en la figura 4-25 que corresponde a un nudo del ejemplo d) del apartado 4.3.6.

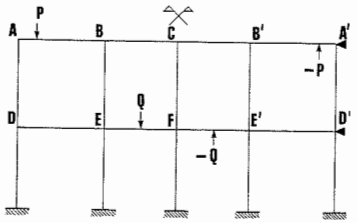


Figura 4-24

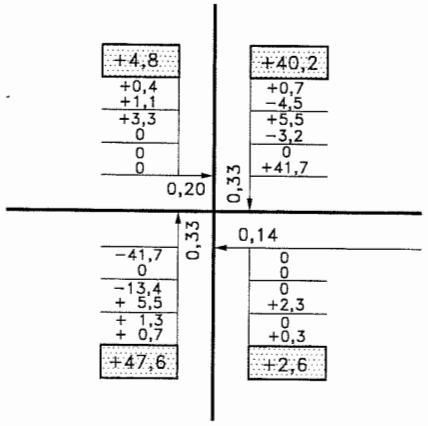


Figura 4-25

4.3.13. COMPROBACIÓN DE LOS CÁLCULOS

Independientemente de la condición $\sum M = 0$ que debe cumplirse en cada nudo, existe una comprobación adicional simple en cada nudo y es verificar que todas las piezas concurrentes en el nudo han girado el mismo ángulo a causa de las cargas aplicadas.

Para ello basta comprobar que en la extremidad de cada pieza concurrente en el nudo el ángulo θ es igual para todas las piezas.

BIBLIOGRAFÍA

(4.1.) FERNÁNDEZ CASADO, C.; FERNÁNDEZ CASADO, J.L. "Cálculo de Estructuras Reticulares". Séptima Edición. Dossat. Madrid 1958.

(4.2.) FERNÁNDEZ CASADO, C. "Estructuras de Edificios". Dossat. Madrid 1955.

CAPÍTULO 5

MÉTODOS CLÁSICOS DE CÁLCULO DE ESTRUCTURAS TRASLACIONALES

5.1 ENTRAMADOS TRASLACIONALES

En el Capítulo 4 consideramos impedida la traslacionalidad de los nudos y para ello en todos los entramados allí analizados incluíamos una serie de apoyos ficticios destinados a impedir tales traslaciones.

Consideremos de nuevo el entramado del ejemplo d) del apartado 4.3.6 (figura 5-1) en el que se han anotado los momentos finales de empotramiento en cabeza y pie de pilar. Calculando de acuerdo con [4.6] y [4.7] las reacciones hiperestáticas sobre los extremos de los pilares, se obtienen los valores indicados en la figura 5-2, en la que se han considerado como positivas las reacciones R dirigidas hacia la derecha y que son las que actuarían sobre las rótulas ficticias A y B y a nivel de cimentación. Si estas rótulas no existen, las resultantes R correspondientes actúan sobre la estructura originando traslaciones de los nudos, ocasionándose nuevos esfuerzos en las piezas debidos a estas traslaciones.

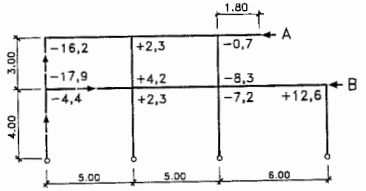


Figura 5-1

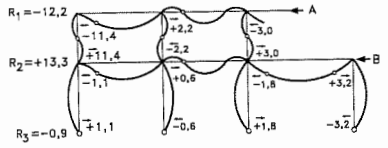


Figura 5-2

El conjunto de reacciones R es tal que $\Sigma R = 0$ ya que las cargas aplicadas en este caso al entramado no tenían componentes en la dirección de las fuerzas R. En el presente caso la traslacionalidad ha sido motivada por la asimetría de forma de la estructura, pero como veremos más adelante, existen muchas otras causas de traslacionalidad.

Dado un entramado se llama grado de traslacionalidad al número de coacciones exteriores que es necesario añadir para que el entramado sea intraslacional. En la figura 5-3 se indican diversos casos.

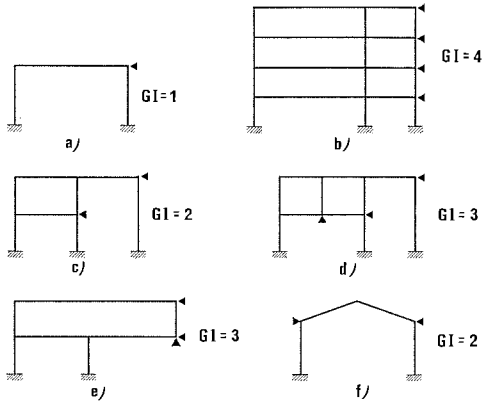


Figura 5-3

5.1.1 MOMENTOS INDUCIDOS POR LA TRASLACIÓN DE UN APOYO

Sea una pieza AB biempotrada y supongamos que el extremo frontal B sufre un corrimiento Δ, trasladándose a B' pero sin giro del apoyo. (Ver figura 5-4).

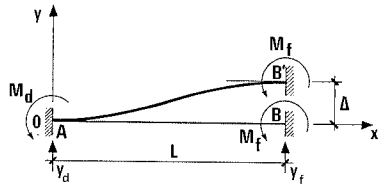


Figura 5-4

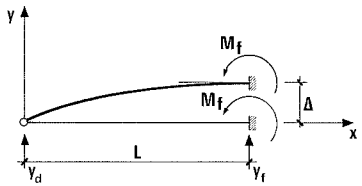


Figura 5-5

Aplicando el segundo teorema de MOHR,

$$\Delta = -\int_0^L x \frac{M}{EI}\,dx$$

y como $Y_f = -\dfrac{M_d + M_f}{L}$

resulta: $M = (M_d + M_f)\dfrac{x}{L} - M_d$

y $\Delta = -\dfrac{1}{EI}\int_0^L \left[(M_d + M_f)\right] dx$

de donde $-\dfrac{6EI\Delta}{L^2} = [-M_d + 2M_f]$ [5.1]

Aplicando el primer teorema de MOHR:

$$0 = \int_0^L \frac{M}{EI}\,dx = \frac{1}{EI}\int_0^L \left[(M_d + M_f)\frac{x}{L} - M_d\right] dx$$

de donde $M_f - M_d = 0$ [5.2]

y resolviendo el sistema formado por [5.1] y [5.2] se tiene:

$$M_d = M_f = -\frac{6EI\Delta}{L^2} \qquad [5.3]$$

Para el caso de pieza empotrada-apoyada (figura 5-5), se tiene análogamente:

$$\Delta = -\int_0^L x \frac{M}{EI}\,dx$$

siendo $M = M_f \dfrac{x}{L}$

luego $\Delta = -\displaystyle\int_0^L M_f \frac{x^2}{L}\frac{dx}{EI}$

de donde $M_f = -\dfrac{3EI\Delta}{L^2}$ [5.4]

5.1.2 CAUSAS DE TRASLACIONALIDAD

Las clasificaremos en los siguientes casos:

a) Asimetría de carga.
b) Asimetría de forma.
c) Asiento de apoyos.
d) Efectos termohigrométricos.
e) Acciones exteriores (viento, sismo, empujes de tierra, etc.).
f) Estructuras con piezas que producen empujes.
g) Variación de longitud de las piezas debida a las deformaciones axiles.

5.1.3 PLANTEAMIENTO GENERAL DEL PROBLEMA

Las ecuaciones generales se deducen de las [4.2] y [4.3] haciendo $M_{ed} = M_{ef} = 0$ y considerando que el ángulo de giro de nudo θ es tal que:

$$tg\theta = \theta_d = \theta_f = \frac{\Delta}{L}$$

de donde:

$$M_d = K_d \frac{\Delta}{L}(1 + \beta_{df})$$

$$M_f = K_f = \frac{\Delta}{L}(1 + \beta_{fd})$$

Para el caso más general de estructura traslacional, las fórmulas resultan:

$$M_d = M_{ed} + K_d\left[\theta_d + \beta_{df}\theta_f + \frac{\Delta}{L}(1 + \beta_{df})\right] \qquad [5.5]$$

$$M_f = M_{ef} + K_f\left[\theta_f + \beta_{fd}\theta_d + \frac{\Delta}{L}(1 + \beta_{fd})\right] \qquad [5.6]$$

que para EI = cte se transforman en:

$$M_d = M_{ed} + \frac{4EI}{L}\left[\theta_d + \frac{1}{2}\theta_f + 1{,}5\frac{\Delta}{L}\right] \qquad [5.7]$$

$$M_f = M_{ef} + \frac{4EI}{L}\left[\theta_f + \frac{1}{2}\theta_d + 1{,}5\frac{\Delta}{L}\right] \qquad [5.8]$$

El planteamiento general conduce al siguiente sistema:

Ecuaciones

- Las [5.5] y [5.6] para las b barras — 2b
- Equilibrio de los n nudos — n
- Corrimientos (dato de cada problema) — c

Incógnitas

- Momentos en los extremos de las barras — 2b
- Ángulos de giro de los nudos — n
- Valores de Δ de los distintos corrimientos — c

El problema se concreta por tanto en la resolución de un sistema de 2b + n + c ecuaciones con igual número de incógnitas. La viabilidad del método es todavía más reducida que en el caso de entramados intraslacionales, como puede verse en los casos sencillos indicados en la figura 5-6.

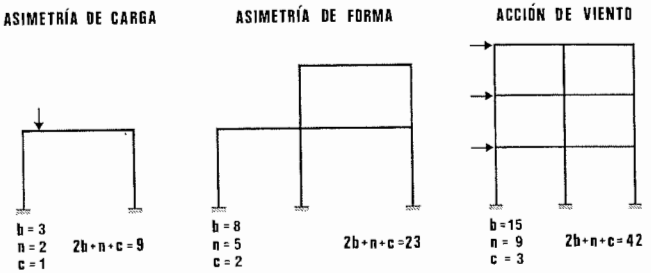


Figura 5-6

5.1.4 MÉTODO DE CROSS

Análogamente a lo que vimos en el caso de entramados intraslacionales, el Método de Cross proporciona una solución simple del problema y tan aproximada como se quiera, bastando para ello sumar a los esfuerzos derivados del cálculo del entramado como intraslacional, los debidos a las traslaciones, calculados a partir de los momentos iniciales [5.3] y [5.4].

Veremos únicamente los casos c), d) y e) de 5.1.2, es decir la aplicación del método al caso frecuente de estructuras sometidas a asientos de apoyo, efectos termohigrométricos o acciones exteriores. El método es inmediatamente generalizable a los restantes casos, que no se exponen aquí porque su interés práctico es hoy reducido, por las ventajas que ofrece el cálculo con ordenador. Se ha considerado interesante el desarrollo de los tres casos que siguen por su valor didáctico[1].

5.1.4.1 Asiento de apoyos

Sea el pórtico de la figura 5-7 en la que los números encerrados en círculos representan rigideces relativas. El valor de EI en el dintel es de $20.000 \cdot 10^{10}$ N.mm^2.

Supongamos que el pilar izquierdo sufre un descenso (asiento del terreno p.ej.) de 5o mm. Primeramente aparecen en el dintel dos momentos de empotramiento:

$$M_d = \frac{-6EI \cdot 50}{(24 \cdot 10^3)^2} \cdot 10^{-6}$$

$$M_f = \frac{-6EI \cdot 50}{(24 \cdot 10^3)^2} \cdot 10^{-6}$$

1 Véase J. CALAVERA (5.3) donde figura una exposición completa de todos los casos.

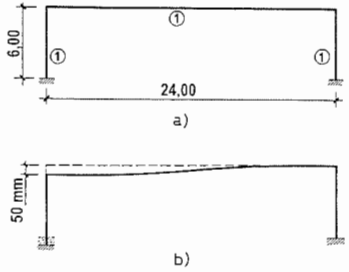


Figura 5-7

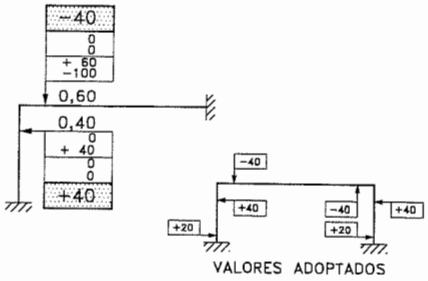


Figura 5-8

Haciendo $\frac{6EI \cdot 50}{(24 \cdot 10^3)^2} \cdot 10^{-6} = 100$, realizamos el cálculo traslacional que se indica en la figura 5-8 en el que se ha hecho uso de la simplificación de antimetría, asignando rigideces relativas 1 al pilar y 1,5 al dintel.

Como el momento real no es - 100 sino

$$M = -\frac{6 \cdot 20.000 \cdot 10^{10} \cdot 50}{(24 \cdot 10^3)^2} \cdot 10^{-6} = -104{,}2 \text{ mkN}$$

los resultantes se obtienen multiplicando los de la figura 5-8 por $\frac{104{,}2}{100}$.

Las reacciones en cabezas de pilares valen:

$$Y_1 = Y_2 = -\frac{40 + 20}{6} \cdot \frac{104{,}2}{100} = -10{,}42 \text{ kN}$$

lo que indica que dichas reacciones no están equilibradas y que debido a que el asiento del apoyo es una acción asimétrica sobre el pórtico, se produce una fuerza sobre el dintel de - 20,84 kN que ocasionará la traslación del entramado hacia la izquierda hasta que la deformación de los pilares producida por esta traslación equilibre el pórtico.

En la figura 5-9 se ha realizado el cálculo traslacional correspondiente a un desplazamiento Δ hacia la izquierda.

Primariamente aparecen en cabezas y pies de los pilares momentos:

$$M_d = M_f = -\frac{6EI\Delta}{L^2}$$

y haciendo $\frac{6EI\Delta}{L^2} = 100$

se obtienen los resultados indicados en la figura, en la que se ha hecho uso de la simplificación de antimetría.

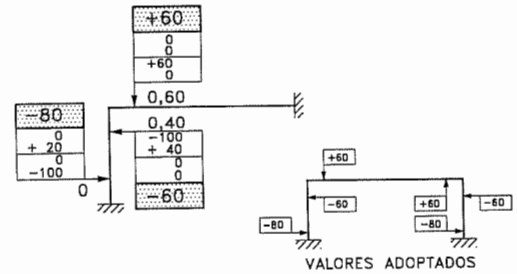


Figura 5-9

Las reacciones en cabezas de pilares debidas a esta traslación son:

$$Y'_1 = Y'_2 = -\frac{-60 - 80}{6} = +23{,}33 \text{ kN}$$

luego la acción de los pilares sobre el dintel valdrá:

$$F_2 = 46{,}66 \text{ kN}$$

Si, en lugar de actuar un momento 100 en el pilar izquierdo, actúa un momento K:

$$F_2 = 46{,}66 \frac{K}{100} \text{ kN}$$

El equilibrio del dintel exige que:

$$-20{,}84 + 46{,}66 \frac{K}{100} = 0 \rightarrow K = 44{,}6 \text{ mkN}$$

Los momentos debidos a la traslación horizontal se obtendrán multiplicando los de la figura 5-9 por

$$\frac{K}{100} = \frac{44{,}6}{100} = 0{,}446$$

El valor del corrimiento es:

$$\Delta = \frac{44{,}6 \cdot 10^6 \cdot (6 \cdot 10^3)^2}{6 \cdot 20.000 \cdot 10^{10}} = 1{,}34 \text{ mm}$$

En la figura 5-10 se indican los diagramas de momentos flectores y los esquemas de las deformadas correspondientes a las diferentes etapas.

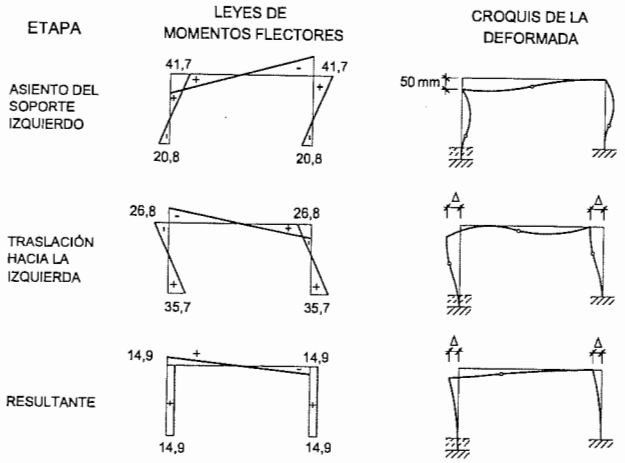


Figura 5-10

5.1.4.1.1 Generalización

Sea el entramado general indicado en la figura 5-11 a) en el que se supone un asiento Δ en un soporte cualquiera. Las etapas de cálculo son las siguientes:

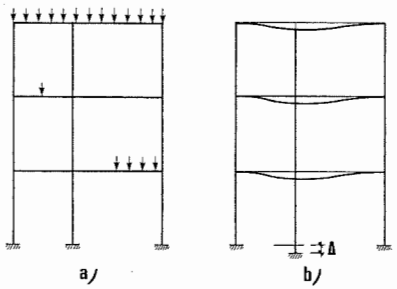


Figura 5-11

a) Cálculo de los esfuerzos producidos por el conjunto de las cargas sobre el entramado considerado como intraslacional.

b) Se supone un descenso Δ (figura 5-11 b)) que motivará unos momentos M primarios producidos por la flexión de los vanos de dinteles contiguos al pilar que experimenta el descenso. Estos momentos se reparten mediante el correspondiente cálculo traslacional.

c) De acuerdo con las etapas a) y b) se calculan en cada dintel las acciones de los pilares de las plantas superior e inferior sobre el dintel. En general estas acciones no resultarán nulas. A continuación se procede a asignar

desplazamientos Δ_i a cada dintel, resolviendo el sistema correspondiente. (Hay que tener en cuenta las reacciones de a) y b)).

d) La suma de los momentos de empotramiento de las hipótesis a), b) y c) proporciona los momentos finales.

Obsérvese que en la etapa c) se consideran ya también las traslaciones debidas a posibles asimetrías de carga y forma.

5.1.4.1.2 Entramados con pilares que no llegan a la cimentación

Esta disposición es relativamente frecuente en la práctica cuando por algún motivo se necesita en una o varias plantas bajas una luz mayor que en las plantas restantes.

El método general de resolución consiste en expresar la condición de equilibrio entre las reacciones isostáticas y las hiperestáticas producidas por el corrimiento del apoyo. A continuación se aclara el método con un ejemplo.

Sea el entramado de la figura 5-12 a).

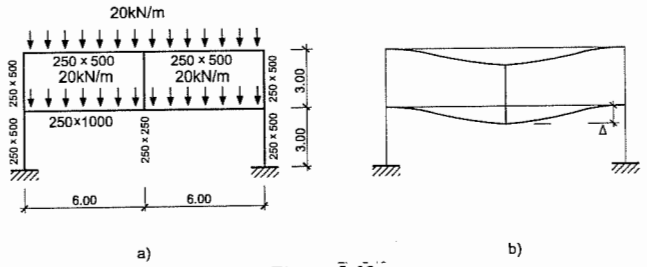


Figura 5-12

Realizaremos en primer lugar el cálculo de la estructura considerada como intraslacional. Para las cargas verticales el grado de traslacionalidad es uno y la estructura se hace intraslacional introduciendo un apoyo ficticio en el punto medio de la luz del dintel de la primera planta[1].

El cálculo intraslacional se indica en la figura 5-13 en la que se ha hecho uso de la simplificación de simetría.

En segundo lugar realizaremos el cálculo correspondiente a un descenso Δ del punto medio de dintel de planta primera, tal como se indica en la figura 5-12 a), siendo Δ también el descenso del apoyo intermedio del dintel de planta segunda.

Haremos $\frac{6EI\Delta}{L^2} = 100$ y el cálculo traslacional se indica en la figura 5-14 en la que, de nuevo, se ha hecho uso de la simplificación de simetría.

1 Obsérvese que para acciones verticales el grado de traslacionalidad de la estructura es uno, mientras que para acciones horizontales es dos.

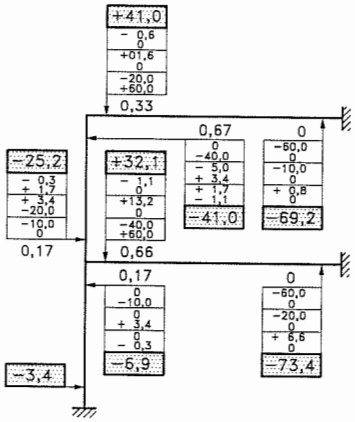


Figura 5-13

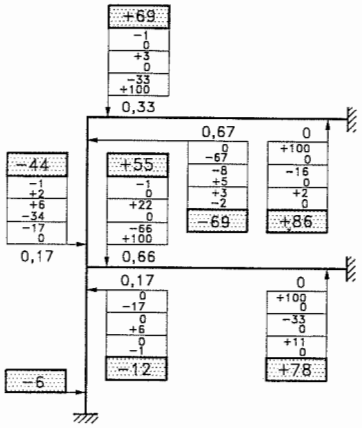


Figura 5-14

A continuación es necesario expresar que las reacciones isostáticas de las cuatro vigas que apoyan en el pilar central interrumpido están en equilibrio con las reacciones hiperestáticas. Llamando K en lugar de 100 al momento debido al verdadero valor de la traslación Δ, se tiene:

$$4 \cdot \frac{6 \cdot 20}{2} + 2\left(-\frac{32{,}1 - 73{,}4}{6}\right) + 2\left(-\frac{41{,}0 - 69{,}2}{6}\right) +$$

$$+ 2\left(-\frac{550 + 78}{6}\right)\frac{K}{100} + 2\left(-\frac{69 + 86}{6}\right)\frac{K}{100} = 0$$

$$263{,}2 - 0{,}96K = 0 \rightarrow K = 274{,}2$$

Los momentos finales se obtienen añadiendo a los del cálculo intraslacional los del traslacional multiplicados por $\frac{K}{100} = 2{,}742$.

NOTA: Obsérvese que el caso resuelto corresponde también a una viga VIERENDEL de dos recuadros.

5.1.4.2 Efectos termohigrométricos

Tanto los efectos de las variaciones de temperatura como los producidos por la retracción del hormigón producen variaciones en la longitud de las piezas que, a su vez, pueden inducir esfuerzos en toda la estructura.

a) Sea el pórtico de la figura 5-15 a) sometido a una retracción de 0,4 mm por metro con E = 20.000 N/mm². Por un lado el acortamiento de retracción provocará un acortamiento de los pilares que no induce esfuerzos en la

estructura dado que ambos soportes son de la misma longitud. También se produce un acortamiento 2Δ del dintel que introduce unos momentos de empotramiento en los extremos de los pilares de valor $\frac{6EI\Delta}{L^2}$ para el pilar izquierdo y $\frac{-6EI\Delta}{L^2}$ para el pilar derecho, siendo $\Delta = 5 \cdot 0{,}4 = 2$ mm

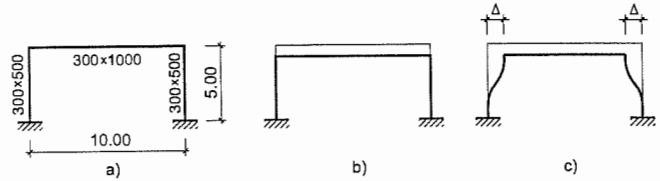


Figura 5-15

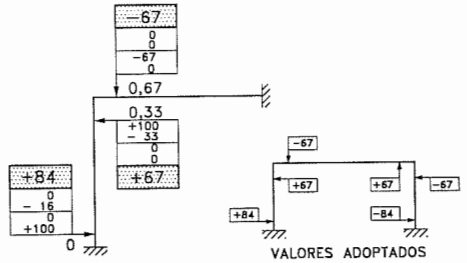


Figura 5-16

Suponiendo $\frac{6EI\Delta}{L^2} = 100$, el cálculo traslacional se indica en la figura 5-16 en la que se ha hecho uso de la simplificación de simetría, con rigidez de dintel 0,5 de la real.

Los momentos finales se obtienen en mkN, multiplicando los obtenidos por:

$$\frac{1}{100} \cdot \frac{6 \cdot 20.000 \cdot \frac{1}{12} \cdot 300 \cdot 500^3 \cdot 2}{(5 \cdot 10^3)^2} \cdot 10^{-6} = 0{,}3 \text{ mkN}$$

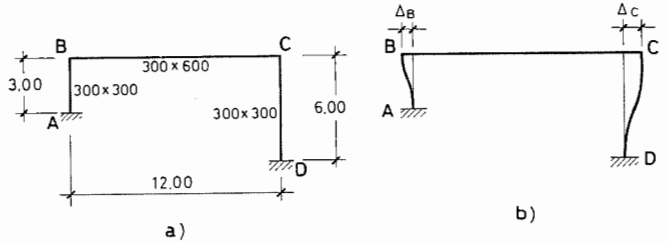


Figura 5-17

b) En el caso anterior ha bastado con realizar el cálculo traslacional. Ello ha sido debido a que los pilares eran de la misma longitud. Veamos ahora el caso de la figura 5-17 cuyo entramado se encuentra sometido a una elevación de temperatura de 20°C con E = 20.000 N/mm² y un coeficiente de dilatación térmica de 10^{-5}.

Al ser los dos pilares de longitudes desiguales, la elevación de temperatura produce un ascenso relativo del punto C respecto al B.

$$\Delta_1 = (6000 - 3000) \cdot 10^{-5} \cdot 20 = 0{,}6 \text{ mm}$$

Lo que introduce unos momentos primarios en los extremos del dintel

$$M_B = M_C = -\frac{6EI\ \Delta_1}{(12 \cdot 10^3)^2} \cdot 10^{-6}$$

Haciendo $\frac{6EI\ \Delta_1}{(12 \cdot 10^3)^2} = 100$ se realiza el cálculo traslacional indicado en la figura 5-18.

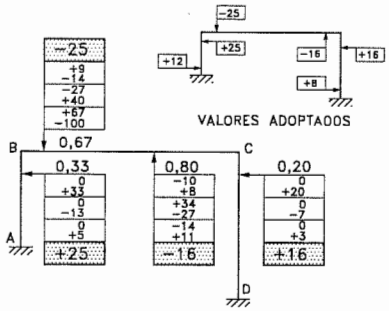


Figura 5-18

Las reacciones del dintel contra los pilares que resultan de este cálculo traslacional valen

$$Y_B = -\frac{25 + 12}{3} = -12{,}33 \text{ kN};\ Y_C = -\frac{16 + 8}{6} = -4{,}0 \text{ kN}$$

$$Y_B + Y_C = -12{,}33 - 4, = -16{,}33 \text{KN}$$

Las reacciones primarias del dintel sobre los pilares debidas al alargamiento de los soportes valen realmente:

$$Y_B + Y_C = -16{,}33 \cdot \frac{\frac{6 \cdot 20.000 \cdot \frac{1}{12} \cdot 300 \cdot 600^3 \cdot 0{,}6}{(12 \cdot 10^3)^2} \cdot 10^{-6}}{100} = -16{,}33 \cdot \frac{2{,}7}{100} = -0{,}44 \text{ kN}$$

Esta suma de fuerzas, al no estar en equilibrio, provoca la traslación del dintel hacia la derecha, hasta que esta traslación Δ_2 produzca unas reacciones iguales y de signo contrario a $Y_B + Y_C$.

Llamando Δ_2 a la traslación y haciendo $\frac{6EI\ \Delta_2 \cdot 10^{-6}}{(3 \cdot 10^3)^2} = 100$ los momentos en el pilar izquierdo, los momentos en el derecho serán $\frac{6EI\ \Delta_2}{(6 \cdot 10^3)^2} \cdot 10^{-6}$ iguales por tanto a 250. El cálculo traslacional se indica en la figura 5-19.

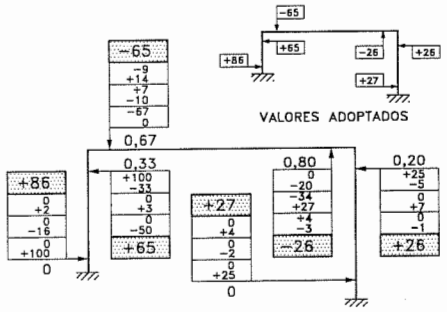


Figura 5-19

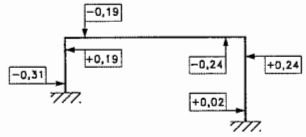


Figura 5-20

Sea K el momento primario inducido en el pilar izquierdo por la traslación del dintel. Las reacciones del dintel sobre los soportes valen:

$$Y'_B + Y'_C = -\left(\frac{65 + 86}{3} + \frac{26 + 27}{6}\right)\frac{K}{100} = -0{,}592\ K$$

y para que el dintel esté en equilibrio se habrá de cumplir

$$-0{,}44 - 0{,}592\ K = 0 \rightarrow K = -0{,}74$$

Los momentos finales se obtienen multiplicando los de la figura 5-18 por $\frac{6EI\ \Delta_1 \cdot 10^{-6}}{(12 \cdot 1000)^2 \cdot 100}$ y sumándoles los de la figura 5-19 multiplicados por $\frac{K}{100} = -\frac{0{,}74}{100}$. Los resultados se indican en la figura 5-20.

En todo lo anterior hemos considerado únicamente los efectos debidos al alargamiento ocasionado por el incremento de temperatura que se produce en los pilares. Veamos ahora los efectos debidos al alargamiento del dintel.

La dilatación del dintel será:[1]

$$\Delta_B + \Delta_C = 12 \cdot 10^3 \cdot 10^{-5} \cdot 20 = 2{,}4 \text{ mm} \qquad [5.9]$$

Para el pilar izquierdo los momentos primarios de empotramiento valdrán:

$$M_A = M_B = -\frac{6EI\ \Delta_B \cdot 10^{-6}}{(3 \cdot 10^3)^2} \qquad [5.10]$$

igualando este valor a - 100, se realiza el cálculo traslacional indicado en la figura 5-21:

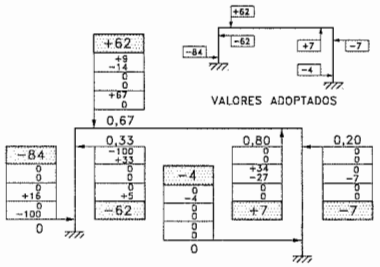


Figura 5-21

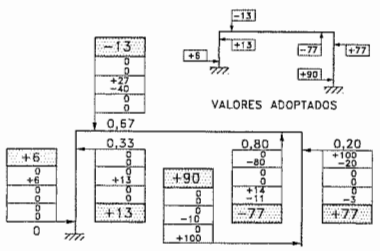


Figura 5-22

Para el soporte derecho:

$$M_C = M_D = +\frac{6EI\ \Delta_C \cdot 10^{-6}}{(6 \cdot 10^3)^2} \qquad [5.11]$$

e igualando este valor a 100 se realiza el cálculo traslacional que se indica en la figura 5-22.

Sean K y K' los valores de los momentos [5.10] y [5.11] en lugar de - 100 y 100, respectivamente. Las reacciones horizontales del dintel contra los pilares son:

En el primer caso:

$$Y_1 = -\frac{-84\ -62}{3} - \frac{-4\ -7}{6} = +\ 50{,}50 \text{ kN}$$

1 Δ_B y Δ_C son aquí los valores absolutos de los corrimientos.

En el segundo caso:

$$Y_2 = -\frac{+6\ +13}{3} - \frac{+90\ +77}{6} = -34{,}17 \text{ kN}$$

y habrá de cumplirse:

$$50{,}50\left(\frac{-K}{100}\right) - 34{,}17\frac{K'}{100} = 0 \qquad [5.12]$$

De $\dfrac{-6EI\ \Delta_B \cdot 10^{-6}}{(6 \cdot 10^3)^2} = K$ resulta

$$\Delta_B = -\frac{(3 \cdot 10^3)^2\ K}{6 \cdot 20.000 \cdot \frac{1}{12} \cdot 300^4 \cdot 10^{-6}} = -\ 0{,}111\ K \text{ mm}$$

y de $\dfrac{6EI\ \Delta_C \cdot 10^{-6}}{(6 \cdot 10^3)^2} = K'$ resulta

$$\Delta_C = +\frac{(6 \cdot 10^3)^2\ K'}{6 \cdot 20.000 \cdot \frac{1}{12} \cdot 300^4 \cdot 10^{-6}} = -\ 0{,}444\ K' \text{ mm}$$

y sustituyendo en [5.9] se tiene:

$$-0{,}111K + 0{,}4444K' = 2{,}4$$

y de [5.12]

$$-0{,}505\ K - 0{,}341\ K' = 0$$

Resuelto el sistema se obtiene:

$K = -\ 3{,}13$

$K' = 4{,}62$

y por tanto:

$\Delta_B = 0{,}3$ mm

$\Delta_C = 2{,}1$ mm

los momentos de empotramiento finales se obtienen mediante la expresión:

$$M = -\frac{K}{100} M_1 + \frac{K'}{100} M_2$$

donde M_1 y M_2 son los del primer y segundo cálculo traslacional respectivamente. El resultado se indica en la figura 5-23.

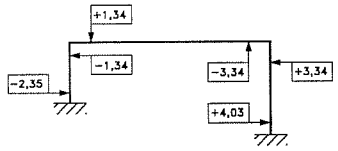


Figura 5-23

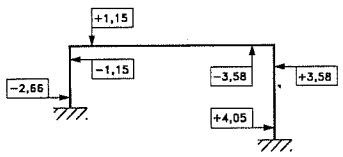


Figura 5-24

Los momentos totales finales debidos al alargamiento de soportes y dintel se obtienen sumando los indicados en la figura 5-20 con los de la figura 5-23. El resultado se indica en la figura 5-24.

5.1.4.2.1 Generalización

El método se generaliza fácilmente para el caso de un entramado cualquiera, tal como el de la figura 5-25, con pilares de igual longitud en cada piso.

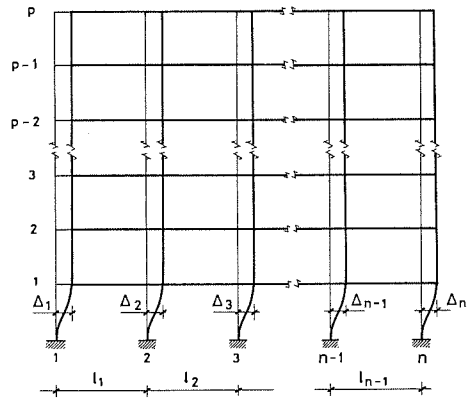


Figura 5-25

Llamaremos Δ_1, Δ_2, ... Δ_n las traslaciones ficticias de las cabezas de los pilares consideradas como positivas hacia la derecha[1] y Δ'_1, Δ'_2, ..., Δ'_n los corrimientos reales.

Se habrán de cumplir, siendo Δ_1 el coeficiente de variación lineal correspondiente al fenómeno que se estudie, las relaciones siguientes:

$$\Delta'_2 - \Delta'_1 = \Delta_1 \cdot L_1$$

1 Como "a priori" puede haber duda en algunos pilares de hacia qué lado se produce la traslación Δ, es más simple suponerlas todas hacia la derecha.

$$\Delta'_3 - \Delta'_2 = \Delta_1 \cdot L_2$$

.

. [5.13]

.

$$\Delta'_n - \Delta'_{n-1} = \Delta_1 \cdot L_{n-1}$$

Además, cortando por un plano horizontal a nivel de las cabezas de los pilares de planta baja, la suma de esfuerzos, al no haber acciones horizontales exteriores y estar la estructura en equilibrio, debe ser nula, luego:

$$Y_{1f} + Y_{2f} + \ldots + Y_{nf} = 0 \qquad [5.14]$$

Los valores de Δ'_1, Δ'_2, Δ'_3, ..., Δ'_n y de Y_{1f}, Y_{2f}, ..., Y_{nf} se determinan a partir de los corrimientos ficticios Δ_1, Δ_2, ..., Δ_n dados aisladamente a cada cabeza de pilar, mediante los cálculos traslacionales correspondientes y coeficientes K_i tales que $\Delta'_i = K_1 \Delta_i$.

Las ecuaciones [5.13] y [5.14] forman un sistema de n ecuaciones con n incógnitas K_1, K_2, ..., K_n y los momentos finales son:

$$M = M_1 K_1 + M_2 K_2 + \ldots + M_n K_n$$

siendo M_1, M_2, ..., M_n los momentos de los respectivos cálculos traslacionales.

Si los pilares de planta baja fueran de diferente longitud unos de otros, basta añadir a los momentos considerados los debidos a las diferencias de elevaciones producidas por la desigual dilatación de los pilares en que apoya cada vano. Esto equivale a realizar tantos cálculos traslacionales como vanos y a sumar los momentos resultantes de todos ellos a los anteriormente obtenidos.

5.1.4.3 Acciones exteriores

a) Sea el pórtico de la figura 5-26 a) sometido a la acción de una fuerza horizontal de 50 kN y supongamos $E_c = 20.000$ N/mm^2.

Es evidente que el pórtico se trasladará hacia la derecha hasta que, por la deformación de los pilares, éstos ejerzan sobre el dintel unas fuerzas F_B, F_C tales que $F_B + F_C = -50$ kN. (Figura 5-26 b)).

Sea Δ el corrimiento necesario del dintel, que inducirá en los extremos de los pilares unos momentos primarios.

$$M = \frac{6EI\,\Delta}{(3 \cdot 10^3)^2} \cdot 10^{-6}$$

Adoptando 100 mkN como valor de M, el cálculo traslacional se indica en la figura 5-26 c) en la que la fuerza de 50 kN se ha supuesto actuando por mitades en B y C con lo que se puede hacer uso de la simplificación de antimetría.

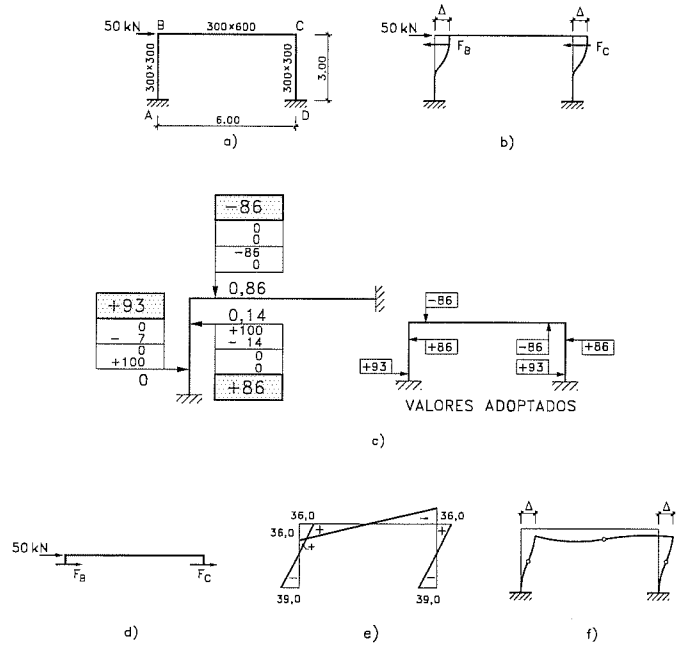


Figura 5-26

De acuerdo con ello, las acciones de los pilares sobre el dintel serán:

$$F_B = F_C = -\frac{86 + 93}{3} = -59{,}67 \text{ kN}$$

Sea K el valor real del momento M en lugar de 100 m·kN. Se habrá de cumplir para que esté en equilibrio el dintel. (Figura 5-26 d)).

$$-\frac{2 \cdot K \cdot 59{,}67}{100} + 50 = 0 \rightarrow K = 41{,}9$$

Los valores reales de los momentos se obtendrán multiplicando los de la figura 5-26 c) por $\frac{41{,}9}{100}$.

El valor del corrimiento Δ será:

$$\Delta = \frac{41{,}9 \cdot (3 \cdot 10^3)^2}{6 \cdot 20.000 \cdot \frac{300^4}{12} \cdot 10^{-6}} = 5 \text{ mm}$$

Los valores de los momentos flectores y el croquis de la deformada se indican en las figuras 5-26 e) y f).

b) Sea el mismo pórtico de la figura anterior, pero sometido a una carga uniforme de 20 kN/m sobre el pilar izquierdo (figura 5-27 a).

Existen ahora flexiones directas ocasionadas por la carga uniforme y otras debidas a la traslacionalidad del pórtico. Realizamos el cálculo intraslacional indicado en la figura 5-27 b), con momentos de empotramiento en el pilar izquierdo:

$$M = \pm\frac{20 \cdot 3^2}{12} = \pm 15 \text{ m·kN}$$

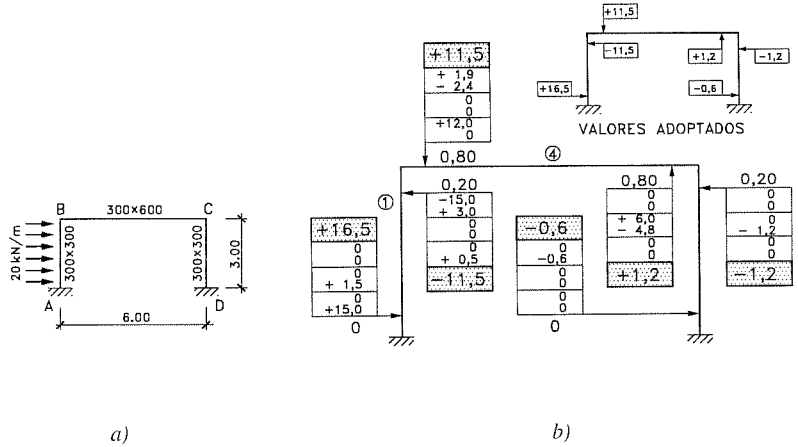


Figura 5-27

Las reacciones del dintel sobre los extremos superiores de los pilares valen:

$$Y_{1B} = \frac{20 \cdot 3}{2} - \frac{16{,}5 - 11{,}5}{3} = 28{,}3 \text{ kN}; \qquad Y_{1C} = -\frac{-1{,}2 - 0{,}6}{3} = +0{,}6 \text{ kN}$$

y en definitiva existe una componente de 28,9 kN actuando sobre el dintel hacia la izquierda que es la que origina la traslación del pórtico en esa dirección.

Sea Δ el corrimiento del pórtico (positivo hacia la derecha), que originará unos momentos en los extremos de los pilares:

$$M = \frac{6EI\Delta}{L^2} \cdot 10^{-6}$$

Haciendo este valor igual a 100 m·kN, el cálculo traslacional es el mismo de la figura 5-26 c).

Las reacciones del dintel sobre los extremos de los pilares valen por tanto - 59,67 kN cada una.

Siendo K el valor real del momento M y considerando el equilibrio del dintel, se tiene:

$$+ 28{,}9 - 2 \cdot \frac{K}{100} 59{,}67 = 0 \rightarrow K = 24{,}2$$

y los valores de los momentos se obtienen multiplicando los de la figura 5-26 c) por $\frac{24{,}2}{100}$. Sumando a éstos los del cálculo intraslacional se tienen por tanto los momentos finales de empotramiento. En la figura 5-28 se indican los momentos flectores y la deformada de pórtico. El valor de traslación resulta:

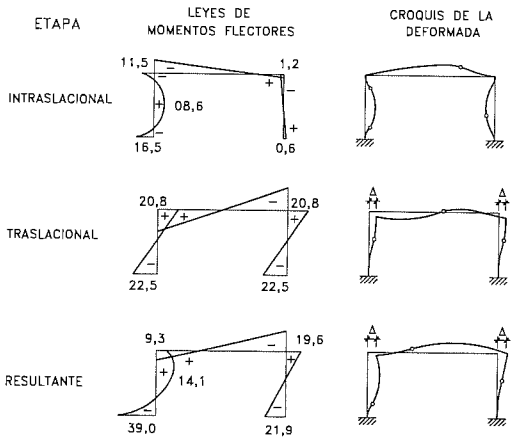


Figura 5-28

$$\Delta = \frac{(3 \cdot 10^3)^2 \cdot 24{,}2}{6 \cdot 20.000 \cdot \frac{300^4}{12} \cdot 10^{-6}} = 2{,}7 \text{ mm}$$

5.1.4.3.1. Generalización

Pueden utilizarse dos métodos.

MÉTODO A

Supongamos un entramado general (figura 5-29 a)) sometido a acciones horizontales F_i. Tomemos sucesivamente cada uno de los dinteles y supongamos que

experimenta una traslación horizontal Δ_p. Llamemos 100 al momento originado en un pilar cualquiera de las series de pilares inmediatamente superiores e inferiores al dintel considerado. El momento producido por la traslación Δ_p en cualquier pilar de dichas series valdrá $100 \cdot \frac{I_i}{I_0}$, siendo I_i el momento de inercia de la sección transversal de ese pilar e I_0 el del pilar al que se asigna el momento 100. Conocidos los momentos primarios producidos por Δ_p, se puede realizar el cálculo traslacional correspondiente. Llamando K_p el valor real del momento adoptado como 100, los momentos reales se obtendrían multiplicando los obtenidos en el cálculo traslacional por $\frac{K_p}{100}$

Aislemos ahora (figura 5-29 b)) la parte superior del entramado que resulta al cortar por un plano horizontal inmediatamente por debajo del dintel del piso p. Llamemos Y^1_{ij} a la reacción del pilar i situado bajo el dintel del piso j sobre este dintel, debida a la traslación del piso 1 deducida del correspondiente cálculo traslacional a partir del momento 100. El valor real de Y^1_{ij} será $K_1 Y^1_{ij}$

Los valores de las acciones Y de los pilares sobre el dintel p serán:

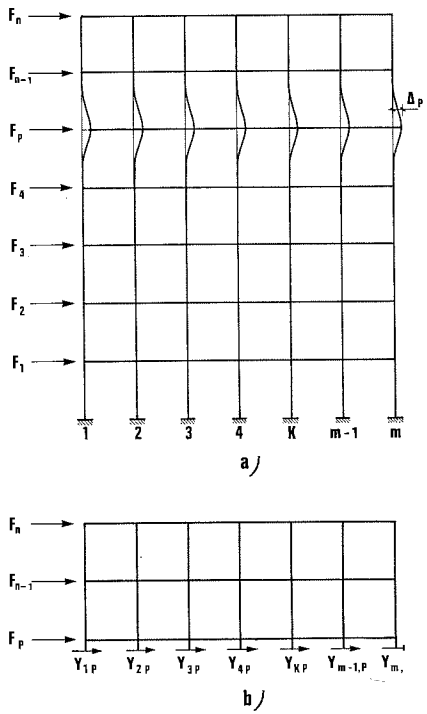


Figura 5-29

$$Y_{1p} = \frac{K_1}{100} Y^1_{1p} + \frac{K_2}{100} Y^2_{1p} + \ldots + \frac{K_n}{100} Y^n_{1p}$$

$$Y_{2p} = \frac{K_1}{100} Y^1_{2p} + \frac{K_2}{100} Y^2_{2p} + \ldots + \frac{K_n}{100} Y^n_{2p} \qquad [5.15]$$

.

.

.

$$Y_{mp} = \frac{K_1}{100} Y^1_{mp} + \frac{K_2}{100} Y^2_{mp} + \ldots + \frac{K_n}{100} Y^n_{mp}$$

Expresando ahora que la zona superior del entramado que hemos aislado está en equilibrio, se tiene:

$$Y_{1p} + Y_{2p} + \ldots + Y_{mp} + F_p + F_{p+1} + \ldots + F_n = 0 \qquad [5.16]$$

donde Y_{1p}, Y_{2p} ... Y_{mp} son las expresiones [5.15].

Escribiendo la ecuación [5.16] para cada dintel, se obtiene un sistema de n ecuaciones con n incógnitas, siendo n el grado de traslacionalidad del entramado. Los valores finales de los momentos serán:

$$M = M_1 \frac{K_1}{100} + M_2 \frac{K_2}{100} + \ldots + M_n \frac{K_n}{100} \qquad [5.17]$$

siendo M_1, M_2 ... M_n los valores obtenidos en los cálculos traslacionales correspondientes a las traslaciones de los pisos 1, 2 ... n.

Si sobre el entramado existen acciones verticales u horizontales directamente aplicadas sobre las piezas, debe realizarse el cálculo intraslacional correspondiente añadiendo en la ecuación [5.16] de cada dintel los valores Y_{ip} debidos al cálculo intraslacional y análogamente en la ecuación [5.17] deben añadirse los momentos de empotramiento debidos al cálculo intraslacional.

Obsérvese que la aplicación del método al plantear el sistema de ecuaciones [5.16] proporciona los esfuerzos debidos a la traslacionalidad del entramado motivada no sólo por la acción de las fuerzas exteriores F_i sino también por las posibles asimetrías de carga y forma que pudieran existir.

MÉTODO B

El método es esencialmente el mismo. La única diferencia es que, en lugar de suponer traslaciones Δ_i de cada dintel suponiendo los restantes sin traslación, en esta variante se comienza a dar traslaciones por el dintel superior (figura 5-30 b)). Para los dinteles inferiores (figura 5-30 c) y d)) se supone que, cuando un dintel se traslada, lo hacen con él y en la misma magnitud todos los superiores.

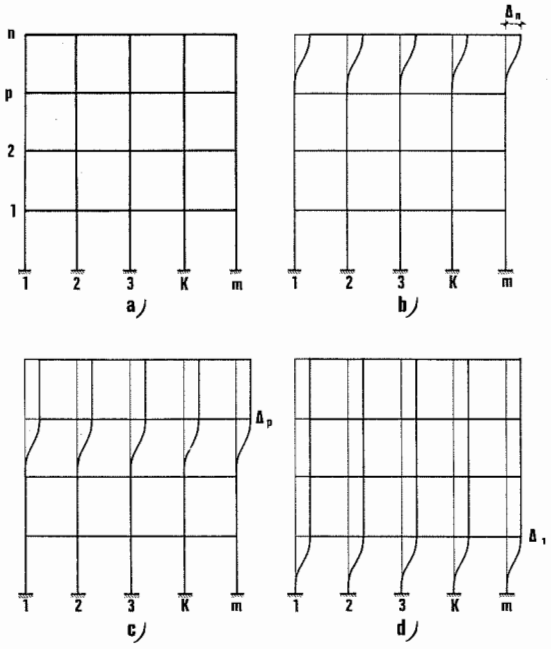


Figura 5-30

El planteamiento y resolución son idénticos al caso anterior con la única diferencia de que, al suponer trasladado un dintel y realizar el correspondiente cálculo traslacional, solamente tienen momentos primarios no nulos de empotramiento los pilares del piso inferior, en lugar de los pisos superior e inferior como ocurre en el método A.

BIBLIOGRAFÍA

(5.1) FERNÁNDEZ CASADO, C.; FERNÁNDEZ CASADO, J.L. "Cálculo de Estructuras Reticulares". 7ª Edición. Dossat. Madrid, 1958.

(5.2) FERNÁNDEZ CASADO, C. "Estructuras de Edificios". Dossat. Madrid, 1955.

(5.3) CALAVERA, J. "Proyecto y Cálculo de Estructuras de Hormigón Armado para Edificios". 2ª Edición. Madrid, 1991.

CAPÍTULO 6

ESTRUCTURAS CON APOYOS ELÁSTICOS Y EMPOTRAMIENTOS FLEXIBLES

6.1 APOYOS ELÁSTICOS

Entendemos por tales aquéllos en los que la pieza experimenta una traslación o giro en el apoyo, proporcionales a la reacción producida por ese apoyo. Su resolución es inmediata con lo anteriormente visto y se aclara a continuación con algunos ejemplos.

6.1.1 APOYOS CON TRASLACIONES ELÁSTICAS

a) Sea la viga continua de la figura 6-1, con dos vanos de sección 200 · 500 mm con hormigón tal que E_c = 20.000 N/mm² y sometidos a una carga vertical descendente de 30 kN/m. El apoyo central es elástico con una relación entre reacción Y_B (en kN) y asiento experimentado Δ (en mm) tal que $\Delta = 0{,}00002\ Y_B$[1].

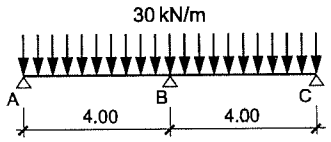


Figura 6-1

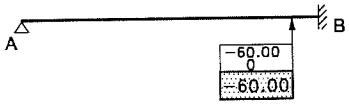


Figura 6-2

1 El coeficiente 0,00002 es denominado "constante de muelle" del apoyo B y es la deformación producida en el apoyo para una reacción unidad.

En primer lugar, resolvemos el problema por el Método de Cross suponiendo el apoyo B intraslacional. El proceso se indica en la figura 6-2, habiéndose hecho uso de la simplificación de simetría y considerado la pieza como empotrada-apoyada.

La reacción en B vale por tanto:

$$Y_{1B} = 2\left(\frac{30 \cdot 4}{2} + \frac{60}{4}\right) = 150 \text{ kN}$$

$$Y_{1A} = Y_{1C} = \left(\frac{30 \cdot 4}{2} - \frac{60}{4}\right) = 45 \text{ kN}$$

A continuación realizamos el cálculo traslacional para un descenso $-\Delta$ del apoyo B. Para ello hacemos uso de la simplificación de simetría y consideramos la pieza empotrada-apoyada con $M_{2B} = \frac{3EI\Delta}{L^2} = 100$. El resultado se indica en la figura 6-3.

Resulta $$Y_{2B} = 2\left(\frac{-100}{4}\right) = -50 \text{ kN}$$

$$Y_{2A} = Y_{2C} = \frac{+100}{4} = 25 \text{ kN}$$

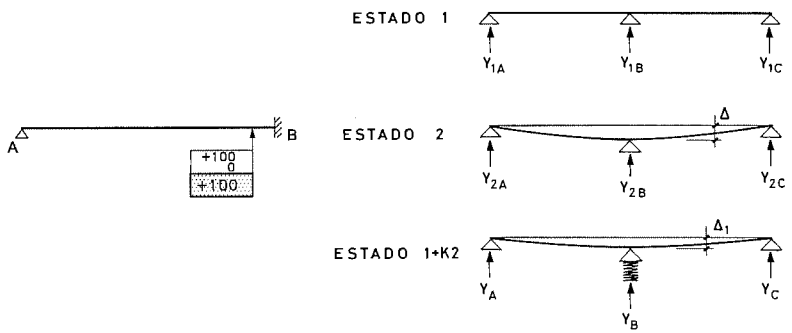


Figura 6-3

Figura 6-4

Sea $-\Delta_1 = -K\Delta$ el asiento real. Se habrá de cumplir:

$$\begin{cases} Y_B = Y_{1B} + KY_{2B} \\ \Delta_1 = K\Delta \end{cases}$$

y como $\Delta_1 = 0{,}00002\ Y_B$ de las dos ecuaciones anteriores se obtiene, con

$$\Delta = \frac{M_{2B} \cdot L^2}{3\ EI}$$

$$K = \frac{Y_{1B}}{50.000\ \Delta - Y_{2B}} = \frac{150}{50.000 \dfrac{100 \cdot 4^2}{3 \cdot 20.000 \cdot 10^3 \cdot 0{,}002} + 50} = 0{,}209$$

El momento final de empotramiento en B resulta combinación lineal:

$$M_B = M_{1B} + K\ M_{2B}$$

$$M_B = -60 + 100 \cdot 0{,}209 = -39{,}1 \text{ mkN}$$

Y la reacción final análogamente:

$$Y_B = 150 - 50 \cdot 0{,}209 = 139{,}6 \text{ kN}$$

$$Y_A = Y_C = \frac{240 - 139{,}6}{2} = 50{,}2 \text{ kN}$$

El asiento final Δ_1 viene dado por:

$$\Delta_1 = \frac{Y_B}{50.000} = \frac{139{,}6}{50.000} = 2{,}8 \text{ mm}$$

Obsérvese que el asiento del apoyo reduce los esfuerzos en ese apoyo, aumentando los de otras zonas de la estructura.

b) Sea la misma viga que en el ejemplo anterior pero supongamos que el apoyo C es también elástico con relación $\Delta = 0{,}00001\ Y_C$.

Como en el caso anterior comenzamos por realizar el cálculo intraslacional, lo que conduce a los resultados de la figura 6-2, siendo

$$Y_{1C} = Y_{1A} = \frac{30 \cdot 4}{2} - \frac{60}{4} = 45 \text{ kN} \qquad Y_{1B} = 150 \text{ kN} \qquad M_{1B} = -60 \text{ mkN}$$

A continuación suponemos un asiento Δ_B del apoyo B y haciendo

$$M_{2B} = -\frac{3\ EI\ (-\Delta_B)}{L^2} = 100$$

se obtienen los resultados de la figura 6-3.

Supongamos ahora un tercer estado, correspondiente a un descenso $-\Delta_C$ del apoyo C, lo que provocará en el apoyo B (Fig. 6-5) un momento de empotramiento

$$M_{3B} = -\frac{3\,EI\,(-\Delta_C)}{L^2}$$

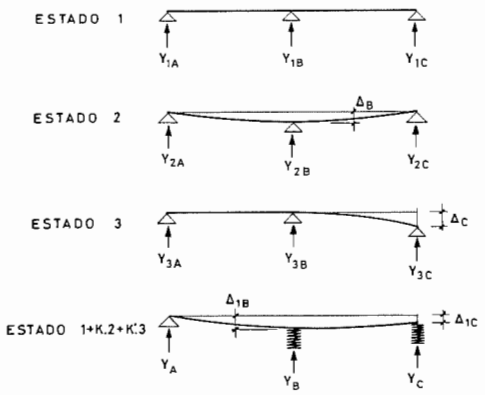


Figura 6-5

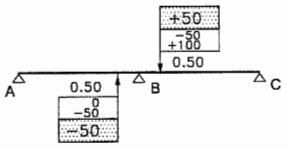


Figura 6-6

Haciendo $\frac{3\,EI\,\Delta_C}{L^2} = 100$ se realiza el cálculo traslacional según se indica en la figura 6-6.

Las reacciones resultan:

$$Y_{3A} = -\frac{50}{4} = -12{,}5\ kN$$

$$Y_{3B} = -2\,\frac{50}{4} = 25\ kN$$

$$Y_{3C} = -\frac{50}{4} = -12{,}5\ kN$$

El estado final, se obtiene (Fig. 6-5) por superposición de los estados 1, 2 y 3, siendo

$\Delta_{1B} = K\,\Delta_B$ y $\Delta_{1C} = K'\,\Delta_C$ los asientos reales de los apoyos B y C, se tiene:

$$\left\{\begin{array}{l} Y_B = Y_{1B} + K\,Y_{2B} + K'\,Y_{3B} \\ Y_C = Y_{1C} + K\,Y_{2C} + K'\,Y_{3C} \end{array}\right. \qquad [6.1]$$

Como $\Delta_{1B} = 0{,}00002\,Y_B$; $\quad Y_B = 50.000\,\Delta_{1B} = 50.000\ K\,\Delta_B$

o sea, $\quad Y_B = 50.000\ K\,\dfrac{100 \cdot 4^2}{3 \cdot 20.000 \cdot 10^3 \cdot 0{,}002} = 666{,}67\ K$

y $\quad \Delta_{1C} = 0{,}00001\,Y_C$; $\ Y_C = 100.000\,\Delta_{1C} = 100.000\ K'\,\Delta_C$

o sea: $\quad Y_C = 100.000\ K'\,\dfrac{100 \cdot 4^2}{3 \cdot 20.000 \cdot 10^3 \cdot 0{,}002} = 1.333{,}33\ K'$

Sustituyendo valores en el sistema [6.1] se obtiene el [6.2]

$$\left.\begin{array}{l} 716{,}67\ K - 25\ K' = 150 \\ -25\ K + 1.345{,}83\ K' = 45 \end{array}\right\} \qquad [6.2]$$

que resuelto conduce a:

$$K = 0{,}2106$$

$$K' = 0{,}0373$$

con lo que

$$Y_B = 666{,}67 \cdot 0{,}2106 = 140{,}4\ kN$$

$$Y_C = 1.333{,}33 \cdot 0{,}0373 = 49{,}8\ kN$$

$$Y_A = 8 \cdot 30 - (140{,}4 + 49{,}8) = 49{,}9\ kN$$

El valor del momento en B puede obtenerse directamente tomando momentos de las cargas actuantes en el vano derecho respecto al punto B.

$$M_{1B} = 49{,}8 \cdot 4 - 4 \cdot 30 \cdot 2 = -40{,}8\ mkN$$

Los valores de los asientos en B y C resultan:

$$\Delta_{1B} = 0{,}00002 \cdot 140{,}4 = 2{,}8\ mm$$

$$\Delta_{1C} = 0{,}00001 \cdot 49{,}8 = 0{,}5\ mm$$

c) En el pórtico de la figura 6-7 la inercia del dintel es $EI = 4.000 \cdot 10^{10}\ Nmm^2$ y la de los pilares $EI = 2.000 \cdot 10^{10}\ Nmm^2$. El pilar izquierdo descansa sobre un apoyo elástico tal que $\Delta = -0{,}0005\,Y_A$ (Δ en mm para Y_A en kN).

Calcular los momentos finales de empotramiento.

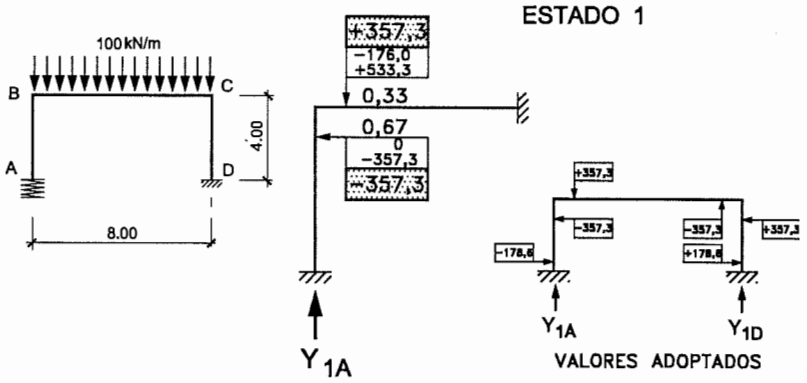


Figura 6-7

Figura 6-8

Las rigideces relativas de pilares y dintel son $\frac{R_S}{R_D} = 1$, ya que $\frac{2.000 \cdot 10^{10}}{4.000} = \frac{4.000 \cdot 10^{10}}{8.000} = 0{,}5 \cdot 10^{10}$, por lo que tomamos rigidez unidad para las tres piezas.

Realizamos en primer lugar el cálculo intraslacional, utilizando la simplificación de simetría, con rigidez de dintel 0,5 de la real (Fig. 6-8).

Los valores de las reacciones son:

$$Y_{1A} = Y_{1D} = 100 \frac{8}{2} = 400 \text{ kN}$$

Sea ahora Δ_1 el corrimiento vertical, positivo hacia arriba, del apoyo izquierdo A, que será igual para el punto B. Hagamos

$$M = \frac{6 \text{ EI } (\Delta_1)}{L^2} = 100$$

y con ese valor de los momentos primarios de empotramiento inducidos por el asiento del pilar en el dintel, se realiza el cálculo traslacional indicado en la figura 6-9, en la que se ha hecho uso de la simplificación de antimetría, con rigidez de dintel 1,5 veces la real.

Los valores de las reacciones resultan:

$$Y_{2A} = \frac{40 + 40}{8} = 10 \text{ kN}$$

$$Y_{2D} = -\frac{40 + 40}{8} = -10 \text{ kN}$$

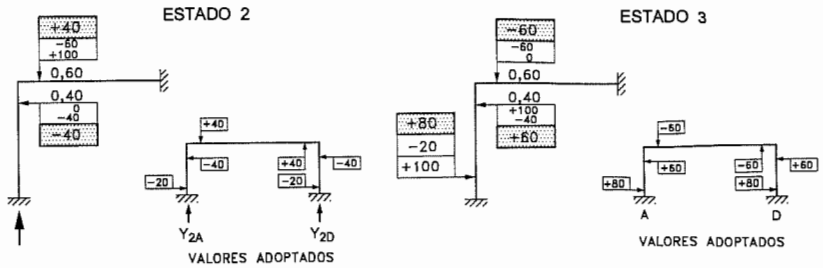


Figura 6-9

Figura 6-10

Como se observa en la figura 6-9 las reacciones horizontales del dintel contra los pilares son iguales a $-\frac{-20-40}{4} = 15$ kN cada una, es decir que la acción de los pilares sobre el dintel es de – 30 kN, lo que ocasiona la traslación del pórtico hacia la izquierda, hasta que dicha traslación neutralice la acción sobre el dintel.

Sea Δ_2 la traslación (positiva hacia la derecha) que experimente ahora el dintel. Se originarán unos momentos primarios de empotramiento en ambos pilares de valor:

$$M = \frac{6 \text{ EI } \Delta_2}{L^2}$$

Suponiendo este valor del momento igual a 100, realizamos el cálculo traslacional tal como se indica en la figura 6-10, en la que se ha hecho uso de la simplificación de antimetría.

Las reacciones resultan:

$$Y_{3A} = \frac{-60-60}{8} = -15 \text{ kN}$$

$$Y_{3D} = -\frac{-60-60}{8} = 15 \text{ kN}$$

y las reacciones horizontales del dintel contra los pilares serán iguales a $-\frac{80+60}{4} = -35$ kN cada una y la de los pilares contra el dintel 70 kN.

La reacción final Y_A será la debida a una combinación lineal de los tres estados analizados, es decir:

$$Y_A = Y_{1A} + K_1 Y_{2A} + K_2 Y_{3A}$$

donde:

K_1 es la relación $\frac{\Delta_1'}{\Delta_1}$ entre el asiento realmente experimentado por el pórtico en A, y el supuesto Δ_1.

K_2 es la relación $\frac{\Delta_2'}{\Delta_2}$ entre el corrimiento horizontal realmente experimentado por el pórtico y el supuesto Δ_2.

Por otra parte, las acciones horizontales de los pilares contra el dintel serán ahora las de los estados 2 y 3 multiplicadas por K_1 y K_2 respectivamente, y habrán de estar en equilibrio. Por lo tanto,

$$-30\,K_1 + 70\,K_2 = 0$$

y en definitiva se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} Y_A = Y_{1A} + K_1\,Y_{2A} + K_2\,Y_{3A} \\ -30\,K_1 + 70\,K_2 = 0 \\ \Delta_1' = -0{,}0005\,Y_A \end{cases} \qquad [6.3]$$

siendo $\Delta_1' = K_1\Delta_1 = K_1\dfrac{100 \cdot 8^2}{6 \cdot 40.000} = 0{,}02666\,K_1$

Resuelto el sistema [6.3] se obtiene:

$$K_1 = -7$$

$$K_2 = -3$$

$$\Delta_1' = -187 \text{ mm}$$

$$Y_A = 375 \text{ kN}$$

Los momentos se obtienen a partir de K_1 y K_2 por aplicación de la fórmula $M = M_1 + K_1 M_2 + K_2 M_3$.

6.2 APOYOS CON EMPOTRAMIENTO FLEXIBLES

Sea la estructura cualquiera de la figura 6-11 en la cual algunas piezas tales como CF y CD están empotradas flexiblemente y no rígidamente. La unión se puede visualizar suponiendo un muelle al cual están unidas las piezas en esas extremidades.

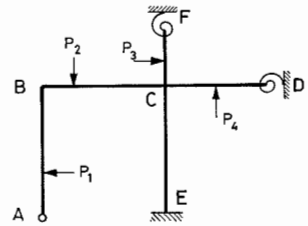


Figura 6-11

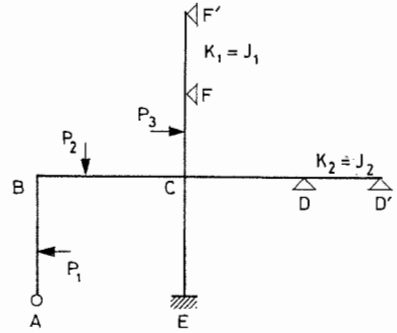


Figura 6-12

Un empotramiento flexible viene definido por una constante J (llamada usualmente constante de muelle) que define la relación constante para este tipo de enlace entre el momento aplicado y el giro producido en la extremidad de la pieza.

$$J = \frac{M}{\theta}$$

Conocida la constante J de cada empotramiento flexible, la estructura de la figura 6-11 puede sustituirse por la de la figura 6-12, resultante de prolongar las piezas con extremos flexiblemente empotrados con unas piezas articuladas en los extremos opuestos y con rigideces $K_1 = J_1$ y $K_2 = J_2$, siendo J_1 y J_2 las constantes de muelle de F y D respectivamente.

Resuelto el cálculo de la nueva estructura, los vanos FF' y DD' se suprimen, siendo los momentos en F y D los momentos elásticos finales.

La justificación de este método, que es inmediata, se da en 6.3.3.

6.3 EMPOTRAMIENTOS FLEXIBLES

En lo visto en los capítulos anteriores, se ha supuesto que los giros de todas las piezas que concurrían en un nudo, eran iguales, o dicho de otra forma, que la unión de las piezas al nudo era perfectamente rígida (Fig. 6-13 a). Existen casos[1] en que las piezas se unen a los nudos mediante elementos que permiten un cierto giro al actuar un momento en la unión. Esto se visualiza en la figura 6-13 b) concibiendo el nudo como una pieza a la que se enlazan las barras[2]. Bajo la acción de los momentos en las extremidades de las piezas se producen giros $\theta_1, \theta_2 \ldots \theta_4$ lo que origina que los giros reales de las barras sean $\theta - \theta_1, \theta - \theta_2 \ldots \theta - \theta_4$ que no resultan ya iguales entre sí.

1 Esta situación se presenta frecuentemente en estructuras metálicas y es un cambio menos frecuente en las estructuras de hormigón.

2 Obsérvese que el caso no es el mismo que se ha tratado en 6.2 que correspondía a enlaces de extremidad siendo los restantes nudos rígidos.

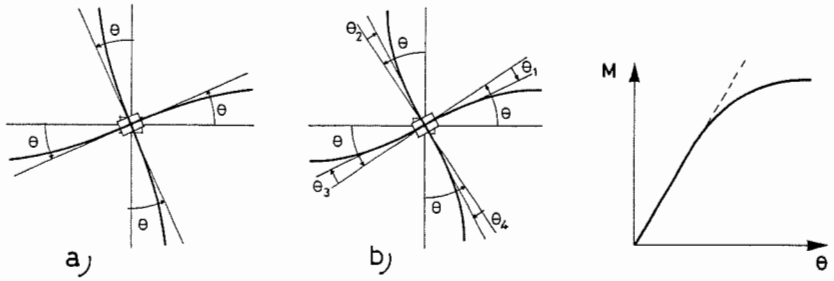


Figura 6-13

Figura 6-14

El comportamiento de una unión de la barra al nudo queda reflejado por el correspondiente diagrama momentos-giro tal como el de la figura 6-14.

Frecuentemente tales diagramas pueden reemplazarse, dentro del campo estudiado, por leyes simples y en particular por una ley lineal

$$M = J\,\theta$$

lo que supone un comportamiento hookeano para la junta entre barra y nudo. J se denomina "módulo de junta" o "constante de muelle" como vimos en 6.2.

Las estructuras con empotramientos flexibles pueden calcularse por los métodos vistos en los capítulos 4 y 5 siempre que se generalicen los conceptos de factor de transmisión, rigidez y momento de empotramiento de acuerdo con los apartados siguientes.

6.3.1 RIGIDEZ Y FACTOR DE TRANSMISIÓN EN EL CASO DE EMPOTRAMIENTOS FLEXIBLES

Sea en primer lugar, una pieza biarticulada, figura 6-15 a la que se aplica unos momentos M_f y M_d con lo que se tiene:

$$Y_f = -\frac{M_d + M_f}{L} \qquad M = M_f\frac{X}{L} - M_d\left(1 - \frac{X}{L}\right) \qquad [6.4]$$

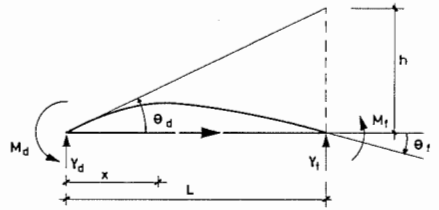


Figura 6-15

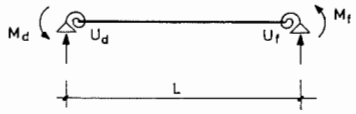


Figura 6-16

Aplicando el segundo teorema de MOHR:

$$h = -\int_L^0 (x - L)\frac{M}{EI}\,dx$$

y sustituyendo M en [6.4] e integrando, suponiendo EI constante, se obtiene:

$$\frac{h}{L} = \text{tg}\,\theta_d \approx \theta_d = M_d\,\frac{L}{3\,EI} - M_f\,\frac{L}{6\,EI} \qquad [6.5]$$

y análogamente por simetría,

$$\theta_f = M_f\,\frac{L}{3\,EI} - M_d\,\frac{L}{6\,EI} \qquad [6.6]$$

Sea ahora (Fig. 6-16) una viga biapoyada con momentos M_d y M_f aplicados en sus extremos y juntas flexibles U_d, U_f en esos extremos, que representaremos por muelles ficticios en la figura.

Los giros θ_d y θ_f producidos bajo la acción de M_d y M_f serán por un lado los proporcionados por las fórmulas [6.5] y [6.6] y por otro los ocurridos en las juntas U_d y U_f, que serán $\frac{M_d}{J_d}$ y $\frac{M_f}{J_f}$ respectivamente, con lo que los giros totales resultan:

$$\theta_d = M_d\,\frac{L}{3\,EI} - M_f\,\frac{L}{6\,EI} + \frac{M_d}{J_d} \qquad [6.7]$$

$$\theta_f = M_f\,\frac{L}{3\,EI} - M_d\,\frac{L}{6\,EI} + \frac{M_f}{J_f} \qquad [6.8]$$

6.3.1.1 Pieza biempotrada con empotramientos flexibles en los dos extremos

Supongamos ahora la pieza biempotrada con el apoyo dorsal liberado para girar y el frontal empotrado y con las dos juntas flexibles U_d y U_f (Fig. 6-17) y apliquemos un momento M_d en el extremo dorsal, lo que provocará la aparición de un momento M_f como respuesta en el apoyo frontal.

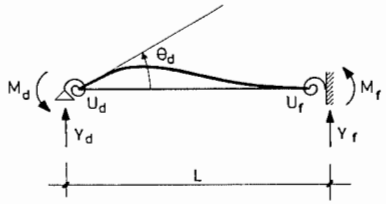


Figura 6-17

Como ha de ser $\theta_f = 0$, de [6.8] se obtiene:

$$M_f\left(\frac{L}{3\,EI}+\frac{1}{J_f}\right)=M_d\frac{L}{6\,EI}$$

luego:

$$\frac{M_f}{M_d}=\beta_{df}=\frac{\frac{L}{6EI}}{\frac{L}{3EI}+\frac{1}{J_f}}$$

o bien llamando $\frac{EI}{L\,J_f}=\eta_f$; $\frac{EI}{L\,J_d}=\eta_d$

$$\beta_{df}=\frac{1}{2+6\,\eta_f} \qquad [6.9]$$

y análogamente

$$\beta_{fd}=\frac{1}{2+6\,\eta_d} \qquad [6.10]$$

que son los factores de transmisión para la pieza biempotrada con empotramientos flexibles en los dos extremos.

De [6.7] y teniendo en cuenta que $\frac{M_f}{M_d}=\frac{1}{2+6\,\frac{EI}{J_f\,L}}$

Se tiene:

$$\theta_d = M_d\frac{L}{3\,EI}+\frac{M_d}{J_d}-\frac{M_d}{2+6\,\frac{EI}{J_f\,L}}\cdot\frac{L}{6\,EI}$$

y operando:

$$\frac{M_d}{\theta_d}=K_d=\frac{4\,EI}{L}\cdot\frac{1+3\,\eta_f}{1+4\,(\eta_d+\eta_f+3\,\eta_d\eta_f)} \qquad [6.11]$$

y análogamente por simetría:

$$K_f=\frac{4\,EI}{L}\cdot\frac{1+3\,\eta_d}{1+4\,(\eta_d+\eta_f+3\,\eta_d\eta_f)} \qquad [6.12]$$

que son las rigideces para la misma pieza.

6.3.1.2 Pieza biempotrada con empotramiento flexible en un extremo

Si en el extremo dorsal (Fig. 6-18) no hay junta flexible esto es lo mismo que suponer que la junta dorsal del caso anterior es infinitamente rígida, es decir que en la relación $\theta=\frac{M}{J_d}$, θ es nulo para cualquier valor de M, lo que equivale a suponer $J_d=\infty$, o lo que es lo mismo $\eta_d = 0$, y sustituyendo en [6.9] [6.10] se tienen los valores de los factores de transmisión.

$$\beta_{df}=\frac{1}{2+6\,\eta_f} \qquad [6.13]$$

$$\beta_{fd}=\frac{1}{2} \qquad [6.14]$$

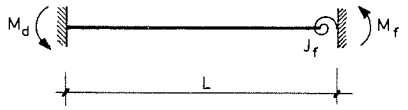


Figura 6-18

Figura 6-19

Análogamente sustituyendo $\eta_d = 0$ en [6.11] [6.12] se tienen los valores de las rigideces

$$K_d=\frac{4\,EI}{L}\cdot\frac{1+3\,\eta_f}{1+4\,\eta_f} \qquad [6.15]$$

$$K_f=\frac{4\,EI}{L}\cdot\frac{1}{1+4\,\eta_f} \qquad [6.16]$$

6.3.1.3 Pieza articulada con empotramiento flexible

En este caso basta hacer $J_f = 0$ o sea $\eta_f = \infty$, en [6.9] y se obtiene:

$$\beta_{df}=0 \qquad [6.17]$$

y análogamente sustituyendo $\eta_f = \infty$ en [6.11] se tiene:

$$K_d=\frac{3\,EI}{L}\cdot\frac{1}{(1+3\,\eta_d)} \qquad [6.18]$$

6.3.2 MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO DE LA PIEZA BIEMPOTRADA CON EMPOTRAMIENTOS FLEXIBLES EN AMBOS EXTREMOS Y SOMETIDA A CARGA UNIFORMEMENTE REPARTIDA SOBRE TODA LA LUZ

Sea en primer lugar la pieza biarticulada sometida a la carga uniformemente repartida. Hallemos los ángulos $\theta_d = -\theta_f$ en los extremos de la deformada (Fig. 6-20).

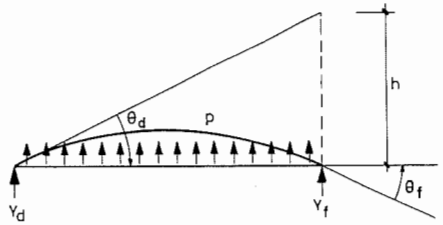


Figura 6-20

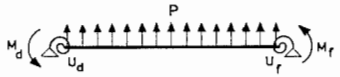


Figura 6-21

Aplicando el segundo teorema de MOHR:

$$h = -\int_L^0 (x - L)\,\frac{M}{EI}\,dx$$

y con $M = \frac{Px}{2}(x - L)$ y suponiendo EI = cte

$$h = \frac{P}{2\,EI}\int_0^L x\,(x - L)^2\,dx = \frac{PL^4}{24\,EI}$$

$$tg\,\theta_d \approx \theta_d = \frac{h}{L} = \frac{PL^3}{24\,EI} \qquad [6.19]$$

y por tanto

$$\theta_f = \frac{-PL^3}{24\,EI} \qquad [6.20]$$

Teniendo en cuenta que en la pieza con empotramientos flexibles sometida a carga uniformemente repartida los giros en los extremos son iguales a la pieza sin empotramientos flexibles ya que los momentos flectores en los extremos son nulos, los giros cuando actúan en la pieza los momentos en los extremos vienen dados por la suma de las expresiones [6.7] y [6.19] para el giro dorsal y [6.8] y [6.20] para el frontal, es decir (Fig. 6-21).

$$\theta_d = M_d\,\frac{L}{3\,EI} - M_f\,\frac{L}{6\,EI} + \frac{M_d}{J_d} + \frac{PL^3}{24\,EI} \qquad [6.21]$$

$$\theta_f = M_f\,\frac{L}{3\,EI} - M_d\,\frac{L}{6\,EI} + \frac{M_f}{J_f} - \frac{PL^3}{24\,EI} \qquad [6.22]$$

La condición de empotramiento se obtiene anulando [6.21] y [6.22] y resolviendo el sistema en M_d, M_f.

Haciendo $\frac{EI}{L\,J_d} = \eta_d$, $\frac{EI}{L\,J_f} = \eta_f$ la solución resulta:

$$M_f = \frac{PL^2}{4}\cdot\frac{1 + 6\,\eta_d}{4\,(1 + 3\,\eta_d)\,(1 + 3\,\eta_f) - 1} \qquad [6.23]$$

$$M_d = -\frac{PL^2}{4}\cdot\frac{1 + 6\,\eta_f}{4\,(1 + 3\,\eta_d)\,(1 + 3\,\eta_f) - 1} \qquad [6.24]$$

Para pieza simétrica, es decir, para $\eta_d = \eta_f = \eta$

$$M_f = \frac{PL^2}{12}\cdot\frac{1}{1 + 2\,\eta} \qquad [6.25]$$

$$M_d = \frac{-PL^2}{12}\cdot\frac{1}{1 + 2\,\eta} \qquad [6.26]$$

6.3.3 MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO DE LA PIEZA CON EMPOTRAMIENTOS FLEXIBLES SOMETIDA A CARGAS CUALESQUIERA

El método anteriormente expuesto para calcular los momentos de empotramiento de una viga con empotramientos flexibles es bastante laborioso.

Para aplicaciones numéricas concretas un método simple es el que exponemos a continuación:

Sea una viga biempotrada (Fig. 6-22 a) con empotramientos flexibles en sus extremos U_d, U_f y sometida a un tren de cargas (P, M, q). Podemos reemplazar la pieza BC por una viga continua ABCD (Fig. 6-22 b) obtenida suprimiendo los empotramientos flexibles y añadiendo dos vanos con los extremos opuestos articulados y de rigidez $K_1 = J_d$ y $K_2 = J_f$ respectivamente. Con ello cualquier momento M aplicado en el extremo B de BC producirá un giro del nudo B (y por tanto del extremo B) igual a $\frac{M}{K_1}$ o sea igual a $\frac{M}{J_d}$. Análogamente el giro para el extremo C será $\frac{M}{J_f}$.

Resuelta la viga continua ABCD, los momentos en B y C son los momentos de la viga BC con empotramientos flexibles.

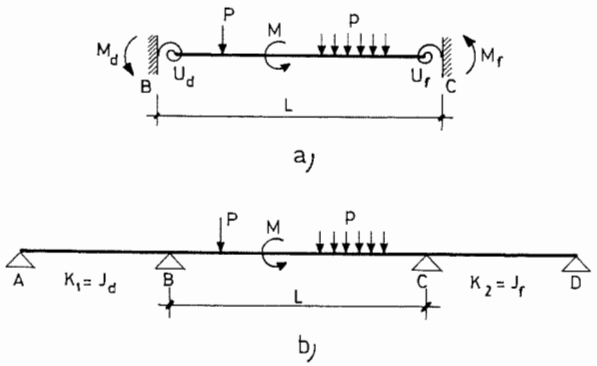


Figura 6-22

El método se generaliza inmediatamente al caso en que haya junta flexible en un solo extremo, algún extremo articulado, etc.

6.3.4 MOMENTOS INDUCIDOS EN UNA VIGA CON EMPOTRAMIENTOS FLEXIBLES POR LA TRASLACIÓN DE UN APOYO

6.3.4.1 Viga biempotrada con empotramientos flexibles en ambos extremos

Vimos según [4.2] [4.3] que

$$M_d = (K_d + \beta_{fd}\, K_f)\, \frac{\Delta}{L} \qquad [6.27]$$

$$M_f = (K_f + \beta_{df}\, K_d)\, \frac{\Delta}{L} \qquad [6.28]$$

Sea ahora la viga de la figura 6-23 con empotramientos flexibles U_d, U_f sometida a una traslación Δ de apoyo.

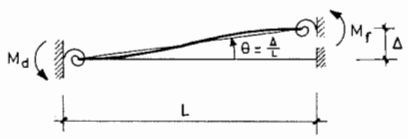


Figura 6-23

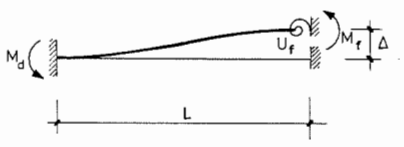


Figura 6-24

Sustituyendo en [6.27] y [6.28] los valores de K_d, K_f, β_{df} y β_{fd} obtenidos en [6.11], [6.12], [6.9] y [6.10] y simplificando se obtiene:

$$M_d = \frac{6\,EI\,\Delta}{L^2} \cdot \frac{1 + 2\,\eta_f}{1 + 4\,(\eta_d + \eta_f + 3\,\eta_d\eta_f)} \qquad [6.29]$$

$$M_f = \frac{6\,EI\,\Delta}{L^2} \cdot \frac{1 + 2\,\eta_d}{1 + 4\,(\eta_d + \eta_f + 3\,\eta_d\eta_f)} \qquad [6.30]$$

Si los dos empotramientos son iguales $\eta_d = \eta_f = \eta$ y se obtiene:

$$M_d = M_f = \frac{6\,EI\,\Delta}{L^2} \cdot \frac{1}{1 + 6\,\eta} \qquad [6.31]$$

6.3.4.2 Viga biempotrada con empotramiento flexible en un solo extremo

En este caso (Fig. 6-24) según lo visto anteriormente basta sustituir en [6.27] y [6.28] los valores [6.13], [6.14], [6.15] y [6.16] y se obtiene:

$$M_d = \frac{6\,EI\,\Delta}{L^2} \cdot \frac{1 + 2\,\eta_f}{1 + 4\,\eta_f}$$

$$M_f = \frac{6\,EI\,\Delta}{L^2} \cdot \frac{1}{1 + 4\,\eta_f}$$

6.3.4.3 Pieza articulada con empotramiento flexible

Sea la pieza de la figura 6-25 con un extremo articulado y el otro con junta flexible.

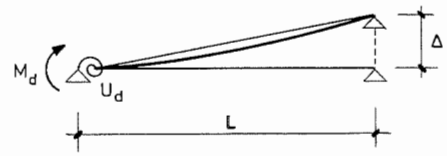


Figura 6-25

De la definición de rigidez y del valor [6.18] se obtiene:

$$\frac{M_d}{\frac{3\,EI}{L} \cdot \frac{1}{1 + 3\,\eta_d}} = \theta = \frac{\Delta}{L}$$

de donde $M_d = \dfrac{3\,EI\,\Delta}{L^2} \cdot \dfrac{1}{1 + 3\,\eta_d}$

CAPÍTULO 7

INTERACCIÓN DE ENTRAMADOS

7.1 FUNCIÓN CONECTADORA DE LOSAS Y FORJADOS

En el Capítulo 5, hemos supuesto siempre que el entramado está aislado. En los edificios usuales, la situación suele ser muy diferente, ya que los forjados, unidos monolíticamente a los dinteles de los entramados, interconectan a éstos.

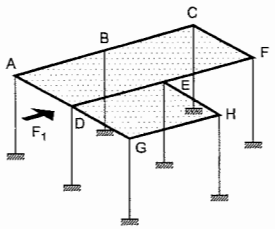


Figura 7-1

La figura 7-1 muestra como ejemplo el caso de una estructura de un edificio de una planta con tres entramados paralelos, los ABC y DEF de dos vanos y el GH de un vano, interconectados por el forjado de techo. Una fuerza F_1, actuando sobre el nudo D del entramado DEF, es evidente que no solamente es resistida por ese entramado, sino que, a través del forjado, se reparte también a los ABC y GH. Lo anterior presupone que el forjado es concebido correctamente y que sus detalles constructivos y en especial sus enlaces a los dinteles, son diseñados de forma que sean capaces de resistir y transmitir los esfuerzos que la función interconectadora entraña. Si esto es así, el forjado, en la mayoría de los casos, puede ser considerado como infinitamente rígido en su plano y la función interconectadora entre entramados la establece funcionando como un cuerpo rígido, que se traslada y gira sin deformarse. (7.1), (7.2).

Naturalmente, en el caso de entramados iguales situados en planos paralelos y sometidos cada uno de ellos a sistemas de fuerzas idénticos, las deformaciones de todos los entramados son las mismas, la interacción entre entramados es nula y, por tanto, el forjado no realiza ninguna función de interconexión

7.2. CÁLCULO DE LAS FUERZAS DE INTERACCIÓN

Sean los entramados 1, 2, 3, ... n de la figura 7-2. Aunque, por simplificación de la figura, los entramados figuran como de un vano y una planta, deben ser concebidos como de un número de vanos variable de unos a otros y un número de plantas también variable de unas zonas a otras del edificio. Suponiendo, en general, que sea m el número de vanos y p el de plantas, llamemos X a las fuerzas resultantes de la interacción en cada dintel y δ a los corrimientos finales.

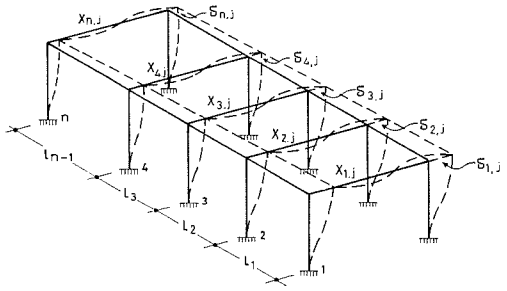


Figura 7-2

Designaremos con $\delta^{o}_{i,j}$ el corrimieto en el pórtico i, del dintel de la planta j, debido a las fuerzas exteriores aplicadas a dicho dintel.

Designaremos como $\delta^{k}_{i,j}$ al corrimiento en el entramado i, del dintel de la planta j, debido a una fuerza unidad actuando en el dintel de la planta k del mismo entramado[1]. Análogamente, X^{k}_{i} designa la fuerza de la interacción en el dintel de la planta k del entramado i.

Llamando $\delta_{i,j}$ al corrimiento total del dintel de la planta j del entramado i, se tiene:

$$\delta_{i,j} = \delta^{o}_{i,j} + \sum_{k=1}^{k=p} X^{k}_{i}\,\delta^{k}_{i,j} \qquad [7.1]$$

Podemos considerar un sistema lineal formado por:

Incógnitas:

$X^{k}_{i} \rightarrow$ np [2]
(tantas como dinteles)

1 El cáculo de los valores de $d^{k}_{i,j}$ aunque muy laborioso, no ofrece dificultad de acuerdo con lo visto anteriormente.

2 El valor de np corresponde al caso en que todos los pórticos tienen el mismo número de plantas. En realidad hay tantas incógnitas como dinteles.

Ecuaciones:

Condición de linealidad de los corrimientos, al considerarse el forjado como un sólido rígido que experimenta por tanto corrimientos y giros pero no deformaciones en su plano.

En la planta k podemos expresar la condición

$$\frac{\delta_{1,j}-\delta_{2,j}}{l_1} = \frac{\delta_{2,j}-\delta_{3,j}}{l_2} = \cdots = \frac{\delta_{n-1,j}-\delta_{n,j}}{l_{n-1}}$$

por tanto, n-2 ecuaciones.

En el total p de plantas → (n-2)p ecuaciones.

Por otra parte, en cada planta el conjunto de fuerzas paralelas X^{k}_{i} ha de estar en equilibrio, lo que supone dos ecuaciones por planta[1].

En el total p de plantas → 2 p ecuaciones.

Total de ecuaciones → np.

En general, tenemos por tanto un sistema de np ecuaciones con np incógnitas[2].

El tratamiento aquí expuesto no deja de introducir simplificaciones importantes, ya que concibiendo la estructura del edificio, como lo que realmente es, habría que tener en cuenta las torsiones de vigas y pilares. La complejidad que esto introduce es tal que el cálculo sólo puede resolverse mediante los métodos expuestos en el Capítulo 13, en especial los rogramas expuestos en 13.6.

7.3. CÁLCULO DE LOS ENTRAMADOS

Conocidos los valores de X, es posible ahora proceder a la determinación de esfuerzos de acuerdo con lo expuesto en el Capítulo 5.

Es claro que la aparición de fuerzas X de interconexión no es debida sólo a la existencia de fuerzas exteriores paralelas a los dinteles, sino, en general, a cualquiera de las causas de traslacionalidad analizadas en el Capítulo 5.

También es evidente que el alto grado de hiperestatismo que el problema presenta hace que su cálculo manual sea inabordable, salvo en el caso particular de estructuras de muy reducido número de entramados y plantas. Como veremos más adelante, aquí el cálculo mediante ordenador se impone claramente.

7.4. CASO PARTICULAR DE EDIFICIOS MUY ALARGADOS

En lo anterior, hemos supuesto el forjado como sólido rígido, debido a que hemos aceptado que su rigidez en su plano podía ser considerada como infinita. Esto es cierto en la inmensa mayoría de los edificios, pero no lo es siempre.

1 Obsérvese que, en la condición de equilibrio, entran no sólo el conjunto de incógnitas X^{k}_{i}, sino también las acciones directas aplicadas en el plano de cada entramado y contenidas en el plano de cada forjado de planta.

2 Si los entramados no tienen todos el mismo número de plantas, *el sistema tiene un número de incógnitas y ecuaciones igual al de dinteles.*

En la figura 7-3 se indica la planta de un edificio con dimensiones 6,50 x 45,40 m en planta. Los entramados son de un solo vano y los extremos tienen pilares mucho más rígidos que los restantes. La relación de dimensiones en planta alcanza el valor 7,5. El forjado no puede considerarse como un sólido infinitamente rígido en su plano. El reparto de una acción F como la de la figura no podría basarse por tanto en tal hipótesis y sería más correcto considerar el forjado como una viga sobre apoyos elásticos en los entramados, de acuerdo con lo expuesto en el Capítulo 6. En la práctica, la necesidad de disponer juntas de dilatación evita que la relación de dimensiones en planta de los forjados alcance valores tan altos.

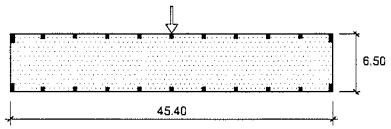


Figura 7-3

7.5. FUNCIONAMIENTO DEL FORJADO EN SU PLANO (ACCIÓN DIAFRAGMA)

En sentido estricto, el forjado funciona en su plano como una viga de gran canto, sometida al conjunto de acciones X_i. En la práctica, este cálculo no es necesario, salvo casos excepcionales, y los espesores mínimos y armaduras mínimas previstos en los Capítulos 52, 53 y 54 aseguran el funcionamiento, siempre que se cuiden los detalles de enlace del forjado a los pilares y pantallas. Existe muy poca investigación sobre el tema (7.3).

A pesar de que en algunos países se han empleado forjados con losa superior, o con losa de muy escaso espesor, no se conoce ninguna exprerienciа de forjados por fallo en su acción de diafragma.

BIBLIOGRAFÍA

(7.1.) ARENAS DE PABLO, J.J.; CUVILLO, R. del y RIPOLL, J.B. "Forjados". Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Madrid. 1976.

(7.2.) CALAVERA, J. "Cálculo, Construcción y Patología de Forjados de Edificación". INTEMAC. Madrid, 4.ª Edición, 1988.

(7.3.) IGLESIAS, J. "Determinación de la rigidez en su plano de pisos formados por viguetas y bovedillas". Universidad Autónoma de Méjico, 1990. (Trabajo no publicado).

CAPÍTULO 8

MÉTODOS SIMPLIFICADOS DE CÁLCULO DE ESTRUCTURAS BAJO ACCIONES VERTICALES Y HORIZONTALES. CÁLCULO DE ENTRAMADOS BAJO ACCIONES DE VIENTO Y SISMO. FLEXIONES NORMALES A LOS ENTRAMADOS

8.1 TIPOS DE SIMPLIFICACIONES

En los apartados 4.3.10 y 4.3.11, vimos las simplificaciones por simetría y antimetría. Estas simplificaciones tienen una base rigurosa y conducen, naturalmente, a la misma solución que el cálculo realizado sobre la estructura completa. Hemos visto su interés, realmente importante, en los capítulos anteriores. Su inconveniente es que reducen el número de piezas a considerar aproximadamente a la mitad. Cuando se trata de grandes estructuras, con muchos vanos y pisos, el número de piezas, aún con esta simplificación, sigue siendo muy grande.

En lo que sigue expondremos métodos que permiten simplificaciones mucho mayores. Posteriormente, en el Capítulo 15, veremos los métodos aproximados. Como la terminología es convencional, la precisamos a continuación:

Entendemos por *método simplificado* el que conduce a una solución sensiblemente igual a la teórica.

Llamaremos *método aproximado* al que conduce a una solución diferente de la teórica pero también válida.

8.2 SIMPLIFICACIONES PARA EL CASO DE ENTRAMADOS CON VANOS DE LUCES IGUALES SOMETIDOS A CARGAS VERTICALES

Consideremos en primer lugar el entramado de la figura 8-1, cuyos dinteles están sometidos a cargas iguales en todos los vanos y supongamos que todos los dinteles tienen la misma sección, que los pilares son de sección constante en todas las plantas y que el entramado tiene un número infinito de vanos y de pisos, extendiéndose en las tres direcciones indicadas por flechas en la figura. (Ver referencia (8.1)).

Si consideramos las cuatro piezas coincidentes con el nudo B, es claro que existe, respecto a las mediatrices de los pilares BD y BE, simetría de forma y antimetría de carga. Respecto a las mediatrices de los vanos AB y BC, la situación es de simetría, de forma y carga. Para todos los nudos análogos y para sus piezas concurrentes, la simplificación es por tanto la indicada en la figura 8-2, consistente en tomar como luces la mitad de las de dinteles y pilares y como rigideces la mitad y vez y media las reales, respectivamente.

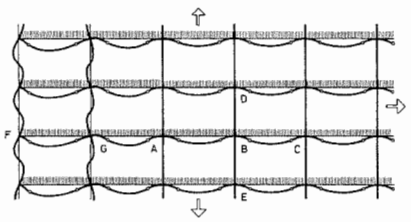


Figura 8-1

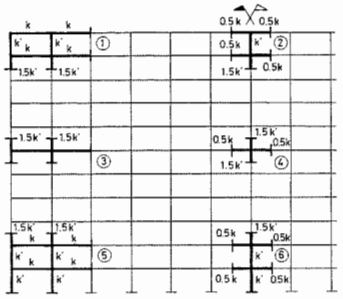


Figura 8-2

Para la zona próxima a fachada, tal como el dintel FG, la perturbación introducida por tal discontinuidad se puede compensar tomando dos vanos con el segundo perfectamente empotrado en el extremo opuesto y antimetría en pilares, tal y como se indica en la figura 8-2.

En los casos de azotea y primera planta y por análogos motivos, se toman los entramados reducidos que se indican también en la misma figura.

En definitiva aparecen seis tipos de entramados reducidos, tres de fachada, uno de zona central de azotea, otro de zona central de planta baja y uno general. Cada entramado reducido de los tipos ②, ④ y ⑥ es válido en todo su nivel, excepto en las zonas cubiertas por ①, ③ y ⑤. Cada entramado reducido del tipo ③ y ④ y las zonas asimiladas a ellos es válido en todas las alturas excepto en las zonas específicamente cubiertas por ①, ②, ⑤ y ⑥.

La figura 8-3 representa el mismo entramado, pero sometido a un caso de carga alternada en vanos y pisos. Si se considera un dintel tal como el CD, existe respecto a él simetría de forma y antimetría de carga y, análogamente, ocurre respecto a cualquier

dintel, por lo que la zona ABCD de la figura 8-3 puede reemplazarse por el entramado virtual ④ de la figura 8-4. Consideraciones análogas a las realizadas para el caso de la figura 8-2 conducen al establecimiento de los seis entramados reducidos indicados en la figura 8-4, con sus correspondientes zonas de aplicación.

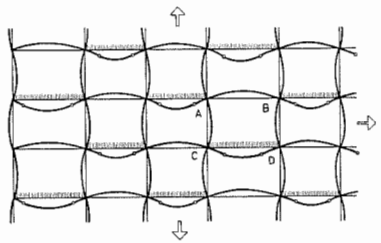


Figura 8-3

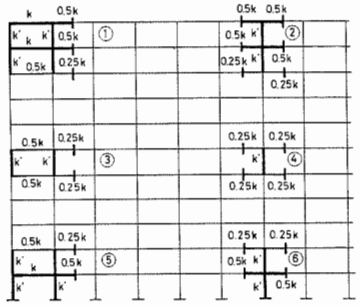


Figura 8-4

Obsérvese que la reducción de entramados de 8-4 es también aplicable al caso de carga mostrado en 8-1 (aunque la reducción de 8-2 es más interesante), mientras que la reducción de 8-2 no es aplicable al caso de carga 8-3.

Recuérdese, para el establecimiento de acciones e interpretaciones de resultados en los casos de simetría y antimetría, lo dicho en 4.10 y 4.11, que se resumió en la tabla 4.1.

Las simplificaciones expuestas presuponían que todos los dinteles eran iguales. Esta es una hipótesis cada vez más cierta, pues razones de simplificación constructiva y de diseño general del edificio llevan a esa uniformidad de dinteles. También se presuponía la constancia de sección de los pilares en toda la altura, con objeto de mantener la simetría geométrica respecto a ejes horizontales, y esto, naturalmente, no se cumple más que en edificios de muy pocas plantas. Sin embargo, los errores introducidos por esa variación son pequeños y una práctica habitual es la siguiente:

Sea el entramado de la figura 8-5, con los entramados reducidos que allí se indican. Usualmente se armarán todos los dinteles igual, con los máximos momentos de vano y apoyo encontrados en los entramados reducidos. Excepcionalmente, las plantas 1 y n pueden armarse de forma distinta, uniformando el resto de los dinteles. En edificios de gran número de plantas, puede emplearse un dintel tipo, por ejemplo, desde las plantas 2 a p-1 y otro desde la p hasta azotea. Rara vez se organizan más secuencias de dinteles.

Para el dimensionamiento de pilares, conocemos los momentos en las plantas 1, 2, p, n-1 y n. Desde la planta 2 a la p, los momentos pueden suponerse variando linealmente y análogamente desde la p a la n-1.

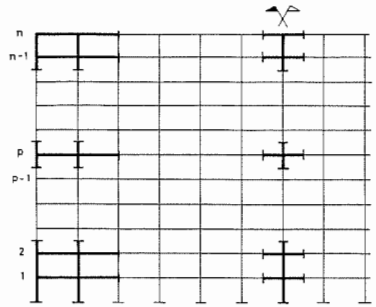


Figura 8-5

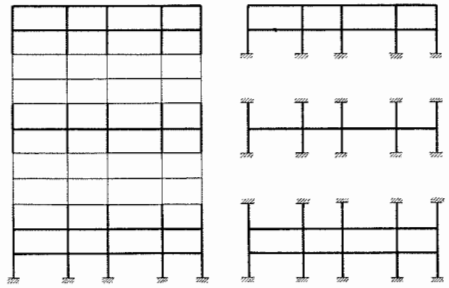


Figura 8-6

8.3 SIMPLIFICACIÓN PARA EL CÁLCULO DE ENTRAMADOS EN GENERAL, SOMETIDOS A CARGAS VERTICALES

En general, las cargas sobre un dintel tienen una influencia pequeña sobre otros dinteles. Por este motivo, una simplificación razonable es la indicada en la figura 8-6. Prescindiendo ahora de exigir condición alguna de simetrías o antimetrías, ni de igualdad de luces, el entramado se analiza descomponiéndolo en tres zonas. En la intermedia, el entramado reducido está formado por un solo dintel, con los pilares de los dos pisos contiguos, que para el cálculo se suponen empotrados en sus extremos opuestos. Con esto, se obtienen fácilmente los momentos del dintel y los de las secciones inferiores de los pilares superiores y superiores de los pilares inferiores.

En la zona superior se toman dos dinteles para reducir los efectos de la discontinuidad y análogamente se hace en la zona inferior. Para uniformidad de dinteles e interpolación de momentos en pilares para calcular los de todas las plantas, vale lo dicho en 8.2.

Estrictamente hablando, este método debe considerarse como intermedio entre los simplificados y los aproximados, pero hemos preferido incluirlo aquí por razones que más adelante veremos.

Aparte de su interés para el cálculo general de entramados, el análisis de dinteles aislados, suponiendo sus soportes empotrados en los extremos opuestos, es de enorme utilidad en cálculos rápidos de comprobación.

8.4 SIMPLIFICACIÓN PARA EL CASO DE CARGAS HORIZONTALES. MÉTODO A

El método general conduce, como vimos en 5.1.4.3.1. (Método A) a un sistema lineal de n ecuaciones con n incógnitas, lo que naturalmente, para entramados de muchas plantas resulta inabordable salvo que se realice el cálculo mediante ordenador. Sin embargo, es posible realizar una simplificación importante. Consideramos el entramado de la figura 8-7.

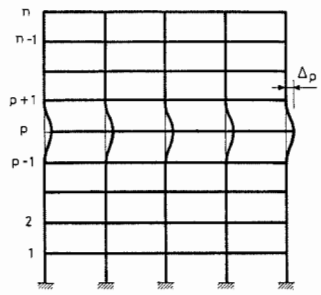


Figura 8-7

Puede aceptarse que el corrimiento Δp del dintel de la planta p afecta de manera apreciable solamente a los dinteles contiguos, es decir a los de las planta p-1 y p+1, y que su efecto es despreciable en las otras. Si con esta base consideramos de nuevo el sistema general de ecuaciones planteado en [5.15] y [5.16], se transforma en:

$$\frac{K_1}{100}\sum_1^m y^1_{i,1} + \frac{K_2}{100}\sum_1^m y^2_{i,1} = \sum_1^n F_i$$

$$\frac{K_1}{100}\sum_1^m y^1_{i,2} + \frac{K_2}{100}\sum_1^m y^2_{i,2} + \frac{K_3}{100}\sum_1^m y^3_{i,2} = \sum_2^n F_i$$

$$\frac{K_{n-2}}{100}\sum_1^m y^{n-2}_{i,n-1} + \frac{K_{n-1}}{100}\sum_1^m y^{n-1}_{i,n-1} + \frac{K_n}{100}\sum_1^m y^{n}_{i,n-1} = \sum_{n-1}^n F_i$$

$$\frac{K_{n-1}}{100}\sum_1^m y^{n-1}_{i,n} + \frac{K_n}{100}\sum_1^m y^{n}_{i,n} = F_n \qquad [8.1]$$

y como los valores $y^k_{i,j}$ son conocidos, el sistema [8.1] toma la forma:

$$\begin{aligned} a_1 K_1 + b_1 K_2 &= \alpha_1 \\ a_2 K_1 + b_2 K_2 + c_2 K_3 &= \alpha_2 \\ \cdots\quad b_3 K_2 + c_3 K_3 + d_3 K_4 &= \alpha_3 \\ \cdots\quad \cdots\quad \cdots\quad

En el sistema [8.2] a_1, a_2 ... b_1, b_2 ... t_{n-1}, t_n y α_1, α_2 ... α_n son coeficientes y K_1, K_2 ... K_n incógnitas. El sistema permite una resolución manual razonablemente simple para edificios de no muchas plantas y una resolución sencillísima, incluso con microordenadores, para cualquier número de plantas.

Obtenidos los valores de K_1, K_2 ... K_n, los esfuerzos se calculan de forma inmediata mediante las expresiones [5.17].

8.5 SIMPLIFICACIÓN PARA EL CASO DE CARGAS HORIZONTALES. MÉTODO B.

Sea el entramado de n plantas de la figura 8-8 a). Una simplificación muy aproximada para el cálculo de los esfuerzos debidos a acciones horizontales F_1, F_2... F_n es la que se expone a continuación.

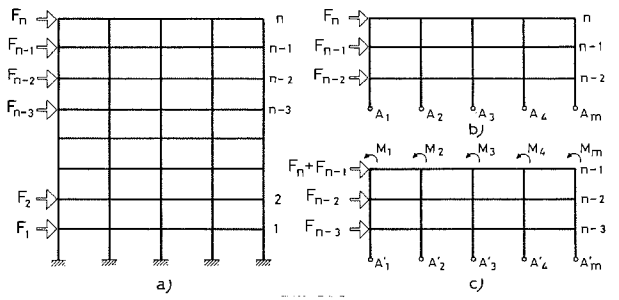


Figura 8-8

Consideramos en primer lugar el entramado reducido (figura 8-8 b)) formado por las tres últimas plantas, n, n-1 y n-2, y supongamos la existencia de una serie de articulaciones A_1, A_2 ... A_m a la mitad de la altura de los pilares situados bajo la planta n-2. Este entramado reducido puede ser resuelto con facilidad, incluso manualmente. De los esfuerzos resultantes, adoptaremos solamente los correspondientes a la planta n.

A continuación, descendemos una planta y adoptamos el entramado reducido indicado en la figura 8-8 c), correspondiente a las tres plantas siguientes, n-1, n-2 y n-3, cuidando de añadir en el dintel superior la acción F_n, correspondiente a la resultante de las acciones horizontales de la planta n sobre el dintel superior, que es ahora el de la planta n-1, así como los momentos M_1, M_2 ... M_m que la estructura superior ejerce sobre los nudos del dintel superior de la considerada. De nuevo suponemos una serie de articulaciones A'_1, A'_2 ... A'_m en la mitad de la altura de los pilares bajo la planta n-3. Del cálculo resultante, adoptamos de nuevo solamente los esfuerzos de la planta superior, que es ahora la n-1.

Repitiendo sucesivamente el proceso, se calcula el entramado completo, con un elevado grado de precisión, mediante la resolución de n sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas.

8.6 CÁLCULO DE ENTRAMADOS BAJO ACCIONES DE VIENTO Y SISMO

La aplicación más frecuente de lo visto anteriormente en 8.4 y 8.5 es el cálculo de entramados bajo acciones de viento y sismo.

En la realidad, el viento actúa sobre las fachadas del edificio y la transmisión de esfuerzos de los elementos de fachada a la estructura es compleja y depende esencialmente del tipo de fachada y de su enlace a la estructura. La práctica habitual consiste en aplicar a cada nudo de fachada una acción igual a la semisuma de las alturas de los pisos superior e inferior multiplicada por la separación entre pórticos y por la presión unitaria del viento. En la fachada de sotavento, la presión se sustituye por la succión. La suma de acciones de presión y succión es en definitiva una fuerza horizontal aplicada a cada dintel.

Por supuesto, dependiendo del tipo de fachada, la presión y la succión del viento pueden transmitirse previamente a los soportes y de éstos a los nudos. Aún en este caso, la flexión directa en los soportes suele ser despreciable.

En el caso de acciones sísmicas, las fuerzas se suponen aplicadas en los nudos, de acuerdo con lo previsto en la Norma Sismo-Resistente NCS (8.3).

El cálculo frente a acciones sísmicas es idéntico al del viento, si bien su incidencia sobre la estructura tiene una diferencia conceptual importante. Si se consideran los entramados indicados en la figura 8-9, el a) representa un entramado esbelto sometido a acciones p de presión y s de succión. La figura 8-9 b) representa un entramado de la misma altura y número de plantas, pero de gran número de vanos y, por lo tanto, muy poco esbelto. Sin embargo, ambos entramados están sometidos a la misma acción p de presión y s de succión. Como es lógico, los esfuerzos producidos en el entramado b) serán mucho menores que en el a), ya que las acciones horizontales se reparten entre un número de vanos y pilares mucho mayor.

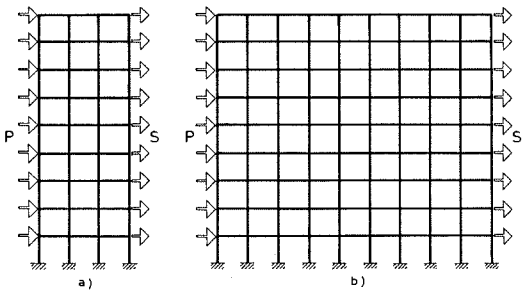


Figura 8-9

En cambio, si consideramos ambos entramados sometidos a una acción sísmica, el mayor número de vanos del entramado b) supone, respecto al a), un incremento prácticamente proporcional de las acciones sísmicas y, por tanto, los esfuerzos resultantes serán sensiblemente iguales. Desde el punto de vista de la acción sísmica,

la única diferencia entre ambos entramados puede consistir en su diferente respuesta a la acción dinámica, tema que analizaremos en el Capítulo 67.

Por supuesto, en todo lo considerado anteriormente se ha estudiado el cálculo de entramados sometidos a acciones horizontales, tenida en cuenta la interacción de entramados, de acuerdo con lo visto en el Capítulo 7. *En el caso de este apartado 8.6, las acciones de viento p o de sismo s, están a su vez sujetas a los reajustes entre entramados de acuerdo con la interacción introducida entre ellos por la presencia de los forjados, y, naturalmente, es errónea la práctica de atribuir a cada entramado la acción sobre la franja de edificio que le es geométricamente asignable.*

8.7 CASO PARTICULAR DE ACCIONES HORIZONTALES EN SENTIDO PERPENDICULAR AL PLANO MEDIO DEL ENTRAMADO

En los apartados anteriores, hemos supuesto que las acciones horizontales se ejercían en el plano medio del entramado, coincidiendo con las directrices de los dinteles. En algunos casos, se presenta en la práctica una situación diferente. Un caso frecuente es el indicado en la figura 8-10, que representa en planta un edificio alargado con entramados paralelos a las fachadas de mayor longitud, excepto los 1, 9, 17 y 8, 16, 24 dispuestos en sentido perpendicular. Si se suponen acciones horizontales H_j, es evidente que los forjados, actuando como vigas horizontales, no transmitirán todas las acciones a los entramados 1, 9, 17 y 8, 16, 24, sino que una parte apreciable se transmitirá a los pilares restantes.

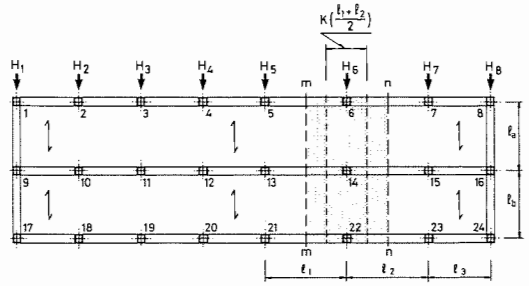


Figura 8-10

El problema que se nos presenta es que, si pretendemos analizar esto considerando un conjunto de tres pilares, tales por ejemplo como los 6, 14, 22, no están enlazados por vigas en cada piso, como vimos hasta ahora. Es cierto que están enlazados por los forjados, pero cabe la duda lícita de si todo el ancho de forjado entre mediatrices de vanos contiguos m-m y n-n debe ser considerado, a efectos de adoptar un "dintel virtual" de forjado, que a su vez forme parte de un "pórtico virtual" que pueda ser calculado mediante los métodos anteriormente expuestos.

Una solución de este problema se obtiene mediante la generalización de la teoría de los forjados sin vigas. Su deducción en detalle puede verse en el Capítulo 19. En lo que sigue nos limitamos a reseñar las fórmulas utilizables.

El problema esencial es estimar el ancho eficaz para acciones horizontales. Dicho ancho es K $(\frac{\ell_1 + \ell_2}{2})$,donde el valor K viene dado en 19.4.2. (Valor de μ en el método de PARME o valor de μ, de los gráficos de DARWALL y ALLEN, respectivamente). Este ancho es siempre inferior al físico $(\frac{\ell_1 + \ell_2}{2})$, de la banda asociada a los pilares. (Banda sombreada en la figura 8-10).

Los momentos han de ser transferidos del forjado a los pilares en gran parte a través de momentos torsores en las vigas.

Con la rigidez de dintel correspondiente al ancho eficaz, se calcula el pórtico equivalente. Llamando M al momento transmitido por el forjado a un pilar (suma de los transmitidos al pilar inferior y al superior a la planta considerada), una fracción

$$M' = k\,M \qquad [8.3]$$

se transmite por flexión directamente del forjado a los pilares.

El valor de k viene indicado en la figura 8-11, según se trate de soporte interior, de fachada o de esquina, con los subíndices 1 ó 2, según se trate de flexiones en la dirección de c_1 o c_2, respectivamente. En las fórmulas, d es el canto útil del forjado.

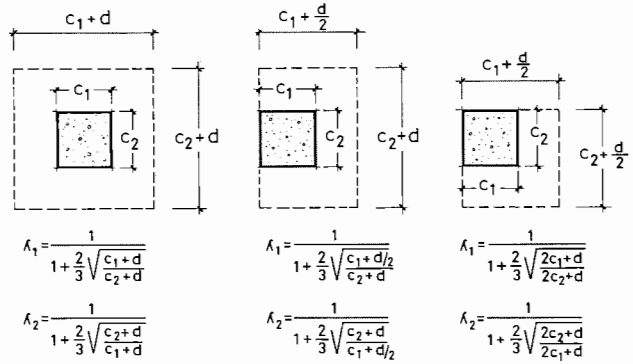


Figura 8-11

Sin embargo, si el forjado no es macizo, d debe ser sustituido en las fórmulas por el canto medio equivalente.

El momento M' debe asignarse y su armadura distribuirse, en una banda de forjado centrada con la fila de pilares considerada y de ancho igual al del pilar más 1,5 h a cada lado, siendo h el canto total del forjado. El momento M" = (1 - k) M se asigna y su armadura se reparte en el resto de la banda de pilares que es la sombreada en la figura 8-10, con ancho $\frac{\ell_1 + \ell_2}{2}$.

La fracción del momento, M", no transmitida por flexión a los pilares se transmite por torsión a éstos a través de las vigas.

Los momentos torsores varían linealmente desde unos valores máximos Mt_1 y Mt_2 en los arranques de los vanos de luces ℓ_1 y ℓ_2, junto al pilar considerado, hasta anularse en el centro de las luces de dichos vanos.

Los valores de Mt_1 y Mt_2 vienen dados por

$$Mt_1 = M'' \frac{\frac{1}{\ell_1\left(1-\frac{c}{\ell_1}\right)^3}}{\frac{1}{\ell_1\left(1-\frac{c}{\ell_1}\right)^3} + \frac{1}{\ell_2\left(1-\frac{c}{\ell_2}\right)^3}} \qquad [8.4]$$

$$Mt_2 = M'' \frac{\frac{1}{\ell_2\left(1-\frac{c}{\ell_2}\right)^3}}{\frac{1}{\ell_1\left(1-\frac{c}{\ell_1}\right)^3} + \frac{1}{\ell_2\left(1-\frac{c}{\ell_2}\right)^3}} \qquad [8.5]$$

Cuando se trata de pilares extremos, como los de la fila 8-16-24, el momento torsor es igual a M" = (1 - k) M, donde M es el valor correspondiente al pórtico equivalente de ancho de banda $\frac{\ell_3}{2}$ y varía linealmente desde ese valor en el arranque del pilar, a cero en el centro de la luz. En [8.4] y [8.5], c es el ancho del pilar en la dirección de las luces ℓ_1 y ℓ_2.

El método indica claramente que ésta es una solución estructural poco adecuada para resistir acciones horizontales. Los momentos transmitidos al forjado, sobre todo con forjados de semiviguetas, solicitan a éste fuerte e inapropiadamente y obliga al empleo de viguetas con armaduras especiales. Las torsiones introducidas en las vigas encarecen su coste considerablemente. La deformabilidad del sistema es alta[1].

En la práctica, la ausencia o acusada escasez de pórticos transversales y la obligación de absorber los esfuerzos horizontales con el forjado, quedan reservadas a

1 Esto puede crear daños en partes no estructurales del edificio, tales como fachadas y tabiquerías.

edificios de pocas plantas y poca esbeltez. Para alturas medias, los entramados constituyen la solución adecuada. Para grandes alturas, las pantallas, núcleos e incluso soluciones más complejas, que veremos más adelante, son recursos obligados.

8.8 FLEXIONES NORMALES AL ENTRAMADO

Consideraremos un edificio como el indicado en planta en la figura 8-12. Usualmente, el cálculo se organizaría calculando los entramados 1, 2, ... 6; 13, 14, ... 18; 1, 7, 13; 2, 8, 14; 3, 9, 15; 4, 10, 16; 5, 11, 17 y 6, 12, 18. Sin embargo, un examen más detenido de la situación muestra que, si la diferencia de L_2 y L_1 es importante, la flexión del forjado (especialmente si se coloca sobrecarga en los vanos L_2 y no se coloca en los L_1) ocasionan una flexión importante de los pilares en el sentido perpendicular al plano medio de los entramados de dos vanos. En los casos usuales, con luces consecutivas de forjado poco diferentes, esto carece de importancia. Si las diferencias entre L_1 y L_2 son importantes, estas flexiones, que sitúan a los pilares en flexión esviada, deben ser analizadas. El método expuesto en 8.7 es adecuado para el cálculo bajo acciones horizontales. Para acciones verticales, los pórticos virtuales deben ser analizados con su ancho completo de forjado, es decir con la semisuma de las luces ℓ_1 y ℓ_2 contiguas a la fila de soportes considerada, si son soportes interiores, o con $\frac{\ell_1}{2}$ o $\frac{\ell_2}{2}$ si lo son de fachada. Para ampliar este tema en detalle, véase el Capítulo 19.

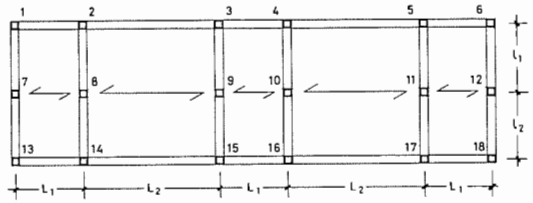


Figura 8-12

BIBLIOGRAFÍA

(8.1) DURIEWICZ, A.; STAROSOLSKI, W. "Reinforced concrete slab-column structures". Elsevier. New York. 1990.

(8.2) FERNÁNDEZ CASADO, C.; "Cálculo de estructuras reticulares". Editorial Dossat. Madrid. 1958.

(8.3) NCS-94 "Norma de construcción sismo-resistente: Parte general y edificación". MOPTMA, Dirección General del Instituto Geográfico Nacional. Madrid 1994.

(8.4) CALAVERA, J.; "Cálculo, construcción y patología de forjados de edificación". 4ª Edición. INTEMAC. Madrid, 1988.

CAPÍTULO 9

HIPÓTESIS DE CARGA EN EL CÁLCULO DE ESTRUCTURAS

9.1 CARGA EN VANO

Una práctica generalizada en entramados de edificios, y de resultados satisfactorios, es la de considerar, por lo que se refiere a las sobrecargas, los vanos completamente cargados o completamente descargados. Actualmente no existe una Norma o Instrucción en España que autorice a hacer esto así, de forma explícita. Debe observarse que dicha práctica no está siempre del lado de la seguridad. Esto puede comprobarse fácilmente si se consideran, por ejemplo, los esfuerzos cortantes en un vano simplemente apoyado sometido a carga uniforme. Es fácil ver que el esfuerzo cortante en una sección no se produce cargando toda la luz, sino solamente la zona entre la sección y el apoyo más alejado. En el caso particular de la sección central (Fig. 9-1), esto conduce a considerar como nulo un esfuerzo cortante que puede alcanzar el valor $\frac{q\ell}{8}$.

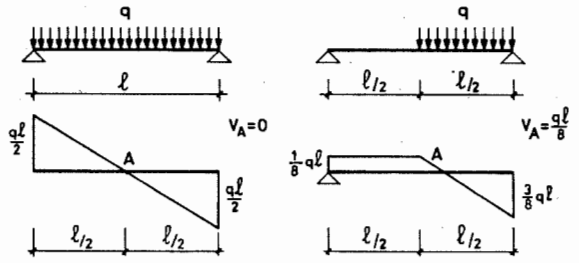


Figura 9-1

Sin embargo, aunque no autorizada explícitamente[1], la práctica de cargar o descargar vanos completos, se ha revelado como suficientemente segura. Volveremos sobre esto en 9.4.2.

9.2 COMBINACIONES DE CARGA EN ENTRAMADOS

En entramados de gran número de piezas, la determinación de la combinación de cargas más desfavorables resulta muy compleja.

La figura 9-2 tomada de E. TORROJA (9.1) indica las combinaciones de sobrecarga en vanos que resultan pésimas para los distintos esfuerzos. La figura supone luces iguales, vigas de la misma rigidez y pilares de la misma altura y rigidez. R.W. FURLONG (9.2) ha señalado también la complejidad del tema y la necesidad de introducir simplificaciones para conseguir métodos de cálculo prácticos. El estudio se complica aún más por el hecho de que no es posible, en el caso de los pilares, predecir a simple vista cuál de las posibles combinaciones M, N, conducirá a la máxima necesidad de armadura. El tema, naturalmente, es aún más complejo si coexisten acciones horizontales, hasta el punto de que el cálculo riguroso de la armadura de los soportes de un edificio, analizando todas las combinaciones de acciones posibles, se sale fuera del alcance práctico no ya del cálculo manual sino incluso del cálculo con la mayoría de los ordenadores actuales.

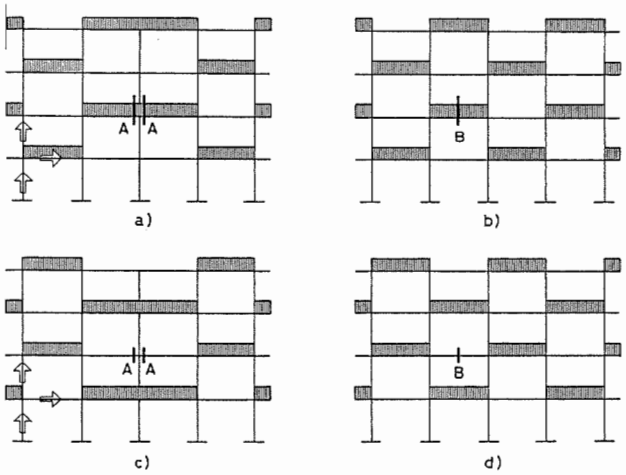
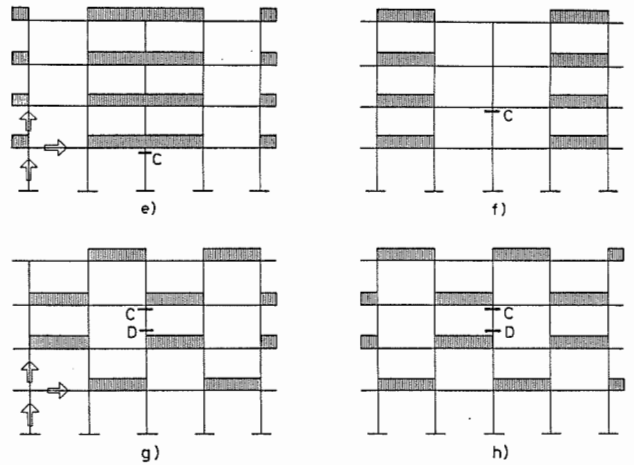


Figura 9-2

1 Una antigua Norma española, titulada "Normas para el cálculo y ejecución de estructuras metálicas, hormigón armado y forjados de ladrillo armado" de la Dirección General de Arquitectura, publicada en 1941, sí lo autorizaba expresamente. La Norma norteamericana "Uniform Building Code", que citamos más adelante, contiene también esta autorización expresa.



a) MAXIMOS MOMENTOS FLECTORES NEGATIVOS Y MAXIMOS ESFUERZOS CORTANTES EN LOS ARRANQUES A DE LAS VIGAS.
b) MAXIMO MOMENTO FLECTOR POSITIVO EN EL CENTRO B DE LA VIGA.
c) MINIMO MOMENTO FLECTOR (O MAXIMO POSITIVO) EN LOS ARRANQUES A DE LAS VIGAS.
d) MINIMO MOMENTO FLECTOR (O MAXIMO NEGATIVO) EN EL CENTRO B DE LA VIGA.
e) MAXIMO ESFUERZO AXIL EN EL SOPORTE C.
f) MINIMO ESFUERZO AXIL EN EL SOPORTE C.
g) MAXIMOS MOMENTOS FLECTORES EN EL SOPORTE CD; NEGATIVO EN EL EXTREMO SUPERIOR C Y POSITIVO EN EL INFERIOR D.
h) MAXIMOS MOMENTOS FLECTORES EN EL SOPORTE CD; POSITIVO EN EL EXTREMO SUPERIOR C Y NEGATIVO EN EL INFERIOR D.

Figura 9-2 (Cont.)

Por todo lo anterior, en la práctica se suelen realizar solamente tres hipótesis de carga, que se indican en la figura 9-3.

La a) corresponde a carga permanente más sobrecarga en todos los vanos. La b) corresponde a carga permanente en todos los vanos más sobrecarga en vanos impares y la c) a carga permanente en todos los vanos más sobrecarga en los vanos pares.

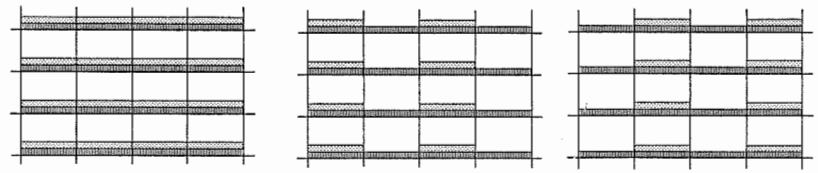


Figura 9-3

Habitualmente, las hipótesis anteriores se obtienen por superposición de los resultados de tres cálculos del entramado:

A.- Correspondiente a carga permanente en todos los vanos.
B.- Correspondiente a sobrecarga en vanos impares.
C.- Correspondiente a sobrecarga en vanos pares.

A + B + C proporciona la hipótesis a), A + B la b) y A + C la c). El organizar así el cálculo en lugar de calcular directamente las tres hipótesis indicadas en la figura 9-3, se debe a la necesidad de obtener por separado los esfuerzos axiles en pilares debidos a cargas permanentes y a sobrecargas para aplicar la reducción de sobrecargas prevista por las Normas, de lo que hablaremos a continuación.

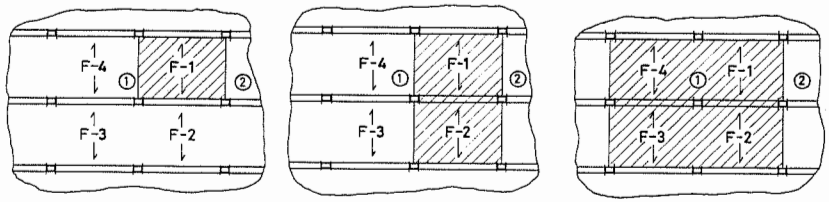
En el caso de existir acciones de viento, sismo o empujes horizontales de cualquier tipo, dichas acciones deben combinarse con las indicadas en la figura 9-3.

9.3 REDUCCIÓN DE SOBRECARGAS

A la vista de las consideraciones anteriormente expuestas en este Capítulo, surge inmediatamente a examen el problema de la reducción de sobrecargas cuando la zona cargada es de gran extensión. Se trata en el fondo, del reconocimiento intuitivo de que en algunos tipos de sobrecarga de uso la probabilidad de presentación de un estado de sobrecargas con su valor característico[1], en zonas muy extensas, es pequeña. Es fácilmente concebible que dicho estado se presente en un Estadio de Fútbol, pero es evidente su escasa probabilidad en un Edificio de Oficinas de muchas plantas y más escasa aún en un Edificio de Viviendas.

Por otro lado, es obvio en muchos casos de sobrecarga que el valor a considerar es más reducido cuanto mayor es el área cargada[2].

Finalmente es claro también que la probabilidad de que se produzca la sobrecarga característica prevista en el forjado F-1, que supone la sobrecarga F-1 sombreada de la figura 9-4 a), es mayor en muchos tipos de sobrecarga de uso, que la de que se produzca el estado de sobrecarga máxima prevista en la viga 1-2, lo que supone la sobrecarga íntegra de las zonas F-1 y F-2 (Fig. 9-4 b) y mayor a su vez que la de que se produzca la sobrecarga máxima prevista para el pilar I en esa planta, que supone la sobrecarga simultánea de las zonas F-1, F-2, F-3 y F-4 (Fig. 9-4 c). Es cierto, en cambio, también, que la importancia de la pieza en el conjunto de la estructura suele ser mayor para un pilar que para una viga y para una viga que para un forjado.



a) b) c)

Figura 9-4

1 El significado del valor característico se explica en el Capítulo 32.

2 En edificios industriales, en especial en los destinados a almacenamiento, la probabilidad de sobrecarga máxima en toda el área puede en cambio ser muy alta.

La Normalización española vigente no recoge, de los conceptos expuestos anteriormente, más que el de menor probabilidad de sobrecarga al aumentar el número de plantas[1].

9.4 SOBRECARGAS[2]

9.4.1 SOBRECARGAS DE USO EN EDIFICIOS DE VIVIENDAS, OFICINAS Y ANÁLOGOS

Los valores aparecen regulados en la Norma Básica de la Edificación NBE AE-88 "ACCIONES EN LA EDIFICACIÓN"[3] (9.3).

Resultan necesarias dos consideraciones adicionales. La primera de ellas es el cuidado con que deben considerarse las sobrecargas de zonas ajardinadas, no sólo en cuanto a la sobrecarga de carácter fijo que supone la tierra vegetal, sino a la evaluación correcta de este valor en condiciones de terreno saturado por la lluvia. Por otra parte, en muchos casos no es descartable la posibilidad de que en casos excepcionales estas zonas soportan además sobrecargas de personas, lo que debe ser considerado, atribuyéndole el carácter accidental (ver Capítulo 32), si ese es el caso.

La segunda consideración se refiere a la conveniencia, en muchos casos, de considerar en los edificios de uso público tales como oficinas, bibliotecas, escuelas, etc., además de las sobrecargas de uso uniformemente repartidas, la existencia (no simultánea) de cargas concentradas en zonas reducidas.

La tabla T-9.1, extractada de la referencia (9.4) da indicaciones adecuadas al respecto.

El tema, tanto de cargas permanentes como de sobrecargas de uso, ha sido tratado por Conseil International du Batiment (C.I.B.) en las referencias (9.5) y (9.6), respectivamente.

9.4.1.1 Reducción de sobrecargas

La reducción de sobrecarga, tema esencial como dijimos anteriormente, requiere consideración detallada.

Por un lado, la Norma NBE AE-88 (9.3), en su apartado 3.7, establece las reducciones indicadas en la tabla T-9.2.

Existió también la Norma UNE 24003 que establecía las reducciones que figuran en la tabla T-9.3 y que, de acuerdo con dicha Norma, se aplicaban sólo a viviendas y oficinas.

1 En general las Normas de otros países siguen la misma línea. Sólo algunos Códigos Norteamericanos profundizan más en el tema.

2 La Instrucción EHE, incluye como Anejo el Documento Nacional de Aplicación para España, del Eurocódigo EC-2 y en un Anexo trata el tema de cargas y sobrecargas.

3 Es una reproducción literal de la Norma AV-101 publicada en 1962.

TABLA T-9.1

CARGAS CONCENTRADAS EN UN ÁREA DE 750·750 mm

(NO CONSIDERADA SIMULTÁNEAMENTE CON LA SOBRECARGA GENERAL UNIFORMEMENTE REPARTIDA)

CLASE DE USO		CARGA CONCENTRADA (kN)
Hospitales		4,50
Bibliotecas (*)		4,50
Fábricas	Ligeras	9,00
	Pesadas	13,50
Oficinas		9,00
Imprentas		11,00
Viviendas		0
Tribunas		0
Escuelas		4,50
Almacenes		0
Tiendas		13,5

(*) El caso de las bibliotecas debe ser cuidadosamente considerado, pues la sobrecarga uniformemente repartida, según el tipo y uso, puede oscilar desde la de una vivienda a la de mitad de uso público.

TABLA T-9.2

REDUCCIÓN DE SOBRECARGAS SEGÚN MV-101	
Número de pisos que actúan sobre el elemento	Reducción en la suma de las sobrecargas (%)
1, 2, 3	0
4	10
5	20
6 ó más	30
La cubierta se considera como un piso	

TABLA T-9.3

REDUCCIÓN DE SOBRECARGAS SEGÚN UNE 24003	
Número de pisos que actúan sobre el elemento	Reducción en la suma de las sobrecargas (%)
2	10
3	20
4	30
5	40
6 ó más	30

Aunque la Norma NBE AE-88 es de obligado cumplimiento, es claro que el Proyectista puede adoptar criterios distintos a los de la Normativa Oficial, siempre que estén debidamente justificados. En este sentido la Norma UNE puede ser una base interesante para casos concretos e incluso en grandes edificios y sobre todo en edificios de muchas plantas, es siempre aconsejable un estudio directo del tema.

Desgraciadamente la Norma UNE 24003 ha sido cancelada por AENOR hace algunos años.

Un documento de excepcional importancia en relación con el tema que nos ocupa es la Norma norteamericana UNIFORM BUILDING CODE (9.4). Esta Norma, de uso habitual en EE.UU. y empleada con frecuencia en muchos otros países, presenta un tratamiento muy interesante en lo referente a la reducción de sobrecargas variables, que resumimos a continuación:

Para el cálculo de toda pieza cuya área tributaria de sobrecarga exceda 15 m^2, incluidos los forjados sin vigas, excepto para locales de reunión pública y para sobrecargas variables superiores a 48,8 kN/m^2, la sobrecarga total podrá reducirse de acuerdo con la fórmula

$$R = r\,(A - 13{,}94) \qquad [9.1]$$

donde:

R = Coeficiente de reducción en %.

r = Coeficiente relacionado en la tabla T-9.1.

A = Area tributaria de sobrecarga en m^2. (En el caso de forjados sin vigas el área es la del recuadro. En el caso de pilares, la que transmite sobrecargas al pilar considerado, extendida a la totalidad del número de plantas).

La reducción no excederá el 40% para piezas que reciban sobrecargas de un solo nivel, ni el 60% para otras piezas, ni el valor dado por la fórmula

$$R_{max} = 23{,}1\left(1 + \frac{G}{Q}\right) \qquad [9.2]$$

donde:

G = Carga permanente más sobrecargas fijas, por m^2.

Q = Sobrecarga variable, por m^2.

Para sobrecargas de almacenamiento superiores a 48,8 kN/m^2, no se acepta reducción en vigas y forjados sin vigas, pero pueden reducirse las sobrecargas en pilares en el 20%.

La Tabla T-9.4 da la información complementaria sobre valores de r y R[1].

1 La tabla no es directamente aplicable a edificios industriales cuyas sobrecargas deberán ser estudiadas en cada caso particular.

TABLA T-9.4

TIPO DE USO	VALOR DE r (%)	VALOR MÁXIMO DE R (%)
Locales de reunión pública	-	0
Locales de sobrecarga de almacenamiento superior a 48,8 kN/m²:		
– Vigas y forjados	-	0
– Pilares	-	20
Otros locales:		
– Sobrecarga procedente de un solo nivel	0,86	40
– Otros casos	0,86	60
Cubiertas:		
– Pendiente inferior a 1/3	0,86	40
– Pendiente igual o superior a 1/3 y menor que 1/1	0,86	25
Garajes para automóviles con un máximo de nueve pasajeros	0,86	40

En la figura 9-5 se indican gráficamente los valores de la fórmula [9.1] con las limitaciones de la [9.2]. Como puede apreciarse, la reducción es muy importante incluso para áreas cargadas pequeñas. Obsérvese que el UNIFORM BUILDING CODE *hace depender la reducción, no sólo del número de plantas, sino del área de carga de cada pieza en su planta.* Esto tiene gran importancia pues permite, para vigas y forjados sin vigas, reducciones apreciables de los valores de las sobrecargas, cosa que no es posible con NBE AE-88 ni con UNE 24003.

Por otro lado y pensando en los edificios de elevado número de plantas, obsérvese en la figura 9-5 los límites establecidos por NBE AE-88 y UNE 24003 y el carácter excesivamente prudente de la NBE[1].

EJEMPLO 9.1

Un edificio de 7 plantas, incluyendo la baja (7 forjados), está construido con forjados bidireccionales sin vigas y tiene luces de recuadros $l_x = 8\ m$, $l_y = 9\ m$, con carga permanente de 50 kN/m². La planta primera está destinada a oficinas de uso público ($Q_1 = 30$ kN/m²), y las restantes a viviendas o azotea visitable, todas con la misma sobrecarga de uso ($Q_2 = 20$ kN/m²).

1 Evidentemente y aunque UNE 24003 haya sido cancelada, como hemos dicho, y el UNIFORM BUILDING CODE sea una norma no española, son documentos que el Proyectista puede adoptar de acuerdo con su criterio. La trascendencia del tema en cuanto al coste de la estructura es muy importante, no sólo en vigas, forjados sin vigas y en los propios pilares sino también en la cimentación.

Se pide:

Calcular con el U.B.C.-94 los valores de las sobrecargas de uso a considerar en el cálculo de la estructura.

Solución

De acuerdo con las fórmulas [9.1] y [9.2] o con la figura 9-5, se tiene, para un área de carga 8·9 = 72 m², lo siguiente:

r = 0,86

Máximo de R = 40%

Con [9.1] R = 0,86 (72 - 13,94) = 49,9%

Con [9.2]

Planta de Oficinas $\frac{G}{Q} = \frac{50}{30}$ y $R_{máx} = 61,6\%$

Plantas de Viviendas $\frac{G}{Q} = \frac{50}{30}$ y $R_{máx} = 80,9\%$

Resulta por tanto:

Planta de Oficinas $Q'_1 = 30\ (1 - 0,4) = 18$ kN/m²

Plantas de Viviendas y Azotea $Q'_2 = 20\ (1 - 0,4) = 12$ kN/m²

Las cargas totales a considerar en el cálculo resultan:

Planta de Oficinas: $Q'_1 + G = 50 + 18 = 68$ kN/m²
(15% menos que con NBE AE-88)

Plantas de Viviendas y Azotea $Q'_2 + G = 50 + 12 = 62$ kN/m²
(11% menos que con NBE AE-88)

EJEMPLO 9.2

En el mismo edificio del Ejemplo 9.1, calcular la carga total de un pilar interior de planta baja, según NBE AE-88 y según U.B.C.-94. (Se suponen despreciables los momentos flectores sobre el pilar).

Solución:

a) Con NBE AE-88. La reducción correspondiente según la Tabla T-9.1 es del 30%.

$N_1 = 72 \cdot [30 \cdot (1\text{-}0,3) + 6 \cdot 20(1\text{-}0,3)] = 7.560$ kN

b) U.B.C.-97. Al ser despreciables los momentos flectores, el área tributaria es la del ejercicio anterior, es decir 72 m².

El máximo de R para [9.1] es ahora del 60%, inferior a los que se derivan de [9.2] como hemos visto anteriormente. Rige por tanto R = 60% y la carga del pilar será:

$$N_2 = 72 \cdot [30 \cdot (1-0,6) + 6 \cdot 20 \cdot (1-0,6)] = 4.320 \text{ kN}$$

Como puede verse la sobrecarga total obtenida con U.B.C.-97 es el 57% de la obtenida aplicando la NBE AE-88. Si la diferencia se refiere a la carga total, estimando la azotea como una planta más, la carga permanente por pilar es de 7·72·50 = 25.200 kN, con lo que las cargas totales son:

Según NBE AE-88:

Carga permanente	25.200 kN
Sobrecarga reducida	7.560 kN
Carga total	32.760 kN

Según U.B.C.-97:

Carga permanente	25.200 kN
Sobrecarga reducida	4.320 kN
Carga total	29.520 kN

Es decir, que refiriéndonos a las cargas totales, la correspondiente a la aplicación de U.B.C.-97 es un 10% menor que la correspondiente a la NBE AE-88.

9.4.2 SOBRECARGAS DE USO EN EDIFICIOS INDUSTRIALES

En el caso de los Edificios Industriales, surgen con frecuencia acciones y combinaciones de acciones no previstas en MV-101 y el Proyectista deberá en muchos casos emplear su propio juicio.

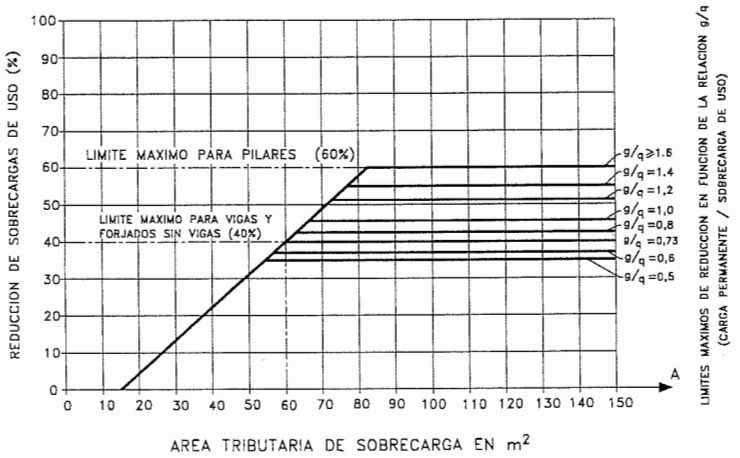


Figura 9-5

Se requiere una atención especial al caso de acciones en Edificios Industriales, cuando éstas son debidas a maquinaria, equipos o tráfico de vehículos. En algunas ocasiones han surgido daños debido a que cargas localizadas han sido asimiladas por los fabricantes a cargas uniformes no correctas. Por ejemplo, una cierta sobrecarga uniforme teóricamente equivalente puede ser equivalente a las localizadas reales desde el punto de vista de los momentos flectores, pero puede no serlo simultáneamente para los esfuerzos cortantes o para los de punzonamiento.

9.4.3 SOBRECARGA DE USO EN GARAJES APARCAMIENTOS

Por su importancia actual, consideramos aisladamente este caso. En la normalización española está cubierto por NBE AE-88 (9.3), que en el caso usual de aparcamientos para automóviles de turismo la establece en 4 kN/m², claramente excesiva.

El UNIFORM BUILDING CODE (UBC-97) (9.4) anteriormente citado, la fija para el caso de automóviles con un máximo de número de pasajeros en 2,5 kN/m² y de acuerdo con la tabla T-9.4 y las fórmulas [9.1] y [9.2] y la figura 9-5, dicha sobrecarga se reduce al aumentar el área tributaria (Fig. 9-5) hasta un máximo del 40%. Como muy frecuentemente en estas estructuras el área tributaria de cada viga supera los 50 m², ello equivale a reducir al menos la sobrecarga en un tercio, es decir a adoptar valores del orden de 1,6 kN/m².

En realidad, la carga uniforme equivalente a un conjunto en planta cargado de automóviles (sin espacios libres entre ellos) no supera los 2 kN/m².

Otra recomendación razonable del UBC-97 es la de proyectar los aparcamientos para una carga puntual de 9 kN/m² que actuase en cualquier punto sobre un cuadrado de 120·120 mm. Esta sobrecarga no se considera simultáneamente con la uniformemente repartida citada anteriormente.

Lo anterior se refiere exclusivamente a las plantas de aparcamiento o garaje. Las cubiertas, pueden estar en situaciones muy diferentes y variadas, sometidas a sobrecargas de diversos tráficos, soportar zonas peatonales, ajardinadas, etc.

9.4.4 SOBRECARGAS DE USO EN PUENTES DE CARRETERA

La normativa vigente en España está contenida en la "Instrucción sobre las Acciones a considerar en el Proyecto de Puentes de Carreteras" (IAP-96) (9.5).

Resumidamente, esta Instrucción, aplicable a puentes de la red de carreteras dependiente directamente del Estado, establece las sobrecargas de uso siguientes, actuantes simultáneamente:

a) Una sobrecarga de 4 kN/m² sobre total (o parte si ella fuera más desfavorable) la plataforma del tablero, entendiendo por tal la susceptible de soportar tráfico en condiciones normales de uso.

b) Uno o dos vehículos de 600 kN/m² del tipo indicado en planta en la fig. 9-6 a), (según sea más desfavorable), situados con su eje paralelo al de la calzada. Cada una de las seis cargas repartidas en las zonas indicadas es de 100 kN. (En sentido longitudinal del puente no se considerará la existencia de más de un vehículo).

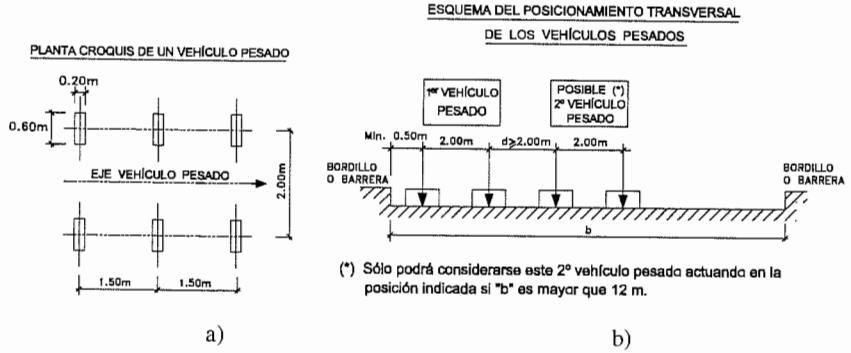


Figura 9-6

En puentes con ancho de plataforma no superior a 12 m, se considerará un sólo vehículo. Si el puente tiene un ancho de plataforma superior a 12 m sin rebasar los 24 m, se considerará la actuación de uno o dos vehículos en paralelo según sea más desfavorable, colocados como indica la figura 9-6 b) y situado cada uno de ellos en dirección longitudinal en la posición más desfavorable. Si existe mediana, si la anchura de la zona de plataforma del tablero a un lado de la mediana es superior a 12 m, se podrán colocar los dos vehículos en ella.

c) Una sobrecarga uniforme de 4 kN/m² actuando en toda o parte (según sea más desfavorable) de toda la superficie, de aceras, pistas para ciclistas, paso de cañadas y medianas que estén físicamente separadas de la plataforma del tablero.

Si estas zonas no están separadas por barreras rígidas que impidan el acceso accidental de los vehículos a ellas, se comprobarán, alternativamente a la sobrecarga uniforme indicada, bajo una carga de 60 kN/m² actuando en una superficie de 300·300 mm y actuando en la posición más desfavorable.

Las sobrecargas a), b) y c) incluyen ya el efecto de impacto. El aspecto de la fatiga se estudiará en el Capítulo 46.

La Instrucción citada establece también una acción de frenado y arranque, actuando sobre la superficie del pavimento, y paralelo al eje del puente de valor igual a un veinteavo de las sobrecargas indicadas en los párrafos a) y b) sin ser en ningún caso superior a 20 b kN ni a 140 kN, ni mayor que 60 b kN ni 720 kN, siendo b el ancho de la plataforma en metros.

La acción de frenado se distribuye a lo largo de la longitud del puente, sin sobrepasar la distancia entre juntas consecutivas ni 270 m, siempre colocada en la posición más desfavorable.

Un documento alternativo que contiene excelente información sobre el tema de las acciones en puentes es la Norma norteamericana AASHTO (9.6). Es muy frecuentemente usada en la práctica constructiva, no sólo en los Estados Unidos sino en muchos contratos de tipo internacional.

9.4.5 SOBRECARGAS DE USO EN PUENTES DE FERROCARRIL

Este tema está cubierto en España por la "Instrucción relativa a las acciones a considerar en el proyecto de puentes de ferrocarril" (9.7). Establece dos gálibos, para vía RENFE y

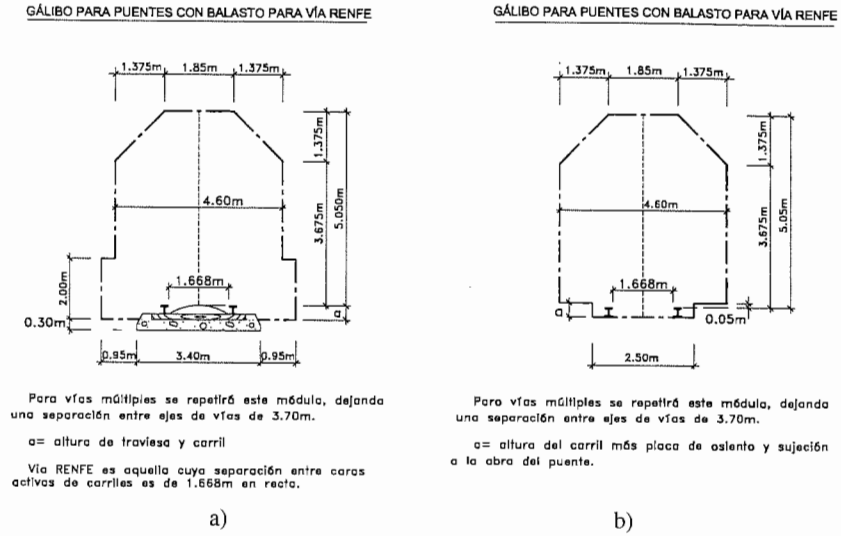


Figura 9-7

para vía métrica que se indican en las figuras 9-7 y 9-8, respectivamente. En ambos casos se contemplan los puentes con vía apoyada en balasto o sin él.

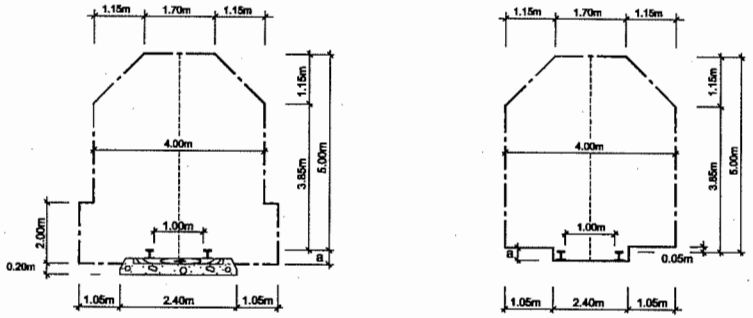


Figura 9-8

a) Las sobrecargas móviles de uso se establecen de acuerdo con lo siguiente:

a-1) **Tren de cargas para vía RENFE**. Además de los trenes que a continuación se indican se considera siempre una sobrecarga de uso de 4 kN/m² extendida sobre toda o parte de la superficie de los pasos de servicio.

Tren tipo A. Está constituido por tres ejes de trescientos kilonewton separados entre sí 1,50 m (Fig. 9-9a).

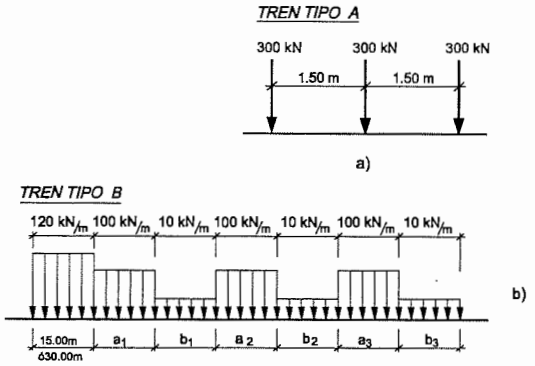


Figura 9-9

Tren tipo B. Está constituido por una sobrecarga uniforme repartida según la fig. 9-9b). Las longitudes de 15 ó 30 m y las a_i y b_i serán las que produzcan el sector más desfavorable, sin presentar en ningún caso solución de continuidad.

a-2) **Tren de cargas para vía métrica**. Es de análoga disposición al de vía RENFE pero los tramos A y B se sustituyen por los C y D indicados en las figuras 9-10 a) y b), respectivamente.

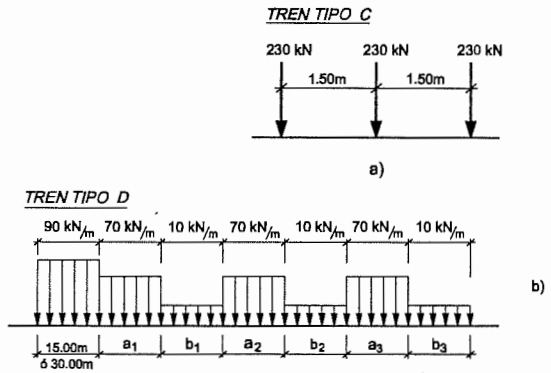


Figura 9-10

b) **Reparto local de cargas**. En puentes con balasto y losa de hormigón, puede suponer que el reparto de las cargas se realiza de acuerdo con lo siguiente:

b-1) La superficie de aplicación es la de apoyo del patrón del carril.

b-2) La transmisión de esfuerzo puede suponer que se realiza con pendiente 1/1 a través del espesor de la traviesa y con pendiente 2/1 ó 1/1 (según sea más desfavorable) a través del balasto.

c) **Impacto**. Los esfuerzos estáticos definidos para los trenes A, B, C y D se incrementarán, debido al efecto de impacto en un tanto por ciento definido en la forma siguiente:

c-1) **Luces menores o iguales a 6 m**.

$$l = 0{,}33\ v \qquad [9.3]$$

siendo v la velocidad del tren en km/h.

La fórmula [9.3] es válida para velocidades no superiores a 200 km/h.

c-2) **Luces mayores de 6 m.**

– Para el caso de tramos simplemente apoyados con flecha limitada a una milésima de la luz, el tanto por ciento de impacto puede obtenerse de la fórmula

$$l = \frac{114\sqrt{L}}{3{,}1 - 1{,}76\sqrt{L} + L} \qquad [9.4]$$

– Para tramos continuos la fórmula aplicable es:

$$l = 65\,\frac{\mu}{1 - \mu + \mu^2} \qquad [9.5]$$

donde

$$\mu = \frac{v\,T}{2\,L} \qquad [9.6]$$

siendo

v = Velocidad del tren en km/h.

T = Período fundamental del elemento cargado en segundos.

L = Luz del elemento en estudio en metros.

Como en el caso anterior, la validez de la fórmula se limita a $v \leq 200$ km/h.

Véase el Cuaderno INTEMAC Nº 24 (9.8) que resume ensayos y experiencias, realizados con trenes de alta velocidad, mediante auscultación dinámica de las estructuras.

d) **Reducción de sobrecargas**. Cuando en el puente coexistan varias vías se podrán aplicar las siguientes reducciones:

– Dos de las vías con el total de sobrecarga.

– Una tercera vía con el 75%.

– Las restantes con el 50%.

e) **Frenado y arranque**. La acción correspondiente de frenado se valora en 1/8 del peso del tren tipo, aplicado a la altura de la cabeza del carril.

Cuando en el puente coexistan varias vías se aplicarán las siguientes reducciones:

– Una de las vías con la totalidad del esfuerzo.

– Una segunda vía con el 90%.

– Las restantes con el 70%.

Para el arranque se considerará como carga vertical del tren, solamente la de la máquina (120 kN/m en vía RENFE y 90 kN/m en vía métrica).

9.4.6 SOBRECARGA DE NIEVE

El tema está cubierto por la Norma Básica de la Edificación NBE AE-88 (9.3). Los puentes de carretera de ferrocarril tienen especificaciones propias. Véase (9.5) y (9.7).

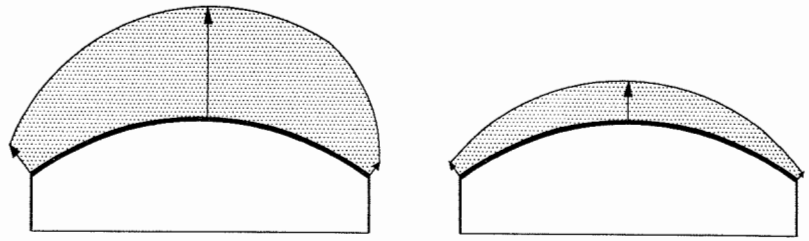
9.4.7 SOBRECARGA DE VIENTO

El tema está cubierto por la Norma Básica de la Edificación NBE-AE-88 (9.3). Los puentes de carretera y de ferrocarril tienen especificaciones propias. Véase (9.5) y (9.7).

En general este tratamiento es muy sucinto pero suficiente para los casos usuales. Sin embargo para casos especiales y sobre todo para edificios importantes por su altura o su luz libre, conviene profundizar más en el tema. Recuérdese también lo dicho en 8.6 sobre el reparto de las fuerzas de viento que en general no es proporcional a la superficie directamente correspondiente al entramado considerado.

Un tratamiento más detallado y profundo es el de la Norma francesa POG-002 (1994) (9.9). A título de ejemplo, a la cubierta de la figura 9-11a) le corresponde según NBE AE-88 el diagrama de presiones indicado. De acuerdo con la Norma francesa POG-002, basadas en estudios aerodinámicos directos, el diagrama es el indicado en la figura 9-11b), totalmente diferente.

En todo caso para edificios de gran importancia suele resultar interesante el estudio experimental directo en el túnel de viento. Un estudio de este tipo debe contemplar no sólo el edificio en proyecto, sino también las construcciones próximas, ya que pueden modificar considerablemente las sobrecargas reales de viento. Por supuesto, si la acción de alguna construcción próxima reduce las sobrecargas de viento sobre el edificio en estudio, su permanencia durante la vida útil del nuevo edificio debe estar asegurada.



a) b)

Figura 9-11

9.5 COMBINACIONES PÉSIMAS PARA EL DIMENSIONAMIENTO

En el apartado 9.2 vimos las dificultades prácticas para el cálculo exacto de estas combinaciones pésimas de acciones y se aceptó, como simplificación práctica para el caso de cargas verticales, el análisis de los tres estados de carga indicados en la figura 9-3.

Si existen acciones horizontales (en general de viento y/o sismo) éstas deben combinarse en las tres anteriores.

Ya vimos también en 9.1 que la hipótesis pésima de combinación de acciones para una sección de una pieza puede no ser la misma que la que corresponde a otra sección de la misma pieza.

Para el caso de acciones verticales, las combinaciones pésimas usuales son las que se exponen a continuación.

9.5.1 DINTELES

El máximo momento negativo sobre el pilar se considera producido en la hipótesis a) de la Fig. 9-3, es decir, con carga total en todos los vanos. El máximo momento positivo en vano se considera producido en la hipótesis b) o en la c) de la Fig. 9-3, es decir con sobrecarga en el vano considerado y sin sobrecarga en los contiguos.

Los mínimos momentos negativos sobre pilares o en su caso los máximos positivos, se obtienen con sólo carga permanente (hipótesis a) de la Fig. 9-3). El mínimo momento positivo de vano o máximo negativo, en su caso, se obtiene sin sobrecarga en el vano y sobrecargando los contiguos (hipótesis b) o c) de la Fig. 9-3)[1].

Ya vimos, tal como se indicó en la figura 9-2 que lo anterior no es estrictamente cierto, pero sí razonablemente aproximado.

Estas combinaciones deben superponerse, en su caso, a las de acciones horizontales.

1 Para el caso de forjados sin vigas se aplican otros criterios. Véase el Capítulo 19.

Como veremos en el Capítulo 30, las acciones deben multiplicarse por coeficientes de seguridad diferentes, en general, para cada tipo de acción y para cada caso de combinación considerado.

También veremos en dicho Capítulo que la aplicación de coeficientes de seguridad más reducidos a la carga permanente cuando es favorable que cuando es desfavorable altera lo dicho anteriormente y complica considerablemente el cálculo. Allí haremos algunas propuestas de simplificación para los edificios más frecuentes.

9.5.2 PILARES

Los casos de combinaciones pésimas se analizaron con carácter general en 9.2 y se recogen en la figura 9-2. Adoptando las simplificaciones de la figura 9-3, los máximos esfuerzos axiles en pilares se obtienen en la hipótesis a), es decir con carga permanente y sobrecarga en todos los vanos y pisos, teniendo en cuenta la eventual reducción de sobrecargas expuesta en 9.3.

Los máximos momentos flectores se producen en las hipótesis b) o c) de la figura 9-3, es decir descargando alternativamente los vanos pares o impares en todos los pisos simultáneamente. En este caso es evidente que la sobrecarga en el piso considerado no debe ser reducida, pues la ocurrencia de su valor máximo aislado es siempre fácilmente concebible, independientemente del número de plantas.

En cambio para el esfuerzo axil concomitante con los flectores máximos de las hipótesis reflejadas en las figuras 9-3b) y c) es evidente que a las sobrecargas se les debe aplicar la reducción prevista en 9.3.

De nuevo, la introducción de coeficientes de seguridad diferentes para cargas permanentes, según sean o no favorables, complica notablemente la investigación de la combinación M, N pésima.

Debe adelantarse ya aquí que el campo de los pilares se complica debido al hecho de que en un pilar de sección dada y sometido a un momento flector determinado, la máxima necesidad de armadura puede no corresponder al máximo valor de N concomitante con M, sino al mínimo, o a un valor intermedio.

Las solicitaciones actuantes sobre un pilar, en un diagrama M, N, están representadas en general por un polígono semi-regular, tal como se indica en la figura 9-12 tomada del trabajo de J. CALAVERA citado en la referencia (9.10).

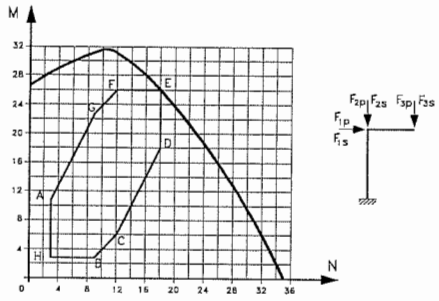


Figura 9-12

Sin embargo, lo anterior resulta cuando los vanos se cargan o descargan completos, como es práctica habitual. TREDOPP en la referencia (9.11) ha demostrado que si se admite la carga parcial de vanos, el polígono tiene lados curvos, tal como se indica en la figura 9-13.

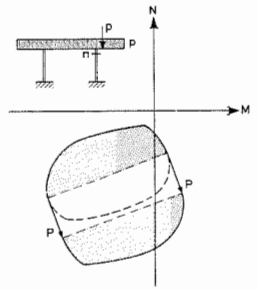


Figura 9-13

En la tabla T-9.5 se indica el caso de un entramado muy sencillo, sometido a acciones verticales y viento, y se indican todas las combinaciones de acciones posibles. En la figura 9-14 se representa el correspondiente polígono de esfuerzos MN.

El examen de los resultados de la figura permite formarse una idea de la complejidad que alcanza el problema de análisis de las solicitaciones de un pilar. De acuerdo con la simplificación aceptada en 9.2, en la práctica usual nos limitaríamos a las comprobaciones 2, 3, 6, si no hay acciones horizontales, y a las 2', 2'', 3', 3'', 6', 6'', si éstas existen.

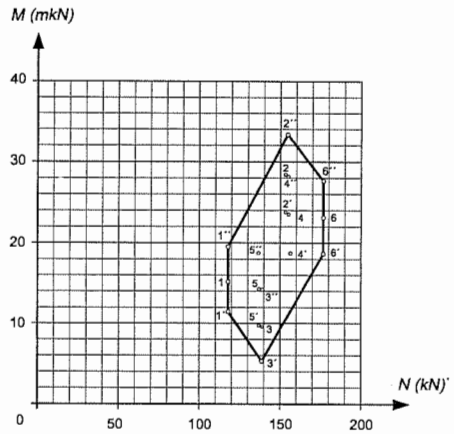
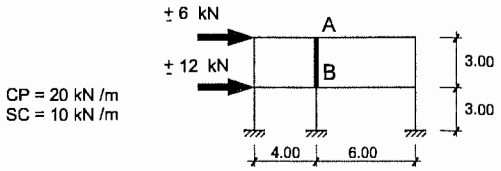


Figura 9-14

TABLA T-9.5



ESFUERZOS EN EL PILAR A - B

HIPOTESIS	PUNTO EN EL DIAGRAMA (Fig.9-14)	SIN VIENTO		CON VIENTO IZDA.		CON VIENTO DCHA.	
		M	N	M '	N '	M"	N"
	1-1'-1"	-15.14	115.90	-10.61	116.50	-19.67	115.30
	6-6'-6"	-22.72	173.90	-18.19	174.50	-27.25	173.30
	3-3'-3"	-9.705	137.90	-5.177	138.50	-14.23	137.30
	2-2'-2"	-28.15	151.90	-23.62	152.50	-32.68	151.30
	4-4'-4"	-23.52	152.80	-18.98	153.40	-28.05	152.20
	5-5'-5"	-14.34	137.0	-9.81	137.60	18.87	136.40

BIBLIOGRAFÍA

(9.1) TORROJA, E.: "Cálculo de esfuerzos en estructuras reticuladas". Instituto Técnico de la Construcción y del Cemento. Madrid. 1954.

(9.2) FURLONG, R.W.: "Rational Analysis of Multistory Concrete Structures". Concrete International. Junio, 1981.

(9.3) NBE AE-88 Norma Básica de la Edificación. "Acciones en la Edificación". MOPU. Madrid. 1989.

(9.4) UNIFORM BUILDING CODE 1997. International Conference of Building Officials. Whittier. California. 1997.

(9.5) IAP-96 "Instrucción sobre las acciones a considerar en el proyecto de puentes de carretera". Ministerio de Fomento. Dirección General de Carreteras. Madrid. 1998.

(9.6) AASHTO. "Interim Specificacions - Bridges - 1994". Washington. 1994.

(9.7) "Instrucción relativa a las acciones a considerar en el proyecto de puentes de ferrocarril". Ministerio de Obras Públicas y Urbanismo. Madrid. 1975.

(9.8) ALVAREZ CABAL, R.; DIAZ LOZANO, J.; FERNÁNDEZ GÓMEZ, J.; LEY URZAIZ, J.; SANTOS MESA, J.; SANTOS OLALLA, F.: "Modelo numérico de simulación dinámica para puentes de ferrocarril sometidos a tráfico de alta velocidad". Cuaderno INTEMAC Nº 24. 4º trimestre. 1996.

(9.9) POG-002 RE. "Règles NV 65 et annexes. Règles definissant les effets de la neige et du vent sur les constructions et annexes". Règles N 84 "Action de la neige sur les constructions". Reemplaza a la edición Enero-Febrero de 1971. Paris. 1991.

(9.10) CALAVERA, J.: "La influencia de las variaciones resistentes de los materiales y de las variaciones dimensionales de las piezas de hormigón armado sobre su capacidad resistente". 1ª Edición. I.E.T. Madrid. 1975. 2ª Edición. INTEMAC. Madrid. 1979.

(9.11) TREDOPP, R.: "Entwicklung einer methode zur erfassung der ungunstigsten beanspruchungen fur Querschnitte unter Biegung mit normalkraft". (Tesis doctoral en la Universidad de Rhem. Westfalia. 1973).

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA
ESCOLA POLITÈCNICA SUPERIOR
BIBLIOTECA

CAPÍTULO 10

LUCES, MÓDULOS DE DEFORMACIÓN E INERCIAS A CONSIDERAR EN EL CÁLCULO. TRASLACIONALIDAD E INTRASLACIONALIDAD DE LAS ESTRUCTURAS. REDUCCIÓN DE CARGAS PUNTUALES Y CARGAS UNIFORMES A LO LARGO DE LA LUZ. CASO DE CARGAS RÍGIDAS. INFLUENCIA DE LOS RELLENOS DE FÁBRICA SOBRE EL COMPORTAMIENTO DE LA ESTRUCTURA

10.1 LUCES DE CÁLCULO

La luz a considerar en el cálculo es la luz entre ejes. Cuando el ancho del pilar es muy pequeño respecto a la luz, frecuentemente se toma como momento negativo el momento en el eje del pilar del piso inferior (figura 10-1). Esto en definitiva es lo mismo que suponer la reacción concentrada en ese eje. En todo caso y en particular si el ancho del soporte es importante respecto a la luz, puede conseguirse una economía apreciable mediante el redondeo indicado en la figura 10-2. Dicho redondeo se basa en la suposición de un reparto uniforme de la reacción del dintel sobre el ancho de pilar inferior. Ello conduce a que en dicho ancho la ley de cortantes CDD'E , correspondiente a reacción en el eje del pilar, se transforme en la recta CE, con lo que en el tramo AB la ley de momentos debe ser una parábola de eje vertical, tangente a la curva M en A y a la M' en B. Trazadas las tangentes a M y M' en A y B y uniendo los puntos medios de AF y FB, G y H respectivamente, se obtiene una tercera tangente que permite un trazado suficientemente aproximado de la parábola. Si el ancho del pilar es apreciable, la diferencia entre los valores M_1 y M_2 puede ser muy importante.

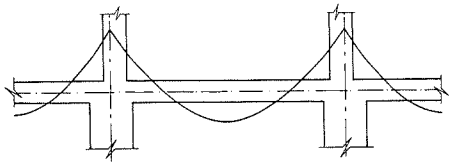


Figura 10-1

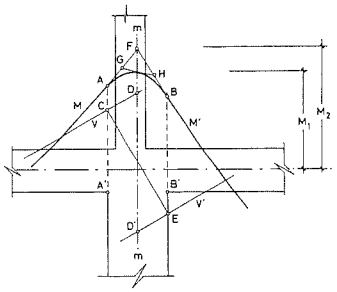


Figura 10-2

Un método alternativo es el adoptado por la norma francesa B.A.E.L.83 (10.1). De acuerdo con ella y con las notaciones indicadas en la figura 10-3 (en la que para mayor claridad se ha prescindido de los posibles pilares del piso superior) se denomina M' al momento en cara de apoyo y M al momento en el eje del mismo.

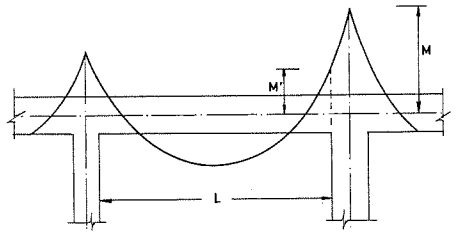


Figura 10-3

Llamando M" al momento de empotramiento de la viga de luz L, perfectamente empotrada y sometida a las mismas cargas en vano, y llamando M"' al menor de los valores M y M", se toma como momento para el cálculo el mayor de los dos valores M' y M"'.

10.2 MÓDULO DE DEFORMACIÓN

Si toda la estructura es de hormigón de aproximadamente la misma resistencia y edad, para la determinación de esfuerzos en el cálculo lineal es indiferente el valor que se tome. Si existen calidades diferentes, es necesario, para el cálculo de las rigideces, tomar valores proporcionales a los E_c de cada pieza. Este es el caso usual, por ejemplo en los edificios de gran altura, en los que se emplea hormigón de alta resistencia en pilares de la zona baja y media, y hormigón de resistencia más baja en pilares de la zona alta y en todas las vigas y forjados. (Véase el Capítulo 66).

En cualquier caso, si se desea calcular corrimientos o giros del entramado, es necesario introducir en el cálculo los valores reales de E_c que como veremos en el

Capítulo 31 dependen de muchos factores y en particular de la duración de la aplicación de las cargas. Esto obliga a calcular por separado los corrimientos y giros debidos a las cargas permanentes y sobrecargas de larga duración de los correspondientes a sobrecargas de breve duración.

10.3 MOMENTOS DE INERCIA A CONSIDERAR EN EL CÁLCULO

En el caso de los pilares, la incertidumbre se plantea fundamentalmente en cuanto a si debe tomarse el momento de inercia solamente de la sección de hormigón o debe tomarse la sección de hormigón más la de las armaduras. Habitualmente, en pilares de edificios de viviendas, oficinas, etc., la sección no estará fisurada, aunque en ciertos tipos de edificios industriales y de obras públicas puede estarlo y vale en ese caso lo que diremos para vigas.

Aún ciñéndonos, en la duda, a la consideración o no de la armadura, la diferencia es importante. Partiendo de las deformaciones comunes de la armadura y del hormigón que le rodea, la condición

$$\varepsilon_s = \varepsilon_c \qquad [10.1]$$

conduce a

$$\frac{\sigma_s}{E_s} = \frac{\sigma_c}{E_c} \qquad [10.2]$$

$$\sigma_s = \sigma_c \frac{E_s}{E_c} \qquad [10.3]$$

y llamando

$$m = \frac{E_s}{E_c} \qquad [10.4]$$

se obtiene, en definitiva, la condición de homogeneización de secciones, que consiste, al tomar momentos de inercia, en afectar las áreas de armaduras del coeficiente m establecido en [10.4][1].

En el cálculo de m aparece con E_c la dependencia con la duración del proceso de carga, según se trate de carga de actuación breve o larga. En muchos casos, sobre todo para cálculos simples, se toma m = 10, con independencia no sólo del proceso de carga, sino también de la resistencia del hormigón.

En la figura 10-4 se representa la variación de la relación $\frac{I_h}{I_o}$ (donde I_h es el momento de inercia de la sección con la armadura homogeneizada e I_o el de la sección bruta de hormigón) en pilares rectangulares con armaduras simétricas de cuantía geométrica ω.

1 Estrictamente hablando, el coeficiente debe ser m-1, salvo que al considerar la sección de hormigón se descuenten las áreas ocupadas por las armaduras.

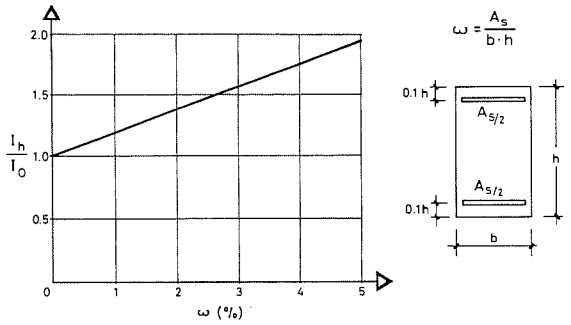


Figura 10-4

Como puede apreciarse, para las cuantías bajas habitualmente empleadas, la diferencia no es excesiva. *La práctica habitual es adoptar el momento de inercia I_o de la sección bruta de hormigón, es decir sin fisurar y despreciando las armaduras.*

Considerando ahora el caso de las vigas, los criterios posibles no sólo pueden diferenciarse por la consideración o no de las armaduras, sino también por la existencia de fisuras importantes en ciertas zonas de los dinteles y además por la incertidumbre incluso de la propia sección de pieza a considerar. A título de ejemplo, en la figura 10-5 se resumen algunos de los distintos valores del momento de inercia en el caso de un dintel de un edificio, de 250 · 500 mm², perteneciente a un entramado de una serie de ellos paralelos situados con 5 m de separación. El forjado se supone que es una losa maciza de 200 mm.

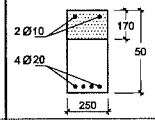
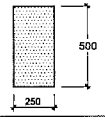
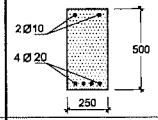
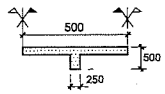
CASO	SECCIÓN CONSIDERADA		VALOR DE I (mm^4)
A		Sección de hormigón fisurada, con homogeneización de armaduras	$153300 \cdot 10^4$
B		Sección de hormigón sin contar fisuración ni armadura	$260400 \cdot 10^4$
C		Sección de hormigón sin contar fisuración y homogeneizando armaduras	$322300 \cdot 10^4$
D		Sección de hormigón de viga y losa de forjado sin contar fisuración ni considerar las armaduras	$826300 \cdot 10^4$

Figura 10-5

Obsérvese la enorme diferencia entre estos casos, en especial entre los A, B, C y el D. La trascendencia de esta consideración en cuanto a los valores obtenidos para los esfuerzos no es sin embargo tan importante como podría pensarse.

En la figura 10-6, se representan las leyes de momentos flectores de un entramado de tres vanos de 5 m de luz, cuyo dintel es el considerado en la figura 10-5, con soportes de 300 · 300 y 3 m de altura, al variar los momentos de inercia según las hipótesis A, B, C y D.

Puede observarse que la única diferencia importante se registra en el vano extremo, donde la hipótesis D conduce a un momento flector en apoyo extremo y pilar algo inferior a la mitad del obtenido en la hipótesis A. Sin embargo, los momentos en vano difieren en mucha menor medida. Volveremos sobre esto en el Capítulo 14.

La práctica habitual en dinteles es también considerar el momento de la sección bruta de hormigón, es decir sin fisurar y sin homogeneizar las armaduras[1]. Esto representa un valor medio de las posibilidades A, B y C expuestas. En algunos casos, cuando el forjado asociado es macizo de hormigón, algunos proyectistas consideran su sección, es decir adoptan la hipótesis D de la figura 10-5. Los resultados no han conducido a estructuras incorrectas, por razones que analizaremos en el Capítulo 14.

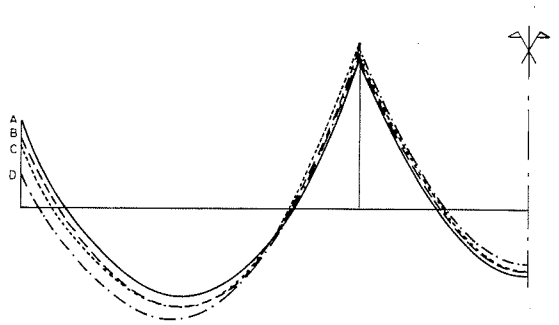


Figura 10-6

10.4 TRASLACIONALIDAD E INTRASLACIONALIDAD DE LOS ENTRAMADOS

En los Capítulos 4 y 5 vimos los métodos de cálculo correspondientes a ambos casos. El problema básico es establecer cuando un entramado debe ser considerado como traslacional o intraslacional.

En realidad todos los entramados son traslacionales. Su consideración como intraslacionales sólo es válida cuando pueda ser establecido que los corrimientos horizontales resultan despreciables, dicho de otra manera, que los esfuerzos resultantes

1 Recuérdese qne nos referimos por el momento al cálculo lineal de esfuerzos en el entramado. En cálculo no lineal, se abandona por supuesto esta hipótesis

en cualquier sección al considerar el entramado como intraslacional no difieren sensiblemente de los obtenidos con el cálculo traslacional, con lo cual se entra, en la práctica, en un círculo vicioso.

El tema es importante, no sólo desde el punto de vista de los valores de los esfuerzos, sino también para lo referente al cálculo a pandeo de los pilares, como veremos en el Capítulo 45.

Desgraciadamente no es posible dar una regla clara que permita una clasificación. Generalmente los entramados de edificios industriales y muchos de los de obras públicas deben calcularse como traslacionales. En los entramados de varios pisos y vanos, habituales en edificios de viviendas y oficinas, pueden calcularse como intraslacionales aquellos cuya altura no supere el doble de su longitud, siempre que su tabiquería sea de ladrillo cerámico o de rigidez equivalente y la densidad de tabiquería no sea inferior a 0,4 m lineales de tabique por m^2 de planta y con fachadas rigidizadas por fábrica de ladrillo u otra de rigidez equivalente.

En cualquier caso, los edificios situados en zonas que exijan cálculo sísmico, deben ser siempre calculados como traslacionales, salvo que se dispongan elementos especiales, tales como pantallas y núcleos, adecuadamente combinados.

En el criterio anteriormente expuesto, se parte de una cierta colaboración de fachadas y tabiquerías con los entramados para aceptar su intraslacionalidad. Debe prestarse atención a aquellos tipos de tabiquería y fachada de poca o ninguna rigidez y a aquellos tipos de edificios de poca tabiquería. Ampliamos este punto en el Apartado 10.7.

10.5 REDUCCIÓN DE CARGAS PUNTUALES Y CARGAS UNIFORMES A LO LARGO DE LA LUZ

En el caso de cargas de cualquier tipo cercanas a los apoyos sobre los pilares, actuando sobre vigas de hormigón armado, la experimentación ha demostrado que estas cargas se encauzan hacia los apoyos (figura 10-7) sin efecto apreciable sobre los esfuerzos cortantes, aunque sí producen tracciones T en la armadura. Por todo ello, EHE (10.2) establece que las cargas actuantes sobre el soporte o a distancias a cada lado de d, siendo d el canto útil, no es necesario que sean consideradas a efectos del cálculo del esfuerzo cortante entre las secciones A-A y B-B (figura 10-8)

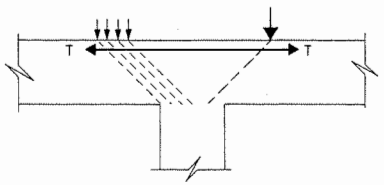


Figura 10-7

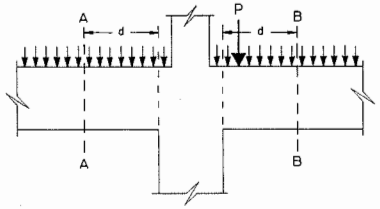


Figura 10-8

Esto puede no sólo proporcionar una economía importante en el cálculo de estructuras industriales o de obras públicas, frecuentemente sometidas a fuertes cargas

puntuales, sino que permite una economía sistemática apreciable en el cálculo a esfuerzo cortante de todo tipo de estructuras.

Como ejemplo, en la figura 10-9 se representa un dintel continuo. Si se supone una distribución simétrica de esfuerzos cortantes debidos a carga uniforme, la aplicación de lo anterior conduce a dimensionar a esfuerzo cortante para el valor 1'-1' en lugar de 1-1. Llamando V al valor 1-1 y V' al 1'-1'

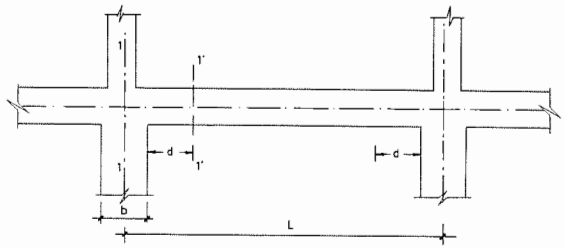


Figura 10-9

$$\frac{V'}{V} = \frac{\frac{L}{2} - \frac{b}{2} - d}{\frac{L}{2}} \qquad [10.5]$$

y con $d \approx \frac{1}{10} L$ y $b \approx \frac{2}{3} d$, que es un caso medio frecuente, sustituyendo, se obtiene:

$$\frac{V'}{V} = 0{,}73 \qquad [10.6]$$

es decir, se reduce el valor de cálculo del esfuerzo cortante en un 27%.

Lo anterior debe ser considerado cuidadosamente, pues en definitiva, la zona entre las secciones A-A y B-B de la figura 10-8, constituye como veremos en el Capítulo 33 una "región D" o región de discontinuidad. Si la carga P es muy importante frente a las restantes cargas del dintel, la situación de la región puede estar más próxima a una ménsula (véase el Capítulo 58) que a una viga y tanto las compresiones indicadas en la figura 10-7 como los requisitos de armadura horizontal suplementaria de alma deben ser evaluados[1].

Todo lo anterior es válido para cargas aplicadas a la cabeza superior de la viga. Si se trata de cargas colgadas o de secciones de formas especiales, lo anterior no es en principio válido. Véase el Capítulo 39 que contiene información detallada.

1 Los accidentes han sido numerosos. Ya en el principio de los años 70 INTEMAC diagnosticó el fallo y estudió la solución de refuerzo en una estructura importante por esta causa. Una exposición sucinta puede verse en J. CALAVERA. "PATOLOGÍA DE ESTRUCTURAS DE HORMIGÓN ARMADO Y PRETENSADO", 1er tomo, Págs. 153 y siguientes (10.3).

10.6 CASO DE CARGAS RÍGIDAS

En general, en el cálculo de estructuras se presupone que la carga aplicada a las piezas es flexible, es decir, acompaña a la pieza en su deformación, sin que dicha deformación altere la distribución de la acción de las cargas. En algunos pocos casos esto es así y la carga es de tal rigidez que no sigue a la pieza en su deformación[1].

Un caso de gran importancia para lo que nos ocupa es el de muros de ladrillo sobre dinteles de hormigón, tal como se indica en la figura 10-10.

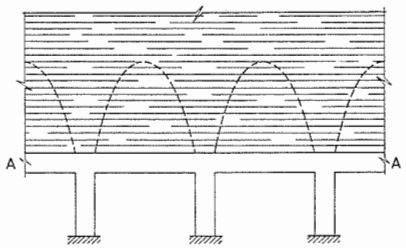


Figura 10-10

La fábrica de ladrillo sobre el dintel A-A no puede deformarse para seguir al dintel en su deformación. En la realidad sólo las zonas de carga interiores a unos ciertos arcos de descarga deben ser realmente consideradas como carga a efectos de flexión y de corte. El establecimiento de la ley de formación de los arcos de descarga es complejo y por ello la Norma Básica NBE FL-90 (10.4) establece que, cuando por encima y a los lados de un dintel exista muro que permita producir efecto arco, sin huecos que lo perturben, se considerará sólo como carga el peso de muro comprendido en una altura 0,6 L, siendo L la luz entre ejes del vano, debiendo considerarse también todas las cargas de forjados y aisladas situadas hasta una altura L.

El resto de las cargas, como hemos dicho, no se consideran ni a efectos de flexión ni de corte, pero naturalmente deben ser consideradas íntegramente a efectos del cálculo de los esfuerzos axiles en los pilares.

En la aplicación de lo anterior debe prestarse atención a la existencia de ventanas y otros tipos de huecos que pueden perturbar la formación de arcos de descarga.

Para un cálculo más preciso, véase (10.5).

10.7 INFLUENCIA DE LOS RELLENOS DE FÁBRICA EN EL COMPORTAMIENTO DE LOS ENTRAMADOS

Ya hemos comentado la influencia que los rellenos, incluidos los de simple tabiquería, tienen sobre el comportamiento de los entramados tanto desde el punto de vista resistente como de deformabilidad y su relación por tanto con la posible intraslacionalidad de los mismos.

1 Una excepción típica la constituyen las vigas de cimentación. Véase 63.16.

El tema que abordamos ahora es el de rigidización de los entramados mediante rellenos claramente resistentes, que introducen una alteración sustancial del funcionamiento de los entramados. Su disposición afecta tanto a la resistencia a acciones verticales como horizontales, aunque su uso más frecuente es para mejorar la resistencia y la rigidez del entramado frente a estas últimas, constituyendo en cierto modo una solución alternativa a la de pantallas que veremos en el Capítulo 21.

En todo lo que sigue, se supone que el relleno está en contacto íntimo con pilares y dinteles, siendo frecuente que estos últimos sean hormigonados sobre el propio relleno. La figura 10-11, tomada de la referencia (10.6) indica una disposición usual.

10.7.1 TRANSMISIÓN DE CARGAS VERTICALES

a) *Caso en que todos los recuadros están rellenos.* (figura 10-12). Llamando E_2 al módulo de deformación del hormigón del entramado y E_r, al del material de relleno, el conjunto funciona como una sección compuesta. Designaremos por $A_{c1}, A_{c2}, \ldots A_{cn}$ las secciones de los pilares[1] y por $A_{r1}, A_{r2} \ldots A_{r,n-1}$ las secciones horizontales de los paneles de relleno.

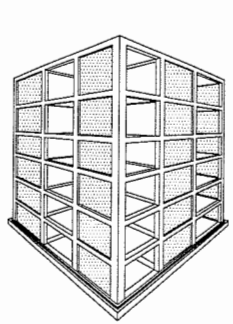


Figura 10-11

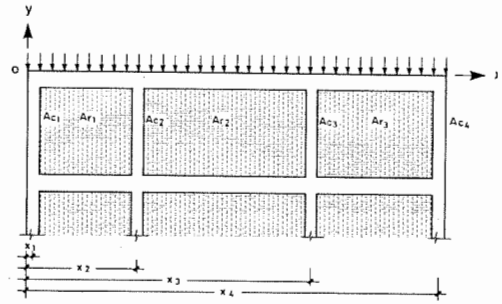


Figura 10-12

El área equivalente, expresada en términos de sección de hormigón, al ser comunes los acortamientos verticales de hormigón y relleno, resulta

$$A_{cq} = \sum A_{ci} + \frac{E_r}{E_c} \sum A_{ri} \qquad [10.7]$$

Si es N la carga vertical total, la tensión en el hormigón resulta por tanto

1 En sentido estricto deberían manejarse las secciones homogeneizadas, es decir obtenidas al añadir el área de la sección de hormigón (m-1) A_s, donde A_s es el área de la armadura vertical de los pilares y $m = \frac{E_s}{E_c}$ la relación del módulo de elasticidad del acero al módulo de deformación del hormigón.

$$\sigma_c = \frac{N}{\sum A_{ci} + \frac{E_r}{E_c}\sum A_{ri}} \qquad [10.8]$$

y la tensión en el relleno

$$\sigma_r = \frac{E_r}{E_c}\sigma_c = \frac{N}{\frac{E_c}{E_r}\sum A_{ci} + \sum A_{ri}} \qquad [10.9]$$

Conocida la tensión en el hormigón es inmediato el cálculo del esfuerzo axil en cada pilar, que deberán ser comprobados de acuerdo con el Capítulo 28. La tensión σ_r deberá ser comparada con el valor límite correspondiente al tipo de material empleado para el relleno.

b) *Caso en que algún recuadro no está relleno.* Este caso presenta particularidades que deben ser tenidas en cuenta (figura 10-13). Si en la columna de recuadros alguno aislado no está relleno, como el ABCD de la figura, la pieza AB funciona como una viga que puede suponerse perfectamente empotrada, ya que el giro de los nudos A y B está rígidamente bloqueado por el relleno. En cambio la pieza CD no sufre flexiones y su cálculo se rige por lo dicho en a).

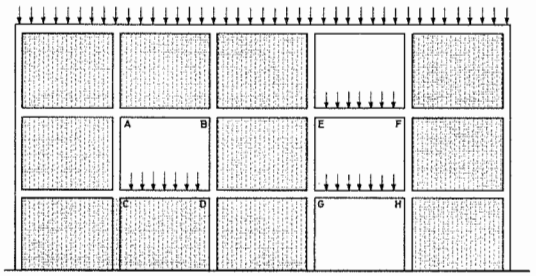


Figura 10-13

Si una columna de recuadros completa no está rellena, las piezas EF, GH, etc. recibirán cargas de forjados y prácticamente funcionan como perfectamente empotradas.

10.7.2 TRANSMISIÓN DE CARGAS HORIZONTALES

El problema ha sido poco estudiado, aunque, actualmente están en marcha numerosas investigaciones en muchos países. Los trabajos de STAFFORD y RIDDINGTON (10.7) y los de PARDUCCI y CHECCHI (10.6), así como los de

BERTERO y BROKKEN de la referencia (10.8), contienen información adicional importante. Véanse también los trabajos de T. TASSIOS y E. VINTZELEOU realizados en la Universidad de Atenas (10.9).

La figura 10-14 tomada de la referencia (10.6) indica los tres modos típicos de agotamiento de los rellenos, que habitualmente se hacen con materiales frágiles, aunque los ensayos han demostrado que la interacción con el entramado ductiliza en cierto grado su comportamiento.

- La figura 10-14 a) indica una rotura por corte horizontal.
- La 10-14 b) corresponde a una rotura por tracción diagonal.
- Finalmente, la 10-14 c) corresponde a un agotamiento por compresión del material del relleno.

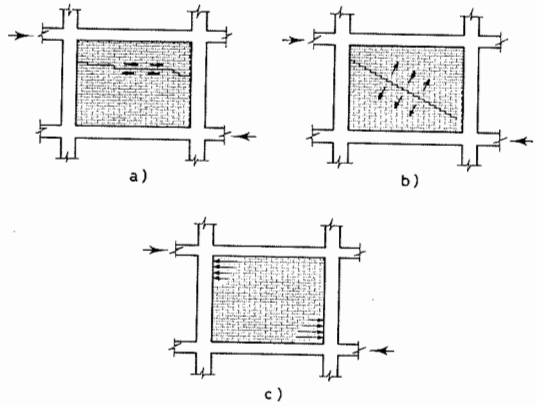


Figura 10-14

En lo que sigue, nos basamos en un método simplificado expuesto por FUENTES en la referencia (10.10).

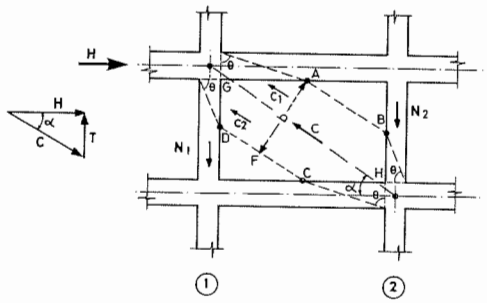


Figura 10-15

La biela comprimida que se considera resistente a efectos de cálculo, es la indicada como ABCD en la figura 10-15, donde H es la fuerza horizontal a ser resistida por el recuadro considerado. Los puntos A, B, C, D, se obtienen a partir de los ángulos θ indicados, siendo tg $\theta = 3$[1].En nuestro caso, el ancho mínimo de la biela es el AF = b y, llamando α a su ángulo con el plano horizontal, se tiene que la fuerza C de compresión en la biela viene dada por

$$C = \frac{H}{\cos \alpha} \qquad [10.11]$$

La compresión C puede considerarse descompuesta en dos, C_1 y C_2, actuando en los puntos medios de AG y DG respectivamente, con valores

$$C_1 = C \frac{AG}{AG + DG} \qquad [10.12]$$

$$C_2 = C \frac{DG}{AG + DG} \qquad [10.13]$$

C_1 introduce un esfuerzo axil en el dintel de valor $C_1 \cos \alpha$ y un momento flector producido por su componente vertical C_1 sen α actuando en AG, además de un cortante igual a C_1 sen α menos la carga descendente aplicada en AG, si es que existe.

Debe comprobarse también que la componente vertical de C_2 , más el eventual cortante ascendente producido por C_1 sen α son menores que el esfuerzo axil N_1 del pilar 1.

Análogamente se procede para la comprobación a flexión y corte de las zonas GD, HB y HC.

Conocido el valor de C y el espesor e del relleno, la tensión en el relleno en la dirección α viene dada por

$$\sigma_r = \frac{C}{b \cdot e} = \frac{H}{b \cdot e \cos \alpha} \qquad [10.14]$$

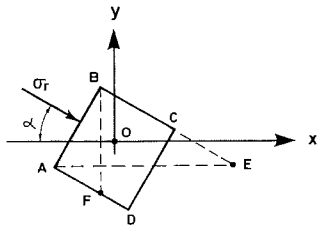


Figura 10-16

1 Insistimos en el carácter puramente aproximado del método, PARDUCHI y CHECCHI en la referencia (10.6) toman AG igual a la mitad de la luz libre.

De acuerdo con la figura 10-16, la tensión σ_r actúa sobre un cuadro elemental de lado unidad. La componente según el eje horizontal OX vale

$$\sigma_x = \frac{\sigma_r \cos \alpha}{BF}$$

y como

$$BF = \frac{AB}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$\sigma_x = \sigma_r \cos^2 \alpha \qquad [10.15]$$

La tensión tangencial paralela a OY vale

$$\tau_{yx} = \frac{\sigma_r \text{ sen } \alpha}{BF} = -\sigma_r \text{ sen } \alpha \cos \alpha$$

La componente según OY se deduce de

$$\sigma_y = \frac{\sigma_r \text{ sen } \alpha}{AE}$$

y como

$$AE = \frac{1}{\text{sen } \alpha}$$

$$\sigma_y = -\sigma_r \text{ sen}^2 \alpha \qquad [10.16]$$

Naturalmente

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_r \cos \alpha}{AE} = \sigma_r \text{ sen } \alpha \cos \alpha \qquad [10.17]$$

En el relleno, la tensión vertical total será

$$\sigma_v = \sigma_1 \cdot \sigma_r \text{ sen}^2 \alpha \qquad [10.18]$$

donde σ_1 es la compresión transmitida por el dintel superior si existe.

$$\sigma_x = \sigma_r \cdot \cos^2 \alpha$$

$$\sigma_y = \sigma_1 + \sigma_r \text{ sen}^2 \alpha$$

$$\tau_{xy} = \sigma_r \text{ sen } \alpha \cos \alpha \qquad [10.19]$$

trazamos el círculo de MOHR (Fig. 10-17)

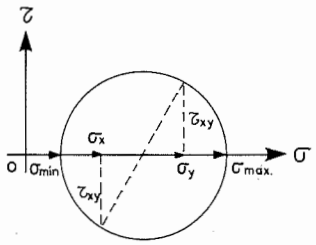


Figura 10-17

con lo que obtenemos las tensiones máximas y mínimas en el relleno. Actualmente no existe una normalización específica en cuanto a tensiones máximas admisibles en los diversos materiales de relleno. SAMARASINGHE, PAGE y HENDRY (10.11) y STAFFORD SMITH (10.12) han realizado ensayos muy interesantes para el caso particular de rellenos de ladrillo.

FUENTES en la referencia (10.10) recomienda que la altura del paño de relleno no rebase 15 veces el espesor ni 20 veces la menor dimensión del soporte. Ambas recomendaciones están basadas en consideraciones de inestabilidad.

BIBLIOGRAFÍA

(10.1) "Regles techniques de conception et de calcul des ouvrages et constructions en beton arme suivant la methode des etats limites". REGLES BAEL 83. Eyrolles. París, 1983.

(10.2) EHE "Instrucción para el Proyecto y la Ejecución de Obras de Hormigón Estructural". Ministerio de Fomento. Madrid, 1998.

(10.3) CALAVERA, J. "Patología de estructuras de hormigón armado y pretensado". INTEMAC. Madrid, 1996.

(10.4) Norma Básica de la Edificación NBE FL-90, "Muros resistentes de fábrica de ladrillo. Ministerio de Obras Públicas y Urbanismo. Madrid, 1991.

(10.5) BEALL, C. "Masonry design and detailing". Prentice Hall. New Jersey, 1984.

(10.6) PARDUCCI, A.; CHECCHI, A. "Interazione dei pannelli di muratura con i telai di cemento armato: comportamento del sistema strutturale per azioni complanari". L'Industria Italiana del Cemento 2/1982.

(10.7) STAFFORD SMITH, B.; RIDDINGTON, J.R. "The design of masonry infilled steel frames for bracing structures". The Structural Engineer. Marzo, 1978.

(10.8) BERTERO, V.; BROKKEN, S. "Infills in seismic resistant building". Journal ASCE Structural Division. 1983.

(10.9) VINTZELEOU, E. "Seismic behaviour and design of infilled reinforced concrete frames". Conferencia pronunciada en el Colegio de Ingenieros de Caminos de Madrid, 18-1-1990.

(10.10) FUENTES, A. "Cálculo práctico de estructuras de edificios en hormigón armado". Editores Técnicos Asociados. Barcelona, 1976.

(10.11) SAMARASINGHE, W.; PAGE, A.W.; HENDRY, A.W. "Behaviour or brick masonry shear walls". The Structural Engineer. Septiembre, 1981.

(10.12) STAFFORD SMITH, B. "Model test results of vertical and horizontal loading of infilled frames". ACI Journal 1968.

CAPÍTULO 11

ENLACES TEÓRICOS Y ENLACES REALES. APARATOS DE APOYO. RÓTULAS PLÁSTICAS. BROCHALES. ENLACE DE LOS PILARES A LA CIMENTACIÓN

11.1 TIPOS DE ANCLAJE

En todo lo anterior hemos contemplado en general tres tipos de enlaces entre piezas. Por un lado el empotramiento, que es el más frecuente en estructuras de hormigón y en el cual reside su ventaja del monolitismo. A veces hemos considerado la existencia de rótulas y también de apoyos deslizantes.

Estos enlaces teóricos presentan dificultades inevitables para ser materializados de forma perfecta en la práctica, aunque su técnica ha progresado de manera importante en los últimos años.

El uso de rótulas y apoyos deslizantes es poco frecuente en los edificios de entramados múltiples y se usa en cambio con más frecuencia en los edificios de grandes luces (industriales, deportivos, salas de espectáculos, etc.) y en muchas obras públicas, en especial en los puentes.

11.2 CLASES DE APOYOS

Los apoyos de las estructuras son una necesidad relativamente reciente, fundamentalmente motivada por la aparición de las estructuras metálicas y de hormigón en el siglo XIX.

Hasta ese momento, las estructuras de piedra y ladrillo cuando alcanzaban luces considerables presentaban grandes espesores de forma que eran poco sensibles a los

efectos de los cambios de temperatura. Con la aparición de la fundición, del acero y del hormigón, las estructuras se independizan notablemente del resto de los materiales de las construcciones y se hacen exentas y más ligeras lo que las hace mucho más sensibles a las variaciones térmicas y a las deformaciones (giros y corrimientos) producidos por las cargas. Ello motiva la necesidad de idear elementos de apoyo que permitan tales movimientos.

Existe otro origen diferente de la necesidad de elementos de apoyo, que se indica esquemáticamente en la figura 11-1.

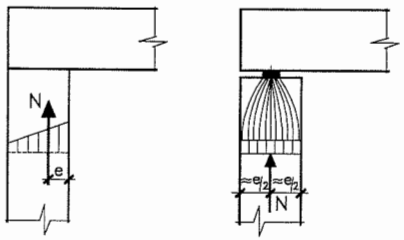


Figura 11-1

El apoyo de la losa en el muro, de forma directa (Fig. 11-1 a)) hace seriamente imprecisos tanto el conocimiento del punto de paso de la resultante como el de la distribución de tensiones sobre el apoyo. Esto no sólo dificulta el cálculo del muro, sino que puede producir daños en la zona de contacto en el mismo, sometida a mayores tensiones.

La solución de intercalar un pequeño elemento de apoyo (Fig. 11-1 b)), permite un conocimiento mucho más preciso del punto de paso de la resultante y conduce a una reducción de la tensión máxima sobre el apoyo. En este caso, la intención al emplear el elemento de apoyo no es la de facilitar corrimientos o giros de la estructura en el apoyo, sino localizar la reacción. Por supuesto, ambas necesidades se presentan a veces juntas en la práctica.

a) APOYOS DE FUNDICIÓN O ACERO

El desarrollo histórico de los apoyos arrancó con los apoyos metálicos de fundición o de acero y comenzó con los simples apoyos de rodillo único (Fig. 11-2 a)) que permitieron el giro y el corrimiento para cargas moderadas, y con la solución de rótula de la figura 11-2 b).

Para grandes reacciones, los trenes de rodillos (Fig. 11-2 c)) dieron una respuesta satisfactoria en cuanto a los corrimientos, pero no válida para los giros. Una solución fue la de rótulas sobre trenes de rodillos (Fig. 11-2 d)). La necesidad de giros multidireccionales que presentaban algunas estructuras fue resuelta mediante el desarrollo de las rótulas esféricas. (Fig. 11-2 e)).

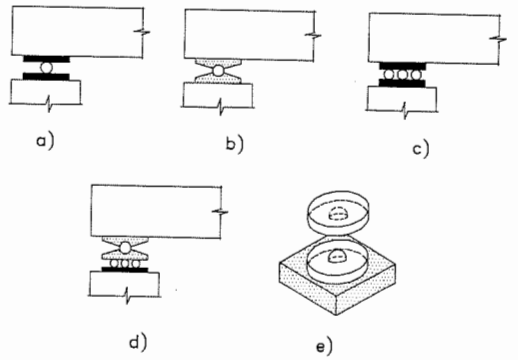


Figura 11-2

Aunque como veremos más adelante los apoyos elastoméricos se han impuesto en muchas aplicaciones por ser una respuesta excelente a un gran número de problemas, no debe creerse por ello que los apoyos metálicos han perdido su interés, pues para grandes reacciones o cuando se presenta la necesidad de grandes giros, los apoyos metálicos siguen siendo la mejor solución.

b) APOYOS DE PLOMO

Durante un cierto tiempo se emplearon planchas de plomo como apoyos deslizantes. Su empleo estaba basado en la propiedad del plomo de fluir en las direcciones paralelas al plano medio de la plancha, bajo tensiones de compresión del apoyo moderadas. En la práctica tal propiedad desaparece cuando el plomo tiene pequeños porcentajes de antimonio, muy frecuentes en las planchas comerciales de plomo. Su uso, que se restringió a luces moderadas, ha sido abandonado.

c) APOYOS ELASTOMÉRICOS

Se denomina elastómeros a un grupo amplio de materiales como el caucho natural o productos sintéticos de propiedades similares, muy variables de unos tipos a otros. El caucho natural ha sido empleado con frecuencia como apoyo, pero las limitaciones que presentaba condujeron al desarrollo de materiales sintéticos, conocidos como elastómeros, de los cuales desde los años 50 el más conocido y empleado es el Neopreno (Clorocaucho). Otros elastómeros en uso actualmente son el Caucho-Butilo vulcanizado, que presenta numerosos derivados, así como el Caucho-Nitrilo, el Caucho Butadieno-Estireno, etc. Sin embargo, actualmente el Neopreno cubre la mayoría de las aplicaciones aunque la información que sigue en este apartado se refiere a los elastómeros en general.

Debe advertirse que esta información, dada la variabilidad de los productos comerciales, incluso dentro del mismo tipo, es una información genérica y la aplicación de cada marca concreta debe, por el momento realizarse de acuerdo con la información específica que facilite el fabricante de cada producto comercial.

Los elastómeros son un material que necesita mantenimiento y es atacable por los derivados del petróleo, el oxígeno y el ozono. Como veremos, a bajas temperaturas sufren un proceso de cristalización. Sin embargo, en condiciones normales los apoyos de este tipo tienen una vida más larga que la previsible para las estructuras de hormigón, aunque es **una buena regla de prudencia disponerlos de forma que puedan ser reemplazados sin coste excesivo.**

Los apoyos de elastómero se emplean también como elementos amortiguadores de vibraciones en las estructuras.

c-1) *COMPORTAMIENTO EN COMPRESIÓN.*

Un apoyo de elastómero, cuando se somete a compresión experimenta un cierto acortamiento. Las dos caras en contacto con la estructura, por el rozamiento con ésta no se expanden, pero si lo hace el resto del neopreno, tal como se indica en la figura 11-3. El espesor t_1 se reduce al t_2, con lo que la estructura experimenta un cierto corrimiento en sentido perpendicular al plano medio del apoyo. La rigidez vertical del apoyo depende en gran medida de la libertad que el elastómero tenga para su expansión transversal.

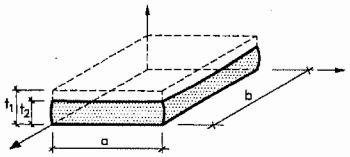
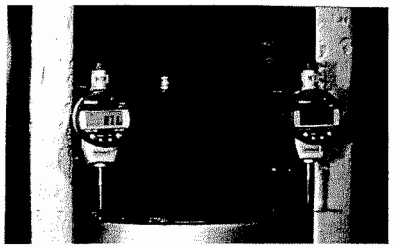


Figura 11-3



Ensayo a compresión en pieza de neopreno (Cortesía de INTEMAC)

Figura 11-4

Este concepto se expresa mejor a través de lo que se denomina "Coeficiente de forma", C_f.

$$C_f = \frac{S_c}{S_e} \qquad [11\text{-}1]$$

donde:

S_c = Superficie de contacto del apoyo

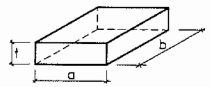
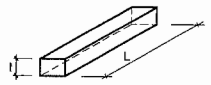
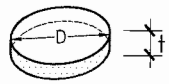
S_e = Superficie de expansión libre

En la figura 11-4 se indica un ensayo de este tipo.

La tabla T-11.1 recoge los valores de C_f para las formas de apoyo usadas en la práctica.

TABLA T-11.1

COEFICIENTES DE CARGA, C_f, PARA LAS FORMAS USUALES DE APOYOS

FORMA DEL APOYO	COEFICIENTE DE FORMA DEL APOYO C_f
 RECTANGULAR	$\frac{ab}{2t(a+b)}$
 TIRA	$\frac{L}{2t}$
 CIRCULAR	$\frac{D}{4t}$

(*) t es el espesor de cada capa de neopreno del apoyo. Es decir, el espesor entre chapas si, como veremos más adelante, se trata de un apoyo zunchado.

La rigidez vertical del apoyo crece con el coeficiente de forma. Llamando E al módulo elástico del elastómero, el acortamiento unitario del apoyo bajo una tensión uniformemente σ_a viene dado por la expresión

$$\varepsilon_a = \frac{\sigma_a}{E_n\,(1 + 2kC_f^2)} \qquad [11.2]$$

donde k es un coeficiente experimental característico de cada tipo de elastómero.

La Tabla T-11.2 contiene valores indicativos de E y k, en función del índice de dureza.

TABLA T-11.2[1]

PROPIEDADES APROXIMADAS DE LOS ELASTÓMEROS

Índice de dureza	Módulo elástico E_N	Módulo de rigidez longitudinal G	k
I_{RHD}	N/mm²	N/mm²	
50	2,3	0,6	0,75
60	3,7	1,0	0,60
70	6,2	1,4	0,55

El valor $E_n\ (1 + 2kC_f^2)$ recibe el nombre de módulo de elasticidad aparente, E_a, y es un valor que no sólo depende de la calidad del elastómero sino también de las dimensiones concretas del apoyo.

La expansión transversal aumenta por tanto el acortamiento del apoyo, pero la experiencia demuestra que el incremento que representa no supera el 10%, si el Coeficiente de Forma no rebasa el valor 6.

El neopreno zunchado consiste en la solución de intercalar chapas de acero entre otras de elastómero lo que permite aumentar su coeficiente de forma y por tanto su módulo de elasticidad aparente y reducir la expansión transversal (Fig. 11-5).

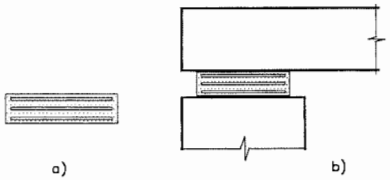


Figura 11-5

c-2) *COMPORTAMIENTO A ESFUERZO CORTANTE*

Suponiendo que al solicitarse el apoyo a esfuerzo cortante, por la fuerza *F* que produce el corrimiento de la estructura paralelo al plano medio del apoyo, no se producen desplazamientos en la cara de contacto del apoyo, la relación entre las fuerzas *F* (y por tanto de las tensiones de corte $\tau_a = \frac{F}{S_a}$ en el apoyo) y el corrimiento δ_a, es prácticamente lineal.

La deformación unitaria por esfuerzo cortante (o distorsión angular) es la tangente del ángulo γ, y por tanto (Fig. 11-6)

1 Tomada de la Referencia (11.1).

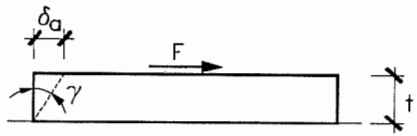


Figura 11-6

$$tg\ \gamma = \frac{\delta_a}{e_n} \qquad [11.3]$$

donde e_n es el espesor total de elastómero (sin contar el espesor de chapas si el apoyo es zunchado). Llamando *G* al módulo de rigidez tangencial del elastómero, se tiene

$$\tau = tg\ \gamma \cdot G \qquad [11.4]$$

y con $\tau = \frac{F}{S_a}$

$$tg\ \gamma = \frac{F}{S_a \cdot G} \qquad [11.5]$$

La fuerza *F* vale por tanto

$$F = \frac{\delta_a}{e_n} \cdot S_a \cdot G \qquad [11.6]$$

La Tabla T-11.2 contiene valores indicativos de *G*.

c-3) *GIRO DEL APOYO*

Normalmente la pieza presenta un giro α_t en el apoyo (Fig. 11-7), que produce presiones linealmente variables a lo largo del mismo.

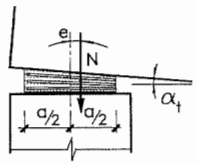


Figura 11-7

El valor máximo admisible para α_t suele ser determinado experimentalmente por el fabricante, pero en ausencia de datos específicos debe limitarse al valor

$$\alpha_t \leq \frac{3}{C_f} \cdot n \cdot \left(\frac{t}{a}\right)^2 \cdot \frac{\sigma_m}{G} \qquad [11.7]$$

donde:

C_f = Coeficiente de forma

n = Número de capas de elastómero

a = Ancho del apoyo en la dirección de la directriz de la pieza que experimenta el giro, en mm.

σ_m= Tensión media de compresión del apoyo en N/mm²

t = espesor de cada capa de neopreno, en mm

G = Módulo de rigidez transversal, en N/mm²

El giro produce un descentramiento de la carga N de valor $e = \frac{M}{n}$, pudiendo adoptarse

$$M = \alpha \frac{a^5 b G}{50 t^3} \cdot 10^{-6} \quad \text{para apoyos rectangulares} \qquad [11.8]$$

$$M = \alpha \frac{D^6 \cdot G}{100 t^3} \cdot 10^{-6} \quad \text{para apoyos circulares} \qquad [11.9]$$

donde:

b es la longitud de apoyo en dirección paralela al eje de giro y a la longitud en la dirección perpendicular

$\alpha = \frac{\alpha_t}{n}$ el giro de cada capa de elastómero, en radianes

D = Diámetro del apoyo, en mm

M = Momento en m kN

En [11.8] y [11.9] M se obtiene en m kN para a, b, D y t en mm y G en N/mm².

c-4) *FLUENCIA*

Los elastómeros presentan un aumento gradual de la deformación a tensión constante, en el transcurrir del tiempo, es decir presentan el fenómeno de fluencia. La deformación de fluencia es exponencial con el tiempo, disminuyendo su velocidad de crecimiento rápidamente. Un valor usual de la deformación total por fluencia es un 1/3 de la elástica. Este fenómeno se produce tanto para tensiones de compresión como para tensiones cortantes. Si cesa la actuación, se produce una recuperación parcial de la deformación, también con ley exponencial en función del tiempo, quedando una cierta deformación remanente.

c-5) *CRISTALIZACIÓN*

Los elastómeros se hacen más rígidos al descender su temperatura, hasta producirse una cristalización, que los hace frágiles al impacto. El fenómeno es reversible si se incrementa de nuevo la temperatura. El material sin embargo presenta un comportamiento satisfactorio entre -25ºC y +100ºC, lo que cubre la mayoría de las necesidades usuales en la práctica. Por otra parte existen productos especiales con propiedades para necesidades específicas.

d) RÓTULAS DE HORMIGÓN

Prácticamente la única modalidad de rótula hoy en uso es la rótula plástica, que se ha impuesto por su facilidad de construcción y gastos nulos de mantenimiento.

Sus métodos de cálculo han ido perfeccionándose mediante la investigación experimental debiendo destacarse la labor de MESNAGER y FREYSSINET, que crearon sus tipos de rótulas entre 1920 y 1940. El primero que empleó rótulas de hormigón de una manera sistemática fue MESNAGER, con los tipos indicados como a) y b) en la figura 11-8. FREYSSINET empleó el tipo indicado en la figura 11-8c), que es hoy el usual.

Es necesario observar que en la solución de MESNAGER la carga vertical es resistida por las armaduras cruzadas y el hormigón cumple prácticamente una función de protección. Su capacidad de absorber reacciones horizontales es limitada, pero puede resistir tracciones.

La solución de FREYSSINET, es claramente la mejor, pero no usa armaduras pasantes, por lo que no puede resistir tracciones. Su funcionamiento se basa en la plastificación del hormigón en la zona de la garganta.

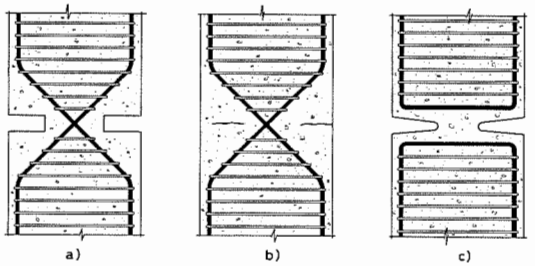


Figura 11-8

11.3 CÁLCULO DE DISPOSITIVOS DE CENTRADO DE CARGAS

En muchos casos, como se ha dicho, interesa simplemente localizar la reacción, sin que resulte necesario facilitar el giro ni el corrimiento. En definitiva la intención se reduce en unos casos a asegurar el centrado de la carga sobre un apoyo o a asegurar el conocimiento del punto de paso de la reacción en otros. Un caso general se indica en la figura 11-9, que representa el apoyo de una viga en un pilar o también el de una losa en un muro.

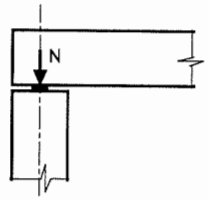


Figura 11-9

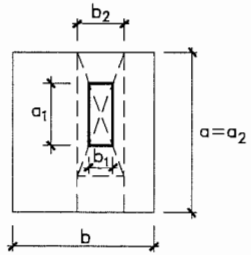


Figura 11-10

Para valores moderados de N una solución, aparte del empleo de apoyos elastoméricos zunchados que veremos en 11.4, es el empleo de apoyos elastoméricos sin zunchar, que admiten tensiones de compresión de 1 a 5 N/mm² según sus dimensiones.

Para valores mayores de N, una solución simple y económica es intercalar una tira de chapa lisa de fibrocemento. La presión sobre el fibrocemento, siendo a y b sus dimensiones en mm y N el valor de la reacción en kN, debe cumplir la condición

$$\sigma = 1000\frac{N}{ab_1} \leq 10 \text{ MPa} \qquad [11.10]$$

Si los valores de N son muy altos, una solución mejor será la indicada en 11.4, con empleo de apoyos de neopreno zunchado.

En cualquier caso, de acuerdo con EHE (11.2), siendo a y b las dimensiones del elemento sobre el que descansa el apoyo y a_1 b_1 las dimensiones de éste, se definen como b_2 y a_2 las de la figura homotética del apoyo inscrita en el área $a{\cdot}b$ del elemento sobre el que descansa (Fig. 11-10)[1].

En valor N de la reacción sobre el apoyo debe cumplir la doble condición

$$N \leq \frac{a_1 b_1 f_{ck}}{2.250} \qquad [11.11]$$

$$N \leq \frac{a_2 b_2 f_{ck}\left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right)}{2.650} \qquad [11.12]$$

donde f_{ck} es la resistencia característica del hormigón del elemento sobre el que descansa el apoyo.

1 Lo que sigue es una simplificación con $\gamma_f = 1{,}5$ y $\gamma_c = 1{,}5$ de lo referente a cargas concentradas sobre macizos, que se expone con mayor detalle y precisión en el Capítulo 59.

Si no se cumple [11.11], pero se cumple [11.12] y además la condición

$$N \leq \frac{a_1 b_1 f_{ck}}{682} \qquad [11.13]$$

es necesario disponer un área de armadura s de confinamiento, en mm², dada por

$$A_{s,a} = 330\frac{N}{f_{yk}}\left(\frac{a_2 - a_1}{a_2}\right) \qquad [11.14]$$

$$A_{s,b} = 330\frac{N}{f_{yk}}\left(\frac{b_2 - b_1}{b_2}\right) \qquad [11.15]$$

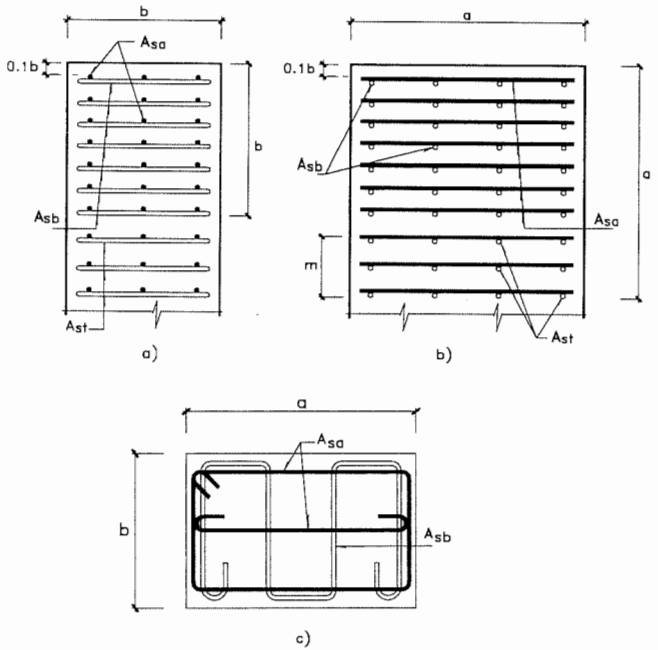


Figura 11-11

Estas armaduras, para mejorar el confinamiento y sus condiciones de anclaje deben disponerse en la forma indicada en la figura 11-11.Las armaduras transversales A_{st}, en la zona m de la figura, son simplemente de montaje.

Si no se cumple ninguno de los dos pares de condiciones [11.11] y [11.12] ó [11.12] y [11.13] el apoyo y/o el elemento que lo sustenta necesitan mayores

dimensiones, o bien mejorar la resistencia del hormigón de este último, según sea el caso.

Las condiciones de anclaje de las armaduras $A_{s,a}$ y $A_{s,b}$ deben ser cuidadosamente respetadas.

Un aspecto importante es el proceso constructivo de este tipo de apoyos. Lo más simple es disponer una capa de yeso alrededor de la tira de fibrocemento y enrasada con la cara superior de ésta (Fig. 11-12a)), de forma que la fije en planta. A continuación se hormigona la pieza superior sobre el yeso y el fibrocemento. Una vez se desencofre la pieza superior, el yeso debe ser retirado completamente. Por supuesto si la pieza que descansa sobre el apoyo es prefabricada, basta fijar el elemento de apoyo al apoyo con pegamento.

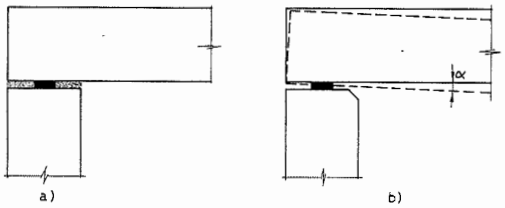


Figura 11-12

En este tipo de apoyos debe prestarse atención (Fig. 11-12b)) al giro esperable en el apoyo como consecuencia de la deformación de la viga o losa. En caso de duda, la arista derecha debe ser biselada, para evitar el contacto, que no sólo introduciría incertidumbre sobre el punto de paso de la resultante N, sino que podría descantillar la arista.

11.4 CÁLCULO DE APOYOS ELASTOMÉRICOS

Como dijimos, actualmente los antiguos sistemas de rodillos han quedado reducidos a casos excepcionales o especiales y las soluciones de neopreno o derivados se han impuesto.

La solución más frecuente es la de neopreno zunchado con chapas de acero, las soluciones de neopreno sin zunchar se utilizan prácticamente sólo para centrado de cargas.

En la figura 11-5 a) se indica la composición alternada de neopreno y chapas. La figura 11-5 b) representa un apoyo de este tipo. En ella puede apreciarse la función de zunchado de las chapas de acero que coaccionan la expansión transversal del neopreno y reducen así el acortamiento del apoyo en sentido vertical.

En general, el cálculo de un apoyo de neopreno requiere tres comprobaciones:

a) Comprobación de estabilidad. Llamando b a la menor dimensión en planta del apoyo y e_n al espesor total de neopreno, para evitar el pandeo se debe cumplir:

$$b \geq 5e_n \qquad [11.16]$$

b) **Comprobación de la presión de contacto.** Siendo a y b las dimensiones en mm del apoyo en planta y $N_{máx}$ la reacción máxima en kN, se debe cumplir:

$$\frac{N_{máx}}{ab} \leq \frac{\sigma_{adm,n}}{1000} \qquad [11.17]$$

El valor de $\sigma_{adm,n}$ debe expresarse en N/mm² y oscila de 10 a 15 N/mm² creciendo al aumentar el área en planta del apoyo.

c) Comprobación del acortamiento

Para limitar el acortamiento vertical, tal como vimos en 11.2.c-1), conviene establecer la limitación de C_f al valor 6. Para apoyos rectangulares

$$\frac{ab}{(a+b)\,t} > 12 \qquad [11.18]$$

donde t es el espesor de cada una de las capas de neopreno (Fig. 11-4 a)).

Debe, además, mantenerse una presión mínima de 3 N/mm² [1], de donde

$$\frac{N_{min}}{ab} \geq 0{,}003 \qquad [11.19]$$

donde N_{min} es el valor mínimo de la reacción N. La condición [11.19] se establece para garantizar una presión que asegure el suficiente rozamiento entre el apoyo y las piezas, de forma que las sucesivas dilataciones y contracciones no hagan "reptar" al apoyo, sacándolo de su sitio. Si no es posible cumplir simultáneamente [11.17] y [11.19], puede dimensionarse el apoyo teniendo en cuenta sólo la condición [11.17] y evitar la "reptación" encajando el apoyo en una o en ambas piezas (Fig. 11-13)[2].

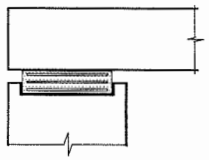


Figura 11-13

1 Algunos fabricantes recomiendan elevar este valor a 5 N/mm².

2 Existen modelos comerciales de apoyo, (11.5) que combinan el neopreno con elementos metálicos y resuelven directamente éste y otros problemas especiales de apoyo. Véase (11.8).

d) Comprobación de la distorsión angular

Cuando ocurre el corrimiento para el que se proyecta el apoyo, se produce en el mismo una distorsión angular γ tal como se indica en la figura 11-14[1].

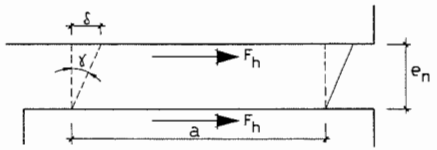


Figura 11-14

La distorsión vale:

$$tg\ \gamma = \frac{\delta}{e_n} \qquad [11.20]$$

donde e_n es el espesor total de neopreno.

Tal como vimos en 11.2.c-2) llamando G al módulo de rigidez del neopreno, se tiene para la tensión tangencial.

$$\tau = tg\ \gamma G = \frac{\delta G}{e_n} \qquad [11.21]$$

y la resultante de las tensiones τ sobre todo el área de apoyo a · b vale

$$F_h = \tau ab = \frac{\delta Gab}{e_n} \cdot 10^{-3} \qquad [11.22]$$

Los valores de G deben ser facilitados, para cada tipo de neopreno, por el fabricante, pero habitualmente son del orden de 2 N/mm² para acciones instantáneas y del orden de la mitad para acciones de larga duración.

Como puede verse, el neopreno no constituye un apoyo deslizante perfecto, sino que transmite una fuerza F_h proporcional al corrimiento δ y que sólo puede ser reducida aumentando el espesor e_n del apoyo. Sin embargo, no debe olvidarse que un gran espesor e_n si bien reduce la fuerza horizontal transmitida, aumenta el acortamiento vertical del apoyo, el cual no suele ser importante pero debe verificarse. Con la limitación [11.18] este acortamiento es siempre inferior al 15%.

La distorsión angular γ debe cumplir la condición

$$\gamma = \frac{\delta}{e_n} \leq 0{,}5 \qquad [11.23]$$

1 Para una discusión general de apoyos de neopreno, véase "BEARINGS IN STRUCTURAL ENGINEERING" de LONG (11.1) y "APARATOS DE APOYO PARA PUENTES" (11.3) y también (11.4).

lo que conduce al valor de e_n

$$e_n \geq 2\delta \qquad [11.24]$$

La expresión [11.22], llamando $K = \frac{10^{-3}\ Gab}{e_n}$, se transforma en

$$F_h = K\delta \qquad [11.25]$$

donde K recibe el nombre de "rigidez horizontal" del apoyo y es un concepto útil para el cálculo de δ en cada caso concreto, que será la diferencia entre el corrimiento que se hubiera producido sin la reacción F_h motivada por la resistencia a la deformación angular del neopreno y el de signo contrario que esta fuerza provoca en la pieza que experimenta el corrimiento. Recuérdese que los valores de G son diferentes para acciones de corta o larga duración.

d) Comprobación del giro del apoyo

Tal como se indicó en 11.2.c-3), habitualmente, la deformación de la pieza soportada producirá una cierta rotación α del neopreno tal como se indica en la figura 11-15. Normalmente, los apoyos de neopreno aceptan rotaciones importantes pero este punto debe ser comprobado de acuerdo con la información del fabricante. Las fórmulas [11.7], [11.8] y [11.9] permiten una comprobación aproximada.

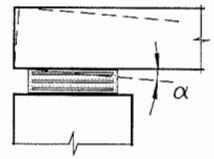


Figura 11-15

Al igual que vimos en 11.3 deben comprobarse las compresiones sobre las piezas de hormigón sobre las que asienta el apoyo y disponerse armaduras, en caso necesario, de acuerdo con lo que allí dijimos.

e) Tipos varios de apoyos

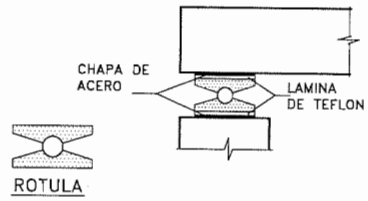


Figura 11-16

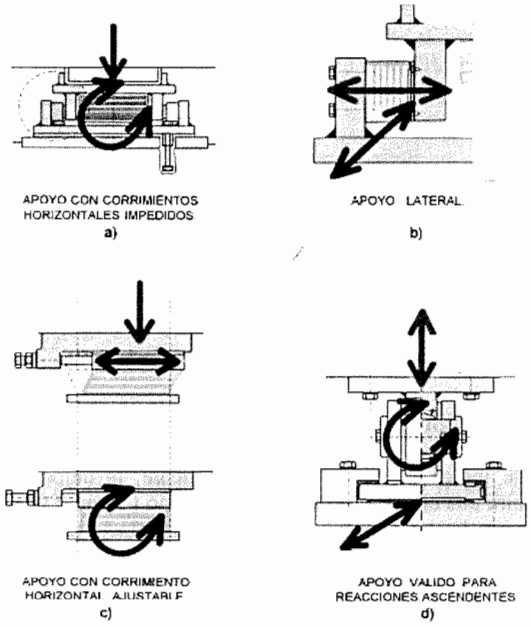


Figura 11-17. Cortesía de GUMBA

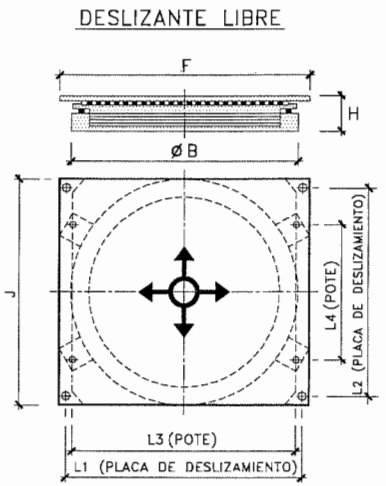


Figura 11-18. Cortesía de FREYSSINET INDUSTRIES

Los apoyos de neopreno se combinan en ocasiones con láminas de Teflón vulcanizadas, sobre chapas adheridas al mismo. El Teflón es un material sintético de muy bajo coeficiente de rozamiento, del orden de 0,05. Ello permite soluciones como la indicada en la figura 11-16, que permiten el giro, mediante la rótula, en una dirección y el deslizamiento gracias al Teflón en la dirección perpendicular.

Actualmente se fabrican apoyos que combinan elementos metálicos con neopreno o teflón que representan soluciones a problemas muy variables (Figuras 11-17 y 11-18). Véase (11.7), (11.8) y (11.9).

11.5 CÁLCULO DE RÓTULAS PLÁSTICAS

En lo que sigue resumimos el método puesto a punto para su cálculo de acuerdo con los ensayos de LEONHARDT y MÖNNIG (11.5) para las rótulas del tipo FREYSSINET.

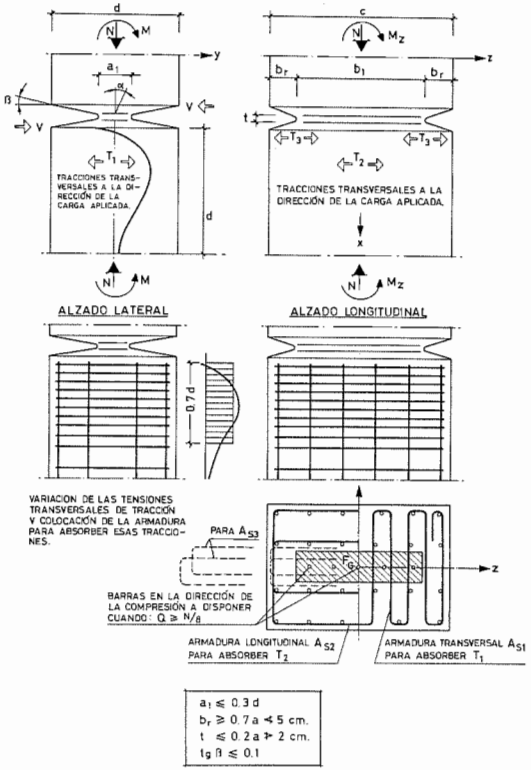


Figura 11-19

Además de las condiciones geométricas indicadas en la figura 11-19, la rótula debe dimensionarse de acuerdo con las comprobaciones siguientes:

a) El área mínima $a_1 \cdot b_1$ de la rótula viene dada por la condición

$$a_1 b_1 \geq \frac{943\, N_{máx}}{f_{ck}\left[1 + \lambda\left(1 - 0{,}41\, \frac{\alpha_{ef}}{\sqrt{f_{ck}}}\, \eta\right)\right]} \qquad [11.26]$$

donde:

$a_1\ b_1$ = dimensiones de la rótula en mm

$N_{máx}$ = valor característico máximo del esfuerzo axil en kN

$\alpha_{ef} = \frac{\alpha_g}{2} + \alpha_q$

f_{ck} = resistencia característica del hormigón en MPa

$\lambda = 1{,}2 - 4\,\frac{a_1}{d} > 0{,}8$

α_g = ángulo de giro de la rótula debido a cargas permanentes (‰), incluso fluencia, pretensado

α_q = ángulo de giro de la rótula debido a sobrecargas breves (‰), incluso variaciones térmicas

$\eta = \frac{N_{máx}}{N_g}$

N_g = valor característico del esfuerzo axil debido a las cargas permanentes, en kN

b) Para asegurar un grado suficiente de plastificación en la garganta debe cumplirse además

$$a_1 b_1 \leq \frac{2.260\, N_g}{\alpha_{ef}\sqrt{f_{ck}}} \qquad [11.27]$$

c) El ángulo máximo admisible de giro de la rótula en ‰, para esfuerzo axiles N entre N_g y $N_{máx}$, viene dado por

$$\sigma_{máx} \leq \pm \frac{2.277\, N}{a_1 b_1 \sqrt{f_{ck}}} > 15\ ‰ \qquad [11.28]$$

d) El máximo valor característico del esfuerzo cortante V, normal al axil N, puede verificarse de acuerdo con lo siguiente:

– Si $V \leq \frac{1}{8} N$ [11.29]

no es necesaria ninguna comprobación. (N y V son esfuerzos concomitantes).

– Si $\frac{1}{8} N < V \leq \frac{1}{4} N$ [11.30]

es necesario disponer barras en el plano medio de la rótula y ancladas a ambos lados de ésta, de área

$$A_s \geq 12{,}5\ V \qquad [11.31]$$

(A_s en mm² para V en kN)

– Si $V \geq \frac{1}{4} N$, el proyecto de la rótula se complica considerablemente además de ser necesario disponer pasadores verticales de acero.

Ver referencia (11.6). Es un caso muy infrecuente en la práctica.

e) Las tracciones T_1, T_2, T_3, indicadas en la figura 11-20 se absorberán con las áreas de acero

$$A_{s1} = 167\, N_{máx} \qquad [11.32]$$

$$A_{s2} = 167\, \left(1 - \frac{b_1}{c}\right) N_{máx} \qquad [11.33]$$

$$A_{s3} = 167\, \frac{a_1}{b_1} \cdot N_{máx} \qquad [11.34]$$

con unidades en kN, mm y mm².

Las disposiciones de las armaduras se indican en la figura 11-19.

f) El giro de la rótula produce un momento flector de reacción en la garganta, de valor

$$M = \frac{a_1 N}{1000}\left(0{,}5 - 5{,}6\sqrt{\frac{N}{\sqrt{f_{ck}}\, a_1 b_1 \alpha_{ef}}}\right) \qquad [11.35]$$

(M en m kN para N en kN, a_1 y b_1, en mm, y f_{ck} en MPa).

El valor $\frac{e}{a_1} = \frac{M}{a_1 N}$ mide la excentricidad relativa de la resultante respecto al centro de la rótula.

La combinación de dos rótulas plásticas en cabeza y pie de soporte (Fig. 11-20) da lugar a la formación de un péndulo que desempeña las mismas funciones que un apoyo deslizante.

Esta solución se utiliza principalmente cuando los valores indicados anteriormente para el cálculo son rebasados.

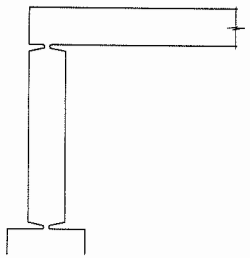


Figura 11-20

11.6 BROCHALES

En edificios de hormigón es frecuente el caso de vigas que se embrochalan en otras, sin enlazarse por tanto a ningún pilar, tal como se indica en el ejemplo AB de las figuras 11-21 a) (Planta) y 11-21 b) (Alzado).

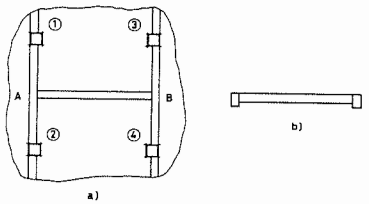


Figura 11-21

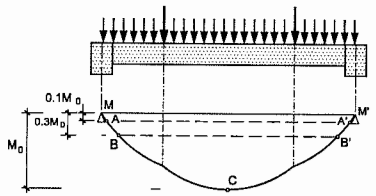


Figura 11-22

Un cálculo riguroso es teóricamente posible, pero la incertidumbre de los resultados es muy grande debido a que como veremos en el Capítulo 42 la precisión de nuestros conocimientos sobre las deformaciones por torsión es todavía escasa.

Por otro lado, el caso corresponde a lo que se llama "torsión secundaria" ya que los momentos flectores negativos en las secciones de empotramiento del brochal en las vigas se estabilizan tan pronto se microfisuran éstas por una torsión excesiva, con lo cual se estabilizan también los torsores sobre las vigas aunque aumenten las cargas sobre el brochal.

Por todo lo anterior, lo habitual es proceder a un cálculo simplemente aproximado de los esfuerzos, tal como se indica en la figura 11-22. Como ley de momentos

positivos se puede adoptar la ACA', obtenida con la línea de cierre correspondiente a momentos de empotramiento – 0,1 M_0, siendo M_0 el isostático máximo. Para momentos negativos se adoptan las leyes MB y M'B' obtenidas mediante la línea de cierre correspondiente a momentos de empotramiento – 0,3 M_0.

Lo anterior, para el caso de carga p uniformemente repartida, corresponde a armar en apoyos con $-\frac{1}{26,7}\,pl^2$ y en vano con $\frac{1}{8,9}\,pl^2$.

11.7 EMPOTRAMIENTOS IMPREVISTOS

Un punto al que debe prestarse especial atención es al de aparición de empotramientos imprevistos. En la figura 11-23 se indica un caso frecuente. Un análisis superficial de la situación teórica indicada en la figura 11-23 a) puede conducir a suponer el enlace como un simple apoyo. Sin embargo, si analizamos la situación después de la deformación, como se indica en la figura 11-23 b), es clara la aparición de un momento de empotramiento producido por el murete de azotea sobre la estructura.

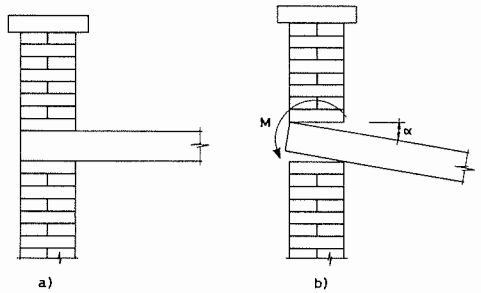


Figura 11-23

11.8 ENLACE DE LOS PILARES A LA CIMENTACIÓN

La práctica usual en el cálculo de entramados es considerar los pilares empotrados en las zapatas y éstas empotradas en el terreno, tal como se indica en la Fig. 11-24 a). Sin embargo, salvo que se trate de suelo rocoso y de pilares con pequeña excentricidad, hay que aceptar que la deformabilidad del terreno provocará un cierto giro de la zapata y que, por tanto, la situación quedaría mejor reflejada suponiendo uniones flexibles de los soportes al terreno, de acuerdo con lo expuesto en el Capítulo 6 (Fig. 11-24 b)). Como veremos por el análisis que sigue, la situación real del enlace resulta intermedia entre el caso de articulación y el de empotramiento perfecto (Fig. 11-24 c)).

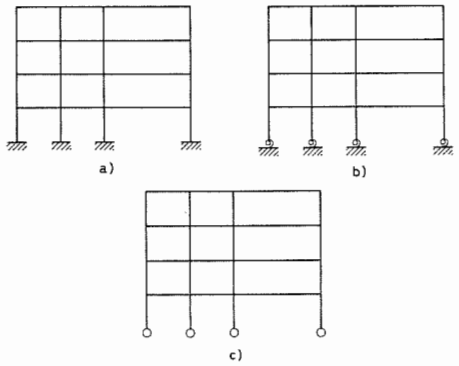


Figura 11-24

El cálculo de la situación real requiere el establecimiento de la "constante de muelle", J, del enlace zapata-terreno. Con las notaciones de la figura 11-25 y llamando K_0 al módulo de balasto correspondiente al suelo considerado y a las dimensiones a·b de la zapata en planta, se tiene:

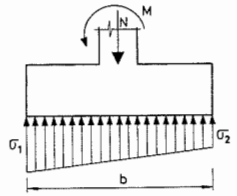


Figura 11-25

$$\sigma_1 = \frac{N}{ab} \cdot 10^3 + \frac{6M}{ab^2} \cdot 10^6 \qquad [11.36]$$

$$\sigma_2 = \frac{N}{ab} \cdot 10^3 - \frac{6M}{ab^2} \cdot 10^6 \qquad [11.37]$$

y llamando y_1 e y_2 a los asientos en mm de la zapata en los bordes correspondientes y θ al ángulo de giro de la zapata y, por tanto, del pilar

$$y_1 = \frac{\sigma_1}{K_0} \qquad [11.38]$$

$$y_2 = \frac{\sigma_2}{K_0} \qquad [11.39]$$

donde k_0 viene expresado en N/mm³

$$\text{tg}\,\theta \approx \theta = \frac{y_1 - y_2}{b}$$

y sustituyendo

$$\theta = \frac{12\,M}{K_0 ab^3} \cdot 10^6 \qquad [11.40]$$

y por tanto, la constante de muelle vale según vimos en 6.3

$$J = \frac{M}{\theta} = \frac{K_0 ab^3}{12 \cdot 10^6} \qquad [11.41]$$

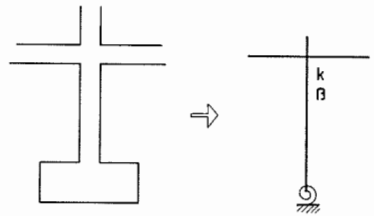


Figura 11-26

Conocida la "constante de muelle" del enlace, es inmediato generalizar los métodos de cálculo vistos en los Capítulos anteriores a este nuevo caso. Basta para ello (fig. 11-26) considerar el pilar como una pieza con unión flexible en su pie, lo que corresponde al caso considerado en el apartado 6.3.1.2. Los valores K y β de rigidez y factor de transmisión del extremo superior del pilar se dedujeron en 6.3.1.2 y vienen dados por las fórmulas [6.15] y [6.13]:

$$K = \frac{4EI}{L} \frac{1 + 3\eta_i}{1 + 4\eta_i} \qquad [11.42]$$

$$\beta = \frac{1}{2 + 6\eta_i} \qquad [11.43]$$

donde η_i vale

$$\eta_i = \frac{EI}{LJ} = \frac{12\,EI}{K_0\,Lab^3} \cdot 10^6 \qquad [11.44]$$

y sustituyendo en [11.40] y [11.41] se obtiene

$$K = \frac{4\,EI}{L}\,\frac{1+\dfrac{36\,EI}{K_0\,Lab^3}\cdot 10^6}{1+\dfrac{48\,EI}{K_0\,Lab^3}\cdot 10^6} \qquad [11.45]$$

$$\beta = \frac{1}{2+\dfrac{72\,EI}{K_0\,Lab^3}\cdot 10^6} \qquad [11.46]$$

A título de ejemplo, si consideramos el pórtico simple de la figura 11-27 el cálculo como pórtico biempotrado conduce a un diagrama de momentos como el indicado en la figura 11-28.

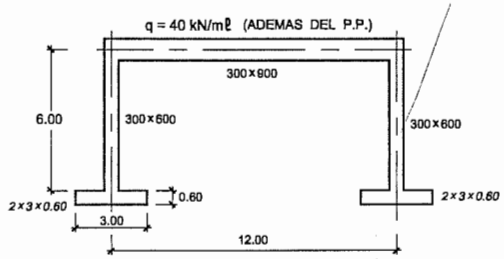


Figura 11-27

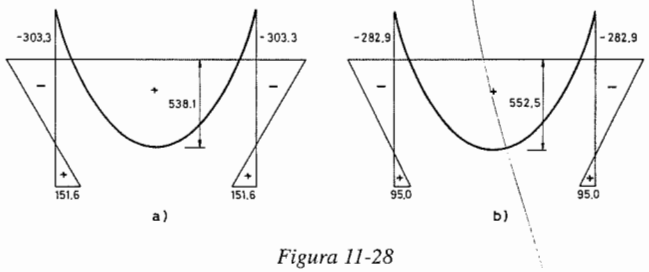


Figura 11-28

El axil en el pilar es de 306,7 kN, que con un momento de 151,6 m kN conduce a una zapata de 2·3·0,60 m con presiones en borde de 0,12 y 0 N/mm².

Suponiendo un suelo con $K_{30} = 0{,}07$ N/mm³, a una zapata de 2·3 m le corresponde un módulo de balasto $K_0 = 0{,}07\left(\dfrac{200+30}{400}\right)^2 = 0{,}023$ N/mm³.[1]

1 Con K_{30} representamos el método de balasto determinado en el ensayo con placa de carga de 30·30 cm. Con K_0 el del cimiento. La fórmula empleada para el cálculo de K_0 en función de K_{30} es la habitual en función del ancho del cimiento.

Sustituyendo en [11.43] y [11.44] y adoptado $E_c = 20.000$ N/mm², se obtienen los valores de la rigidez y factor de transmisión.

$K = 0{,}897\ K_p$

$\beta = 0{,}329$

donde K_p es el valor $\dfrac{4\,EI}{L}$ del pilar biempotrado.

Repetido el cálculo del entramado, se obtienen los valores de momentos indicados en la figura 11-28 b).

Como puede verse, el valor del momento en pie del pilar se ha reducido a 95,0 m kN, es decir al 63% del obtenido en las hipótesis de empotramiento perfecto. Considérese además que esta reducción se ha producido con un suelo que puede calificarse de normal.

Lo anterior subraya el hecho de que la situación real de enlace de los soportes al terreno a través de zapatas es intermedia entre articulación y empotramiento.

Obsérvese además que en el caso analizado esto permitiría una importante reducción de la zapata. En cambio el momento en vano ha aumentado de 538,1 a 552,5 m kN, es decir un 3% mientras en los pilares se ha reducido de 303,3 a 282,9 m kN, o sea en un 7%.

En entramados múltiples la cuestión tiene menos trascendencia, pues habitualmente los pilares de las plantas bajas están sometidos a grandes esfuerzos axiles con pequeños momentos flectores, es decir que están sometidos a esfuerzos axiles de reducida excentricidad y las armaduras resultantes varían escasamente al suponer empotramiento o articulación. Aún en ese caso la hipótesis de articulación resulta más razonable.

Finalmente existen casos en que la aplicación del método expuesto es obligada porque la hipótesis de empotramiento puede conducir a graves errores. Considerando por ejemplo el entramado de la figura 11-29, si el soporte 3 es de muy pequeña longitud y por lo tanto de mucha rigidez, la hipótesis de suponerlo empotrado en el terreno conducirá:

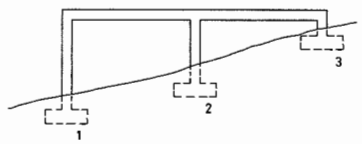


Figura 11-29

a) A un momento negativo del dintel en el apoyo 3 y a un momento en el pilar 3 enormemente sobrevalorados.

b) A una zapata sobredimensionada.

c) A un momento de vano en el dintel 2-3 peligrosamente infravalorado.

La situación anterior es aún más errónea si se considera el pórtico sometido a una acción de frenado en el dintel o se analizan los esfuerzos de retracción y temperatura.

En estos casos, la consideración de uniones flexibles entre soporte y terreno, de acuerdo con lo anteriormente expuesto, es el único camino para un cálculo de esfuerzos razonable.

Hoy existen numerosos programas informáticos, que permiten realizar el cálculo matricial con cualquier constante de muelle J, en cada pieza.

BIBLIOGRAFÍA

(11.1) LONG, J.E.; "Bearings in Structural Engineering". London. Newnes-Butterworths. 1974.

(11.2) EHE "Instrucción para el proyecto y la ejecución de obras de hormigón estructural". Ministerio de Fomento. Secretaría General Técnica. Servicio de Publicaciones. 1998.

(11.3) GONZALEZ ESTEBAN, J.L.; HERRERO BENITEZ, J.E.; LLEYDA DIONIS, J.L.; VILLAMONTE VARELA, L.; "Aparatos de Apoyo de Puentes". AIPCR. Madrid. 1996.

(11.4) "Recomendaciones para el proyecto y puesta en obra de los apoyos elastoméricos para puentes de carretera". MOPU. Madrid. 1982.

(11.5) LEONHARDT, F. y MÖNNIG, E.; "Sonderfälle der Bemessung im Stahlbetonbau". Springer-Verlag. 1974.

(11.6) LEONHARDT, F. y REIMANN, H.; "Betongelenke, Versuchsbericht un Vorschläige zur Bemessung un Konstruktiven Ausbildung". DAfStb. H 175. Berlin. Ernst v. Sohn. 1965.

(11.7) GUMBA. "Apoyos elastoméricos". Mecanogumba. Madrid. 1966.

(11.8) GUMBA. "Performance Overview". Munich. 1995.

(11.9) "Apoyos mecánicos TETRON CD". FREYSSINET INDUSTRIES.

CAPÍTULO 12

NOCIONES DE CÁLCULO MATRICIAL DE ESTRUCTURAS

12.1 INTRODUCCIÓN

El cálculo matricial es conocido desde hace muchos años. La razón de que su empleo práctico no se haya producido hasta una época relativamente reciente se debe al hecho de que, si se procede a una resolución, manual o con máquinas convencionales, del cálculo planteado, los métodos matriciales no presentan ventajas respecto a lo visto en Capítulos anteriores (incluso son más largos a veces), salvo la de que permiten una notación muy compacta de las expresiones matemáticas del cálculo estructural.

Sin embargo, con la aparición de los ordenadores, la operación de inversión de matrices se simplificó de manera radical y a ello se debe, fundamentalmente, el incremento de las aplicaciones del cálculo matricial.

En lo que sigue, se exponen en primer lugar dos ejemplos elementales para familiarizar al lector con el método. A continuación se plantea el problema general de cálculo espacial de un entramado. Para quienes estén interesados en ampliar estos temas, en especial con vistas a la programación de ordenadores, las referencias (12.1), (12.2) y (12.3) proporcionan información y ampliaciones importantes[1].

12.2 EJEMPLO Nº 1. CÁLCULO MATRICIAL DE UNA VIGA CONTINUA

Para considerar el problema con generalidad, supongamos la viga continua de tres vanos indicada en la figura 12-1, con el extremo izquierdo simplemente apoyado y el derecho perfectamente empotrado.

1 Existen en español varios textos excelentes sobre cálculo matricial. Véase J.M. SAEZ BENITO (12.1), M. VÁZQUEZ (12.2) y R. ARGÜELLES (12.3). Véase también MEEK (12.4) y LIVESLEY (12.5)

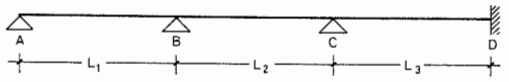


Figura 12-1

De acuerdo con las fórmulas [4,2] y [4.3] del Capítulo 4, en cada vano se tiene

$$M_d = M_{ed} + k\,(\theta_d + 0{,}5\;\theta_f) \qquad [12.1]$$

$$M_f = M_{ef} + k\,(0{,}5\;\theta_d + \theta_f) \qquad [12.2]$$

que puede expresarse matricialmente

$$\begin{bmatrix} M_d \\ M_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{ed} \\ M_{ef} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0{,}5\,k \\ 0{,}5\,k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_d \\ \theta_f \end{bmatrix} \qquad [12.3]$$

donde la matriz

$$K = \begin{bmatrix} k & 0{,}5\,k \\ 0{,}5\,k & k \end{bmatrix} \qquad [12.4]$$

es la matriz de rigidez de la viga.

Aplicando las ecuaciones [12.1] y [12.2] a los extremos dorsales de los vanos, con $M_{1d} = 0$, por ser ese extremo articulado, y llamando k_1, k_2, k_3 a las rigideces de los tres vanos, se tiene:

$$M_{2d} = M_{ed,2} + k_2\;\theta_B + 0{,}5\;k_2\;\theta_c \qquad [12.5]$$

$$M_{3d} = M_{ed,3} + k_3\;\theta_C \qquad [12.6]$$

donde $M_{ed,2}$ y $M_{ed,3}$ son los momentos dorsales de empotramiento perfecto, de los vanos de luces L_2 y L_3, y θ_B, θ_C los giros en los apoyos B y C, respectivamente.

Expresando [12.5] y [12.6] en forma matricial

$$\begin{bmatrix} M_{2d} \\ M_{3d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{ed,2} \\ M_{ed,3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_2 & 0{,}5\,k_2 \\ 0 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_B \\ \theta_C \end{bmatrix} \qquad [12.7]$$

Operando análogamente para los extremos frontales, teniendo en cuenta que $\theta_D = 0$ por tratarse de empotramiento perfecto

$$M_{1f} = M_{ef,1} + 0{,}75\;k_1\;\theta_B \;^{1} \qquad [12.8]$$

$$M_{2f} = M_{ef,2} + 0{,}5\;k_2\;\theta_B + K_2\;\theta_c \qquad [12.9]$$

y en forma matricial

$$\begin{bmatrix} M_{1f} \\ M_{2f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{ef,1} \\ M_{ef,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}75\;k_1 & 0 \\ 0{,}5\;k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_B \\ \theta_C \end{bmatrix} \qquad [12.10]$$

Empleando la notación

$$[M_d] = \begin{bmatrix} M_{2d} \\ M_{3d} \end{bmatrix};\quad [M_f] = \begin{bmatrix} M_{1f} \\ M_{2f} \end{bmatrix};\quad [\theta] = \begin{bmatrix} \theta_B \\ \theta_C \end{bmatrix}$$

$$[M_{ed}] = \begin{bmatrix} M_{ed,2} \\ M_{ed,3} \end{bmatrix};\quad [M_{ef}] = \begin{bmatrix} M_{ef,1} \\ M_{ef,2} \end{bmatrix}$$

para los vectores columna y llamando a las matrices de rigidez

$$[K_d] = \begin{bmatrix} k_2 & 0{,}5\,k_2 \\ 0 & k_3 \end{bmatrix} \qquad [12.11]$$

$$[K_f] = \begin{bmatrix} 0{,}75\;k_1 & 0 \\ 0{,}5\;k_2 & k_2 \end{bmatrix} \qquad [12.12]$$

la expresión matricial resulta

$$[M_d] = [M_{ed}] + [K_d][\theta] \qquad [12.13]$$

$$[M_f] = [M_{ef}] + [K_f][\theta] \qquad [12.14]$$

Como en cada apoyo se ha de cumplir

$$[M_d] + [M_f] = 0 \qquad [12.15]$$

1 Se hace uso de la rigidez $\frac{3\,EI}{L}$ para pieza articulada.

teniendo en cuenta [12.13] y [12.14] se obtiene:

$$[M_{ed} + M_{ef}] + [K_d + K_f][\theta] = 0$$

y con la notación

$$[K] = \begin{bmatrix} k_2 + 0{,}75\,k_1 & 0{,}5\,k_2 \\ 0{,}5\,k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}$$

$$[M_e] = \begin{bmatrix} M_{ed,2} + M_{ef,1} \\ M_{ed,3} + M_{ef,2} \end{bmatrix}$$

$$[M_e] + [K][\theta] = 0 \qquad [12.16]$$

por tanto

$$[\theta] = -[K]^{-1}\,[M_e] \qquad [12.17]$$

y sustituyendo [12.13] y [12.14]

$$[M_d] = [M_{ed}] - [K_d][K]^{-1}[M_e] \qquad [12.18]$$

$$[M_f] = [M_{ef}] - [K_f][K]^{-1}[M_e] \qquad [12.19]$$

que son la solución del problema en expresión matricial.

[K] recibe el nombre de matriz de rigidez y es siempre una matriz de banda.

12.3 EJEMPLO Nº 2. CÁLCULO MATRICIAL DE UN ENTRAMADO AISLADO

Como ampliación de lo visto en el apartado anterior, consideremos ahora el entramado de la figura 12-2, que se supone aislado, es decir no conectado a ningún otro por forjados o vigas.

En lo que sigue llamaremos k_v a la rigidez de los dos dinteles, que se suponen iguales, y k_p a la de los cuatro pilares que también se suponen iguales entre sí.

La deformación del entramado queda definida si se conocen los corrimientos horizontales δ_A, δ_C de los dos dinteles y los giros θ_A, θ_B, θ_C y θ_D de los cuatro

nudos[1]. Conocidos sus valores, las ecuaciones [5.5], [5.6] del Capítulo 5 nos proporcionan inmediatamente los momentos finales de empotramiento.

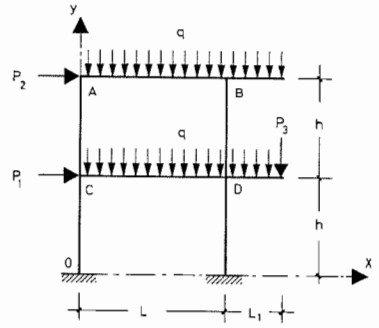


Figura 12-2

Definimos como δ el vector columna[2].

$$\delta = \begin{bmatrix} \delta_A \\ \delta_C \\ \theta_A \\ \theta_B \\ \theta_C \\ \theta_D \end{bmatrix} \qquad [12.20]$$

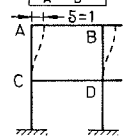
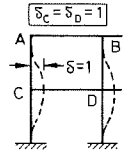
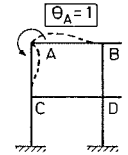
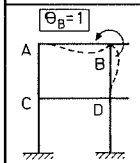
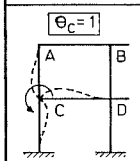
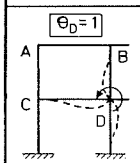
Apliquemos ahora a la estructura, sucesiva y aisladamente, cada uno de los corrimientos y giros constituyentes del vector columna [δ] pero con valor unidad.

Designaremos por $X_{i,j}$ la reacción paralela a OX, producida en el nudo i, por el corrimiento aplicado en el nudo j. Por $M_{i,j}$, se designa, análogamente, el momento producido en el nudo i, por el corrimiento aplicado en el nudo j. $X'_{i,j}$ y $M'_{i,j}$ designan, análogamente, las reacciones y momentos en i, debidas al giro aplicado en j.

En la figura 12-3 se resumen los resultados. Las reacciones y momentos se obtienen por aplicación directa de las fórmulas

1 Se desprecia el acortamiento de las piezas debido al efecto de los esfuerzos axiles.

2 Expresamos por δ indistintamente un corrimiento o un giro.

DEFORMACION	NUDO A	NUDO B	NUDO C	NUDO D
$\delta_A=\delta_B=1$ 	$M_{A,A}=1{,}5K_p/h$ $X_{A,A}=3\frac{K_p}{h^2}$	$M_{B,A}=1{,}5K_p/h$ $X_{B,A}=3\frac{K_p}{h^2}$	$M_{C,A}=1{,}5K_p/h$ $X_{C,A}=-3\frac{K_p}{h^2}$	$M_{D,A}=1{,}5K_p/h$ $X_{D,A}=-3\frac{K_p}{h^2}$
$\delta_C=\delta_D=1$ 	$M_{A,C}=-1{,}5K_p/h$ $X_{A,C}=-3\frac{K_p}{h^2}$ (*)	$M_{B,C}=-1{,}5K_p/h$ $X_{B,C}=-3\frac{K_p}{h^2}$	$M_{C,C}=0$ (**) $X_{C,C}=6\frac{K_p}{h^2}$ (***)	$M_{D,C}=0$ $X_{D,C}=6\frac{K_p}{h^2}$
$\theta_A=1$ 	$M'_{A,A}=K_v+K_p$ $X'_{A,A}=1{,}5K_p/h$	$M'_{B,A}=0{,}5K_v$ $X'_{B,A}=0$	$M'_{C,A}=0{,}5K_p$ $X'_{C,A}=-1{,}5K_p/h$	$M'_{D,A}=0$ $X'_{D,A}=0$
$\theta_B=1$ 	$M'_{A,B}=0{,}5K_v$ $X'_{A,B}=0$	$M'_{B,B}=K_v+K_p$ $X'_{B,B}=1{,}5K_p/h$	$M'_{C,B}=0$ $X'_{C,B}=0$	$M'_{D,B}=0{,}5K_p$ $X'_{D,B}=-1{,}5K_p/h$
$\theta_C=1$ 	$M'_{A,C}=0{,}5K_p$ $X'_{A,C}=1{,}5K_p/h$	$M'_{B,C}=0$ $X'_{B,C}=0$	$M'_{C,C}=K_v+2K_p$ $X'_{C,C}=0$	$M'_{D,C}=0{,}5K_v$ $X'_{D,C}=0$
$\theta_D=1$ 	$M'_{A,D}=0$ $X'_{A,D}=0$	$M'_{B,D}=0{,}5K_p$ $X'_{B,D}=1{,}5K_p/h$	$M'_{C,D}=0{,}5K_v$ $X'_{C,D}=0$	$M'_{D,D}=K_v+2K_p$ $X'_{D,D}=0$

(*) LOS SIGNOS DE X SON POSITIVOS DE ACUERDO CON EL SISTEMA DE EJES DE LA Fig. 12-2.
(**) LOS MOMENTOS PRODUCIDOS EN LOS PILARES DE AMBOS PISOS SON IGUALES EN VALOR ABSOLUTO Y DE SIGNO CONTRARIO.
(***) EL VALOR ES DEBIDO A LAS REACCIONES DE LOS PILARES DE AMBOS PISOS.

Figura 12-3

Expresando ahora las condiciones de equilibrio del entramado, se tiene:

$$\left(X_{A,A}+X_{B,A}\right)\delta_A+\left(X_{A,C}+X_{B,C}\right)\delta_C+\left(X'_{A,A'}+X'_{B,A}\right)\theta_A+ \\ +\left(X'_{A,B}+X'_{B,B}\right)\theta_B+\left(X'_{A,C}+X'_{B,C}\right)\theta_C+\left(X'_{A,D}+X'_{B,D}\right)\theta_D=P_2 \qquad [12.21]$$

$$\left(X_{C,A}+X_{D,A}\right)\delta_A+\left(X_{C,C}+X_{D,C}\right)\delta_C+\left(X'_{C,A}+X'_{D,A}\right)\theta_A+ \\ +\left(X'_{C,B}+X'_{D,B}\right)\theta_B+\left(X'_{C,C}+X'_{D,C}\right)\theta_C+\left(X'_{C,D}+X'_{D,D}\right)\theta_D=P_1 \qquad [12.22]$$

$$M_{A,A}\,\delta_A+M_{A,C}\,\delta_C+M'_{A,A}\,\theta_A+M'_{A,B}\,\theta_B+M'_{A,C}\,\theta_C+ \\ +M'_{A,D}\,\theta_D=\frac{q\,L^2}{12} \qquad [12.23]$$

$$M_{B,A}\,\delta_A+M_{B,C}\,\delta_C+M'_{B,A}\,\theta_A+M'_{B,B}\,\theta_B+M'_{B,C}\,\theta_C+ \\ +M'_{B,D}\,\theta_D=-\frac{q\,L^2}{12}+\frac{q\,L_1^2}{2} \qquad [12.24]$$

$$M_{C,A}\,\delta_A+M_{C,C}\,\delta_C+M'_{C,A}\,\theta_A+M'_{C,B}\,\theta_B+M'_{C,C}\,\theta_C+ \\ +M'_{C,D}\,\theta_D=\frac{q\,L^2}{12} \qquad [12.25]$$

$$M_{D,A}\,\delta_A+M_{D,C}\,\delta_C+M'_{D,A}\,\theta_A+M'_{D,B}\,\theta_B+M'_{D,C}\,\theta_C+ \\ +M'_{D,D}\,\theta_D=-\frac{q\,L^2}{12}+\frac{q\,L_1^2}{2}+P_3\,L_1 \qquad [12.24]$$

La ecuación [12.21] expresa el equilibrio de fuerzas paralelas a OX en el dintel AB. La [12.22] en CD. Las [12.23] a [12.26], los equilibrios de momentos en los nudos A, B, C y D, respectivamente.

Si disponemos los coeficientes de los corrimientos y giros del sistema de ecuaciones anterior en forma de matriz, sustituyendo los valores de X y M por los indicados en el cuadro de la figura 12-3, tenemos:

$$[K] = \begin{bmatrix} 6\frac{k_p}{h^2} & -6\frac{k_p}{h^2} & 1{,}5\frac{k_p}{h} & 1{,}5\frac{k_p}{h} & 1{,}5\frac{k_p}{h} & 1{,}5\frac{k_p}{h} \\ -6\frac{k_p}{h^2} & 12\frac{k_p}{h^2} & -1{,}5\frac{k_p}{h} & -1{,}5\frac{k_p}{h} & 0 & 0 \\ 1{,}5\frac{k_p}{h} & -1{,}5\frac{k_p}{h} & k_v + k_p & 0{,}5\,k_v & 0{,}5\,k_p & 0 \\ 1{,}5\frac{k_p}{h} & -1{,}5\frac{k_p}{h} & 0{,}5\,k_v & k_v + k_p & 0 & 0{,}5\,k_p \\ 1{,}5\frac{k_p}{h} & 0 & 0{,}5\,k_p & 0 & k_v + 2\,k_p & 0{,}5\,k_v \\ 1{,}5\frac{k_p}{h} & 0 & 0 & 0{,}5\,k_p & 0{,}5\,k_p & k_v + 2\,k_p \end{bmatrix} \quad [12.27]$$

que es la *matriz de rigidez* del entramado. Esta matriz es, naturalmente, independiente de las cargas aplicadas y válida por tanto para cualquier sistema de cargas aplicadas. Es naturalmente simétrica como consecuencia del teorema de reciprocidad de deformaciones de MAXWELL.

Definimos como *matriz de carga* el vector columna

$$[S] = \begin{bmatrix} P_2 \\ P_1 \\ \frac{q\,L^2}{12} \\ -\frac{q\,L^2}{12} + \frac{q\,L_1^2}{2} \\ \frac{q\,L^2}{12} \\ -\frac{q\,L^2}{12} + \frac{q\,L_1^2}{2} + P_3\,L_1 \end{bmatrix} \quad [12.28]$$

Considerando [12.20], [12.27] y [12.28], el sistema [12.21] a [12.26] se puede escribir en forma matricial

$$[K]\,[\delta] = [S] \quad [12.29]$$

y despejando

$$[\delta] = [K]^{-1}\,[S] \quad [12.30]$$

Obsérvese que, si bien en el ejemplo 12.2 la matriz era de 2 x 2 y por lo tanto fácil de invertir por procedimiento manual, la [12.27] es de 6 x 6 y su resolución manual es muy dificultosa. Si se considera la sencillez del entramado a que corresponde, un solo vano y dos pisos, se comprende que el método de cálculo matricial no presenta ningún interés para el cálculo manual. Sin embargo, la inversión de la matriz es muy rápida y simple con un ordenador y de ahí la potencia e interés del método. Como puede apreciarse, el método, aparte de su compacidad de expresión, tiene la ventaja de que la matriz invertida es función únicamente de las características geométricas y mecánicas de la estructura y no depende de las cargas aplicadas. Si existen varios estados de cargas, basta transformar el vector columna [F] en una matriz con tantas columnas como estados de carga, sin que por ello se requiera invertir de nuevo la matriz de rigidez. Esta ventaja, aunque sólo utilizable si se dispone de un ordenador, es importante frente a todos los demás métodos vistos anteriormente.

12.4 PLANTEAMIENTO GENERAL DEL CÁLCULO MATRICIAL DE ENTRAMADOS ESPACIALES

Entendemos por entramados espaciales aquellos entramados situados en planos diferentes, con piezas de enlace entre los diferentes entramados. El caso frecuente es el de entramados situados en planos paralelos, unidos en algunos o en todos los nudos por vigas de dirección perpendicular a la de los planos de los entramados.

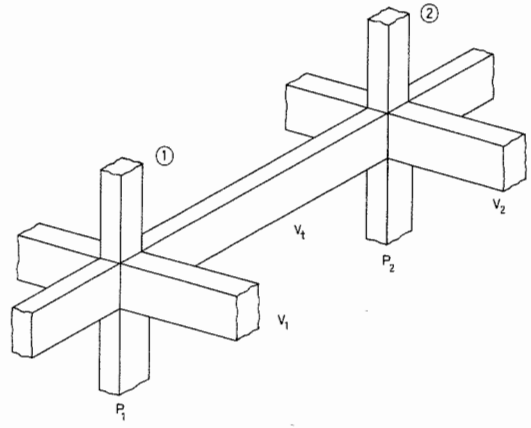


Figura 12-4

En la figura 12-4 se representan dos nudos de dos entramados paralelos, 1 y 2, formados el primero por el pilar P_1 y el dintel v_1 y el segundo por el pilar P_2 y el dintel v_2. Ambos están unidos por la viga v_t, que, como las v_1 y v_2, puede ser físicamente una viga o tener además un forjado asociado.

Cualquier corrimiento[1] del nudo 1 transmitirá corrimientos al nudo 2 y, de éste, a las piezas de su entramado. Plantearemos el caso más general, en el que el nudo puede experimentar corrimientos en tres direcciones y giros respecto a tres ejes. Obsérvese que lo que sigue generaliza lo tratado en el Capítulo 7.

En la figura 12-5 se representa el sistema de coordenadas local para la pieza, en el que se supone que los ejes (y) y (z) son los principales para la sección transversal; asimismo están representados los seis corrimientos que puede tener cada uno de los extremos de la barra. Llamaremos p_1 y p_2 a los vectores de carga que solicitan, respectivamente, a los nudos 1 y 2 de la barra; análogamente, para los vectores corrimiento d_1 y d_2 . De acuerdo con el convenio de signos utilizado en la figura 12-5[2], será:

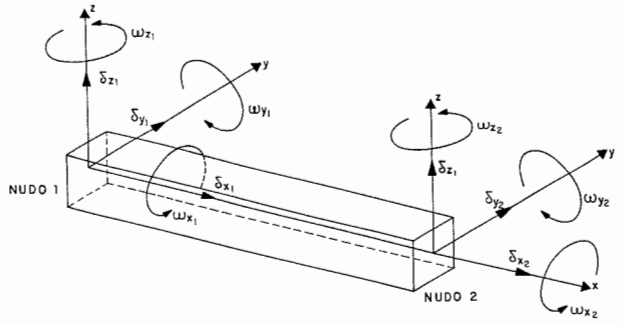


Figura 12-5

$$P_1 = \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \\ M_{x1} \\ M_{y1} \\ M_{z1} \end{bmatrix}; \quad P_2 = \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \\ M_{x2} \\ M_{Y2} \\ M_{Z2} \end{bmatrix}; \quad d_1 = \begin{bmatrix} \delta_{x1} \\ \delta_{y1} \\ \delta_{z1} \\ \omega_{x1} \\ \omega_{y1} \\ \omega_{z1} \end{bmatrix}; \quad d_2 = \begin{bmatrix} \delta_{x2} \\ \delta_{y2} \\ \delta_{z2} \\ \omega_{x2} \\ \omega_{y2} \\ \omega_{z2} \end{bmatrix}$$

Los esfuerzos para el extremo 1 de la barra se deducen inmediatamente de lo expuesto en el Capítulo 2 y de las fórmulas [5.5] y [5.6] y, para una pieza recta de sección EI constante, son los siguientes:

1 Se entiende por corrimientos, en forma generalizada, tanto las traslaciones como los giros.

2 El planteamiento que sigue considera las flexiones en dos direcciones, la torsión, los cortantes en dos direcciones y el esfuerzo axil de las piezas, así como los efectos de todos esos esfuerzos.

$$X_1 = EA\frac{\delta_{x1}}{L} - EA\frac{\delta_{x2}}{L} \qquad [12.31]$$

(esfuerzo axil)

$$Y_1 = 12\frac{EI_z}{L^3}\delta_{y1} - 12\frac{EI_z}{L^3}\delta_{y2} + 6\frac{EI_z}{L^2}\omega_{z1} + 6\frac{EI_z}{L^2}\omega_{z2} \qquad [12.32]$$

(cortante horizontal)

$$Z_1 = 12\frac{EI_y}{L^3}\delta_{z1} - 12\frac{EI_y}{L^3}\delta_{z2} - 6\frac{EI_y}{L^2}\omega_{y1} - 6\frac{EI_y}{L^2}\omega_{y2} \qquad [12.33]$$

(cortante vertical)

$$M_{x1} = \frac{GJ}{L}\omega_{x1} - \frac{GJ}{L}\omega_{x2}\ ^{1} \qquad \text{(momento torsor)} \qquad [12.34]$$

$$M_{y1} = -6\frac{EI_y}{L^2}\delta_{z1} + 6\frac{EI_y}{L^2}\delta_{z2} + 4\frac{EI_y}{L}\omega_{y1} + 2\frac{EI_y}{L}\omega_{y2} \qquad [12.35]$$

(momento flector en el plano del entramado)

$$M_{z1} = 6\frac{EI_z}{L^2}\delta_{y1} - 6\frac{EI_z}{L^2}\delta_{y2} + 4\frac{EI_z}{L}\omega_{z1} + 2\frac{EI_z}{L}\omega_{z2} \qquad [12.36]$$

(momento flector en el plano normal al del entramado)

Análogamente pueden expresarse las ecuaciones para las cargas que solicitan al extremo 2.

Las ecuaciones anteriores [12.31] a [12.36] pueden formularse de manera más compacta en la siguiente forma:

$$[p_1] = [k_{11}]\,[d_1] + [k_{12}]\,[d_2] \qquad [12.37]$$

donde las matrices k_{11} y k_{12} presentan la forma:

1 G es el módulo de elasticidad transversal y J el momento polar de inercia de la sección transversal de la pieza.

$$k_{11} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12\frac{EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & 6\frac{EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & 12\frac{EI_y}{L^3} & 0 & -6\frac{EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6\frac{EI_y}{L^2} & 0 & 4\frac{EI_y}{L} & 0 \\ 0 & 6\frac{EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 4\frac{EI_z}{L} \end{bmatrix} \quad [12.38]$$

$$k_{12} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12\frac{EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & 6\frac{EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & -12\frac{EI_y}{L^3} & 0 & -6\frac{EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6\frac{EI_y}{L^2} & 0 & 2\frac{EI_y}{L} & 0 \\ 0 & -6\frac{EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 2\frac{EI_z}{L} \end{bmatrix} \quad [12.39]$$

Expresiones análogas pueden obtenerse para las ecuaciones que ligan el vector de cargas p_2 del extremo 2 con los movimientos de la barra:

$$[p_2] = [k_{21}]\,[d_1] + [k_{22}]\,[d_2] \qquad [12.40]$$

donde las matrices k_{21} y k_{22} son las siguientes:

$$k_{21} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12\frac{EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -6\frac{EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & -12\frac{EI_y}{L^3} & 0 & 6\frac{EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6\frac{EI_y}{L^2} & 0 & 2\frac{EI_y}{L} & 0 \\ 0 & 6\frac{EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 2\frac{EI_z}{L} \end{bmatrix} \quad [12.41]$$

$$k_{22} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12\frac{EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -6\frac{EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & 12\frac{EI_y}{L^3} & 0 & 6\frac{EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6\frac{EI_y}{L^2} & 0 & 4\frac{EI_y}{L} & 0 \\ 0 & -6\frac{EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 2\frac{EI_z}{L} \end{bmatrix} \quad [12.42]$$

La consideración conjunta de las ecuaciones [12.37] y [12.40] permitiría definir la matriz de rigidez k de la barra, de acuerdo a la expresión siguiente:

$$[p] = [k]\,[d] \qquad [12.43]$$

donde:

$$p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \qquad [12.44]$$

$$d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \qquad [12.45]$$

$$k = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ - - - - - \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \qquad [12.46]$$

Sin embargo, la obtención de la matriz de rigidez completa de la barra no es necesaria pues, como se verá más adelante, la matriz de rigidez general de la estructura se forma a partir de las matrices parciales k_{ij} de las barras.

Previamente al ensamblaje de la matriz de rigidez de la estructura, es preciso referir todas las matrices de barras a un sistema de referencia global, definido por los ejes (x', y', z'). Si se representan por cos α_x, cos α_y y cos α_z los cosenos directores de la directriz de la pieza (i,j) y por cos β_x, cos β_y, cos β_z y cos γ_x, cos γ_y, y cos γ_z los de los otros dos ejes coordenados de la pieza, se tiene la siguiente matriz T de transformación:

$$T = \begin{bmatrix} cos\,\alpha_x & cos\,\beta_x & cos\,\gamma_x & 0 & 0 & 0 \\ cos\,\alpha_y & cos\,\beta_y & cos\,\gamma_y & 0 & 0 & 0 \\ cos\,\alpha_z & cos\,\beta_z & cos\,\gamma_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & cos\,\alpha_x & cos\,\beta_x & cos\,\gamma_x \\ 0 & 0 & 0 & cos\,\alpha_y & cos\,\beta_y & cos\,\gamma_y \\ 0 & 0 & 0 & cos\,\alpha_z & cos\,\beta_z & cos\,\gamma_z \end{bmatrix} \qquad [12.47]$$

Mediante la matriz de transformación T, obtenida para cada barra, se pueden calcular las expresiones de todos los vectores y matrices en las nuevas coordenadas globales:

$$[p'] = [T]\,[p] \qquad [12.48]$$

$$[d'] = [T]\,[d] \qquad [12.49]$$

$$[k'_{ij}] = [T]\,[k_{ij}]\,[T]^{-1} \qquad [12.50]$$

Las ecuaciones [12.37] y [12.40] pasan a ser:

$$[p'_1] = [k'_{11}]\,[d'_1] + [k'_{12}]\,[d'_2] \qquad [12.51]$$

$$[p'_2] = [k'_{21}]\,[d'_1] + [k'_{22}]\,[d'_2] \qquad [12.52]$$

La matriz de rigidez de la estructura de (n) nudos es una matriz cuadrada definida por n x n submatrices cada una de las cuales representa la suma de las contribuciones de rigidez que todas las barras concurrentes en un nudo aportan en el mismo (lo que se corresponde con el planteamiento de la condición de equilibrio en cada uno de los nudos). De esta forma, una barra cualquiera (i,j) colaborará con su matriz k'_{11} en la submatriz (i,i) y con sus matrices k'_{12}, k'_{21} y k'_{22} en las submatrices (i,j), (j,i) y (j,j), respectivamente. La matriz obtenida k' es un matriz simétrica como corresponde también por la aplicación directa del teorema de la reciprocidad de Maxwell-Betti.

El planteamiento general conduce, por tanto, a una expresión de la forma:

$$[p'] = [k']\,[d'] \qquad [12.53]$$

donde p' y d' son, respectivamente, los vectores de carga y corrimiento generales y se han constituido en la manera siguiente:

$$[p'] = \begin{bmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ p'_3 \\ , \\ , \\ , \\ , \\ p'_n \end{bmatrix} \quad [12.54]\ ; \qquad [d'] = \begin{bmatrix} d'_1 \\ d'_2 \\ d'_3 \\ , \\ , \\ , \\ , \\ d'_n \end{bmatrix} \qquad [12.55]$$

Hasta ahora, la matriz de rigidez k' es singular y, por tanto, carece de inversa, lo que corresponde, físicamente, con el hecho de que no se han impedido los movimientos generales de la estructura considerada como sólido rígido. La introducción de las condiciones de apoyo hace regular la matriz.

La obtención del vector d' a partir de [12.53] puede hacerse invirtiendo la matriz de rigidez k', con lo que:

$$[d'] = [k']^{-1}\,[p'] \qquad [12.56]$$

aunque suele ser más usual resolver el sistema de ecuaciones; además, la resolución del sistema permite aprovechar otras especiales características de la matriz -además de la simetría- tal como el hecho de que presenta sus elementos dispuestos en banda -siempre que la numeración de nudos se haya hecho adecuadamente-, lo que reduce considerablemente las exigencias de memoria cuando el sistema se resuelve mediante ordenador.

Una vez obtenido el vector de corrimientos d' puede desglosarse en sus componentes d'_1, d'_2, etc. según [12.55], para obtener los corrimientos -en coordenadas globales- en los extremos de las barras. Aplicando sucesivamente para cada barra las ecuaciones [12.48] y [12.49] pueden hallarse los esfuerzos p y los corrimientos d en las coordenadas locales de la barra y proceder a su dimensionamiento.

El caso analizado corresponde a un estudio del entramado que, desde el punto de vista teórico es muy completo. Sin embargo, como veremos en el Capítulo 14, las incertidumbres en las características mecánicas, en especial, E, I, G, J, y la interacción de las partes no estructurales del edificio sobre la estructura, hacen que no pueda pretenderse una excesiva precisión en los resultados.

BIBLIOGRAFÍA

(12.1) SAEZ BENITO, J.M. "Cálculo matricial de estructuras formadas por piezas prismáticas". Fondo Editorial de Ingeniería Naval. Madrid, 1975.

(12.2) VÁZQUEZ, M. "Cálculo matricial de estructuras". Colegio de Ingenieros Técnicos de Obras Públicas. Madrid, 1992.

(12.3) ARGÜELLES ALVAREZ, R.; ARGÜELLES BUSTILLO, R. "Análisis de estructuras". Fundación Conde Valle de Salazar. Madrid, 1996.

(12.4) MEEK, J.L. "Matrix structural analysis". Mc.Graw-Hill. New York, 1971.

(12.5) LIVESLEY, R.K. "Métodos matriciales para cálculo de estructuras". Versión española de Editorial Blume. Madrid, 1970. (Traducción de J. Martínez Calzón).

CAPÍTULO 13

CÁLCULO MEDIANTE ORDENADOR

13.1 INTRODUCCIÓN

En los capítulos precedentes, y en especial en el 12, hemos visto las ventajas que la utilización del ordenador representa para el cálculo de estructuras en general y en particular para el caso de las estructuras de hormigón.

El cálculo mediante ordenador, a partir de las mismas hipótesis que el cálculo convencional, no supone una mayor exactitud y sus resultados adolecerán de las mismas debilidades que se señalaron en el Capítulo 3. Incluso la aparente ventaja que una mayor precisión operatoria pudiera suponer, es de importancia despreciable pues el mayor número de decimales exactos que el ordenador puede proporcionar es absolutamente superfluo en la inmensa mayoría de los cálculos estructurales. La gran ventaja del ordenador reside fundamentalmente en dos aspectos:

- Hace posible el cálculo de estructuras que, bien por el gran número de operaciones que su resolución presenta (entramados de muchos pisos, por ejemplo) o por lo tedioso de las mismas (entramados espaciales, por ejemplo) eran, en la práctica, inabordables mediante el cálculo manual.
- En la mayoría de los casos reduce a límites despreciables el riesgo de errores operatorios.

El ordenador no sólo presta importantes servicios en el cálculo de esfuerzos sino también en el dimensionamiento de las secciones y las piezas, así como en el dibujo de los planos. Sin embargo, debe prestarse atención a que el tamaño de ordenador empleado sea el adecuado para el problema que se pretende resolver. A veces, el intento de resolver problemas complejos en pequeños ordenadores conduce al empleo de programas con simplificaciones excesivas, que afectan gravemente a la validez de los resultados.

13.2 NORMALIZACIÓN ESPAÑOLA SOBRE EL USO DE ORDENADORES EN EL CÁLCULO DE ESTRUCTURAS DE HORMIGÓN

Las especificaciones españolas están recogidas en la Instrucción EHE, apartado 4.2.3 "Cálculos en Ordenador". Estas especificaciones deben ser tenidas muy en cuenta, no sólo por su interés técnico sino por su clara trascendencia jurídica en el tema de responsabilidad profesional y se reproducen a continuación:

"4.2.3 Cálculos en ordenador

4.2.3.1 Utilización de programas

Cuando se efectúen los cálculos con ayuda de ordenadores se recomienda separar en anejos especiales cada una de las etapas del cálculo resuelto con ordenador, debiendo dichos anejos constituir por sí mismos unidades completas y ordenadas.

De cada programa utilizado se indicará su identificación, su objeto y su campo de aplicación.

COMENTARIOS

Debe tenerse presente que el autor del Proyecto deberá poner especial cuidado en el control del uso de los programas dentro del ámbito de aplicación correspondiente y de la comprobación de los datos introducidos y los resultados obtenidos.

En particular se llama la atención sobre el problema que entraña el uso de programas integrados, no suficientemente transparentes, para el proyecto automático de estructuras.

No es aconsejable el uso de programas sin contar con una documentación de los mismos, que defina como mínimo:

- Título, versión y fecha de la misma.
- Nombre y titulación del autor o autores.
- Nombre y razón social de la organización distribuidora.
- Ejemplos de estructuras resueltas.

Es importante contar con una asistencia técnica por parte del autor o del distribuidor del programa, que garantice la eliminación de errores o defectos de funcionamiento.

4.2.3.2 Presentación de datos y resultados

El listado de datos contendrá tanto los datos introducidos por el proyectista como los generados por el programa, de forma que queden definidas todas las características consideradas, debiendo contener indicaciones concretas sobre notación, unidades y criterios de signos de las magnitudes utilizadas.

El listado de salida definirá los resultados necesarios para justificar adecuadamente la solución obtenida.

COMENTARIOS

Es conveniente que, para la descripción de datos y resultados, se incluyan dibujos y gráficos que faciliten su comprensión y contraste.

Es conveniente que todos los listados de resultados en forma tabular, lleven en su encabezamiento la notación y unidades para cada magnitud considerada, y que el mismo encabezamiento se repita en cada página distinta."

Con independencia de lo anterior, la realidad actual es que el proyectista, como usuario de programas, no puede proceder a una revisión integral del mismo y por lo tanto es claro que en caso de un error de proyecto debido a un fallo del programa, debe distinguirse entre dos casos muy diferentes:

- Aquel en que el proyectista selecciona erróneamente el programa, entre un conjunto de ellos suficientemente claros en cuanto a su campo de aplicación.
- Aquel otro en que el programa seleccionado se emplea dentro de un campo específico de aplicación, definido por el autor del mismo, pero contiene errores bien en la definición de su campo de aplicación, bien en otros puntos, que no son fácilmente detectables por el usuario.

El primero de los casos es evidente que supone una clara responsabilidad del proyectista. En el segundo caso, es claro también que la responsabilidad será compartida por el proyectista con el autor del programa, en proporciones que no es fácil definir y deberán ser precisadas en cada caso particular.

Es interesante comparar los párrafos citados de EHE con los equivalentes que figuraban en las ediciones anteriores de las sucesivas Instrucciones EH y EP. Es evidente que se ha abandonado la teoría de que el responsable de los resultados obtenidos mediante la utilización de un programa informático de cálculo estructural es siempre el Autor del Proyecto.

Ello es lógico si se tiene en cuenta que para desarrollar un programa informático de este tipo es necesaria la conjunción de un conjunto de conocimientos:

- Informáticos
- De cálculo estructural de los esfuerzos
- De dimensionamiento de las secciones
- De desarrollo de los detalles constructivos

Rara vez tal conjunto de conocimientos se dan en una sola persona y lo más frecuente es que se necesite un equipo de varias personas para desarrollar un programa de este tipo.

13.3 ASPECTOS GENERALES DE LOS PROGRAMAS PARA EL CÁLCULO DE ESTRUCTURAS DE HORMIGÓN

La gran demanda de este tipo de programas ha provocado la aparición de una voluminosa oferta, de calidad muy variable según los casos.

El tema ha sido analizado en profundidad en el Boletín nº 3 del GRUPO ESPAÑOL DEL HORMIGÓN (GEHO), titulado "Programas de dimensionamiento automático de estructuras de hormigón" (13.1).

El documento citado señala los siguientes *riesgos potenciales en el propio programa*:

- "Empleo de personal insuficientemente capacitado en la preparación del programa.
- Falta de concordancia entre lo que el programa realmente hace y lo que se dice que hace en su descripción, en el caso de que esta falta de concordancia sea susceptible de producir errores graves de proyecto.
- Errores de programación que podrían haberse detectado sometiendo al programa a un número suficiente de pruebas antes de ponerlo a la venta.
- Defectos en el programa o la documentación del mismo que permite que el usuario lo aplique de forma incorrecta o a estructuras o condiciones de proyecto distintas de las previstas por el autor.
- Adopción de criterios de proyecto estructural inadecuados, especialmente en el caso de que estos criterios no estén explícitamente indicados en la documentación del programa.
- Errores importantes en el programa que hayan sido detectados después de su venta e incluso corregidos en versiones posteriores, sin haber sido advertido el comprador de esta circunstancia.".

Análogamente y con igual claridad, señala los *riesgos potenciales correspondientes al usuario del programa*: "Lo que sucede es que muchas veces el nuevo dueño del ordenador carece de experiencia en el proyecto de estructuras. Antes lo encargaba a una empresa o profesional especializado. Ahora, por el contrario, corre el riesgo de pensar que la compra de un programa basta para suplir esta inexperiencia y llegar a proyectar sus estructuras. En ciertos casos puede incluso suceder que llegue a pensar que gracias al programa el proyecto estructural es una labor rutinaria que puede confiar a auxiliares. Siendo todavía escaso el control de proyectos, puede suceder que nadie le saque de su error y que las estructuras así proyectadas se construyan y se usen. Y como existe el coeficiente de seguridad, puede suceder que nadie se dé cuenta. A corto o medio plazo, claro.".

Parece conveniente que el técnico actual, al considerar las posibilidades de la informática, reflexione sobre los cuatro aspectos siguientes:

a) Los resultados salidos del ordenador nunca tendrán más precisión que la que tengan los datos introducidos. La incertidumbre en luces, cargas, inercias, rigideces, relación momentos-curvatura, etc, que hemos expuesto, en especial en los Capítulos 8, 9, 10 y 11, hace ilusoria la pretensión de una gran exactitud en la mayoría de los casos.

b) Obtener una solución con muchos decimales no quiere decir que se obtenga una solución de gran exactitud.

c) El ordenador no ha aumentado la calidad científica del cálculo de estructuras de hormigón, de la misma manera que su participación en el proceso de redacción e impresión de libros no ha mejorado la calidad literaria de las obras producidas.

d) El ordenador es una máquina que se fabrica para que las personas que saben calcular lo hagan más deprisa y con menor esfuerzo, no para que las personas que no saben calcular, puedan calcular.

e) La persona que revisa los resultados de un cálculo con ordenador debe ser capaz de estimar los órdenes de magnitud y los signos de los resultados esperables. De ahí el interés de los métodos aproximados y de los métodos de predimensionamiento (Capítulos 15 y 16), no sólo por su valor formativo, sino también como métodos de comprobación. Si la persona no tiene esa capacidad, el ordenador puede ser un instrumento peligroso en sus manos.

13.4 TIPOS DE PROGRAMAS

Esencialmente los programas que actualmente existen puede clasificarse en dos grandes grupos.

a) Programas para el cálculo de entramados planos. Resuelven el caso de entramados en el que todas las piezas tienen un plano medio común, en el que están situadas las acciones (Capítulos 4 y 5). Frecuentemente los programas tienen en cuenta la influencia de los acortamientos axiles de las piezas y pueden considerar apoyos y/o empotramientos elásticos. (Capítulo 6).

b) Programas para el cálculo de entramados espaciales. Corresponden al cálculo del caso general planteado en el Capítulo 12 y consideran en general las deformaciones de flexión, de torsión y axiles de las piezas.

   En todos los casos el programa suele requerir del Proyectista solamente la definición geométrica de la estructura, las características de los materiales y los valores y casos de combinación de acciones a considerar, proporcionando los valores de los esfuerzos en los puntos que se deseen de la luz de las piezas, y eventualmente los corrimientos y giros de los nudos.

   Los programas más sofisticados de los actualmente disponibles permiten resolver cualquier problema de cálculo lineal, esto es, mientras puedan suponerse pequeñas deformaciones y con estricta proporcionalidad entre momentos y curvaturas. Dentro de esta limitación pueden simularse, por ejemplo, vibraciones en cualquier fase y frecuencia, impactos e incluso acciones que van actuando progresivamente en el tiempo sobre distintos elementos de la estructura, como sucede, por ejemplo, con una onda expansiva producida en el interior o en el exterior del edificio, o con la construcción de un puente por voladizos sucesivos.

   Actualmente empiezan a generalizarse los programas que permiten considerar diagramas no lineales de momentos-curvaturas, permitiendo diagramas elastoplásticos, birectilíneos o poligonales, si bien su gran complejidad, con la consiguiente limitación del tipo de ordenador a que obliga el incremento del tiempo de cálculo y su elevado coste, restringen su aplicación a problemas muy concretos.

c) Programas basados en el MEF (Método de Elementos Finitos). En su base matemática el Método de Elementos Finitos es, desde el punto de vista conceptual, muy antiguo, pero de imposible aplicación, debido a la laboriosidad de los cálculos necesarios, hasta la aparición de los ordenadores. Desde el punto de vista práctico su desarrollo comenzó en la década 1950-1960.

Esencialmente el método parte de plantear los problemas estructurales en corrimientos, y no en fuerzas como hacen los métodos clásicos, hoy todavía en uso la mayoría de ellos.

El método permite calcular la mayor parte de las estructuras, tanto planas como espaciales. En las dos últimas décadas su desarrollo y su potencia han aumentado considerablemente en el campo del hormigón estructural, debido a la posibilidad de modelizar el comportamiento no lineal del material, la fisuración, el anclaje de las armaduras a partir de los labios de las fisuras, etc.

No sólo es una alternativa interesante a los programas expuestos en a) y b), sino que permite estudios mucho más complejos. De hecho el empleo de modelos reducidos, habituales en problemas especiales, se circunscribe hoy a un nivel muy reducido, dadas las posibilidades del M.E.F. Una exposición del tema puede verse en (13.3) y (13.4).

13.5 PROBLEMAS DERIVADOS DEL USO ERRÓNEO DEL ORDENADOR

La ignorancia de lo anteriormente expuesto, en especial de los puntos a) a e) citados en el apartado 13.3, va conduciendo a la generación de un conjunto creciente de casos de Patología específica del Ordenador. Véase J. CALAVERA (13.2).

BIBLIOGRAFÍA

(13.1) "Programas de dimensionamiento automático de estructuras de hormigón". GEHO. Boletín nº 3. Diciembre 1989.

(13.2) CALAVERA, J.: "Patología de estructuras de hormigón armado y pretensado". INTEMAC. Madrid. 1996.

(13.3) "Finite element handbook". McGraw-Hill Book Company. 1987.

(13.4) OÑATE, E.: "Cálculo de estructuras por el método de elementos finitos". Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería. Barcelona. 1992.

CAPÍTULO 14

EXAMEN CRÍTICO DE LOS MÉTODOS DE CÁLCULO LINEAL

14.1 GENERALIDADES

Los métodos expuestos hasta aquí adolecen de defectos importantes que analizaremos a continuación. Su análisis justifica el porqué los métodos simplificados y gran parte de los aproximados han conducido, durante muchos años, a estructuras que, siendo teóricamente incorrectas, han presentado un comportamiento satisfactorio.

Puede adelantarse ya que los métodos lineales siguen representando, por el momento, la herramienta más eficaz y de empleo más general de que disponemos. Los métodos de cálculo no lineal, aunque interesantes y prometedores, no presentan todavía, a nivel práctico, procedimientos que puedan considerarse suficientemente sencillos y de aplicación general. En el Capítulo 17 veremos algunos métodos aplicables a ciertos tipos estructurales.

A continuación analizamos las principales fuentes de error de los métodos de cálculo lineal. Basándose el desarrollo del método de cálculo en que la relación momentos-curvaturas viene dada por la ecuación [3.2]

$$\phi = \frac{M}{EI} \qquad [14.1]$$

la influencia de E e I es naturalmente destacada en cuanto a la validez de los resultados.

En la figura 14-1 se representa esquemáticamente la relación momentos-curvatura para una sección de hormigón armado sometida a flexión pura. El comportamiento dista mucho de ser lineal, e incluso en los dos tramos OA y AB que pueden aceptarse como aproximadamente lineales, los ángulos α y β no sólo dependen

de la resistencia del hormigón sino de otras muchas de sus cualidades y las de sus componentes. Influencia esencial en el diagrama tiene el carácter breve o duradero del proceso de carga y, finalmente, el máximo valor de ϕ viene fuertemente influido por la armadura transversal, a través del confinamiento que ésta ejerce en la cabeza comprimida.

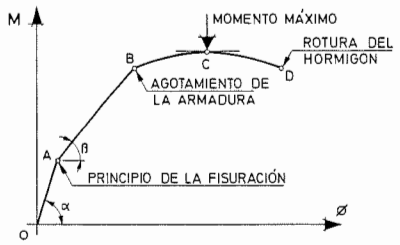


Figura 14-1

14.2 MÓDULO DE DEFORMACIÓN E_C

La fórmula de uso habitual para la determinación del valor de E_c *expresa el módulo como función lineal de la raíz cúbica de la resistencia.* Las variaciones de resistencia del hormigón, de unas zonas a otras de la estructura, afectarán por tanto a E_c. Sin embargo esto no es lo más importante, sino el hecho de que en la fórmula citada se ignoran otras influencias más acentuadas, tales como la relación A/C, el tipo de cemento y la clase de árido. Solamente el paso del empleo de árido rodado a árido de machaqueo, a igualdad de dosificación y resistencia, supone cerca de un 20% de incremento en el valor de E_c, a favor del árido de machaqueo, que aunque de menor resistencia y módulo de deformación intrínsecos que el rodado, presenta una mayor adherencia a la matriz del mortero.

Por otra parte, sea cualquiera el valor de E_c, su constancia, es decir, la aceptación de una relación lineal entre tensiones y deformaciones, no puede ser mantenida (fig. 14-2). El problema se ha agravado con la aplicación del método de cálculo de los estados límites, pues este método, al conducir a un aprovechamiento más intenso de la capacidad resistente del

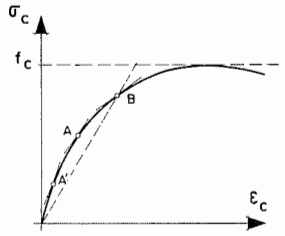


Figura 14-2

hormigón, conduce también a que en ciertas zonas las tensiones del hormigón en servicio sean muy altas y desde luego muy superiores al valor $\frac{f_c}{3}$ que suele aceptarse como límite para la hipótesis de proporcionalidad entre σ_c y ε_c.

Esto hace en definitiva que el valor de E_c a considerar en la fórmula [14.1] no sea constante en todos los puntos de la estructura, como simplificadamente supone el método lineal.

Lo anterior, en especial en el caso de entramados cuyos dinteles llevan forjados asociados, se agrava por el hecho que esquemáticamente se indica en la figura 14-3 que representa un vano de un dintel de edificio. De acuerdo con el cálculo lineal, los momentos vienen representados por el diagrama de trazo continuo y el de apoyo resulta en general del orden de vez y media el de vano. Esto quiere decir que en la sección de apoyo el hormigón presentará, en condiciones de servicio, una tensión de compresión en la zona comprimida (en este caso la inferior), representada en el diagrama tensión deformación de la figura 14-2 por un punto como por ejemplo el B. Al ser la pieza de sección constante, la cuantía necesaria y la tensión del hormigón en servicio en el centro del vano serán considerablemente menores. El punto correspondiente en el diagrama de la figura 14-2 será uno tal como el A. Esto conduce ya a que las curvaturas en ambas secciones no estén en la relación de los momentos, sino en otra mayor dada la diferencia de los módulos E_c en A y B. El efecto de esto es "descolgar" el diagrama a una posición como la de trazos de la figura 14-3.

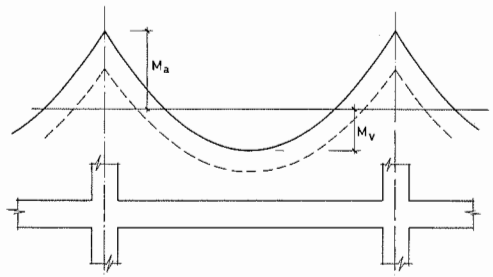


Figura 14-3

La situación es realmente más grave que la indicada, ya que si, como es habitual y vimos en el Capítulo 10, para el cálculo de los esfuerzos se ha considerado como sección del dintel sólo la de la viga y se ha despreciado la colaboración del forjado, ello no impedirá que en el funcionamiento real de la estructura el forjado colabore de forma importante, reduciendo considerablemente la tensión en servicio, σ_A, del hormigón en la zona central del vano, de forma que su punto representativo en el diagrama de la figura 14-2 ya no será el A, sino otro A' correspondiente a una tensión notablemente inferior. Esto acentúa aún más la diferencia de valores de E_c. Si además se considera que las deformaciones diferidas del hormigón serán de una o dos veces

las elásticas instantáneas, aún se agrava más el problema y, especialmente en los casos de estructuras cuya carga permanente es importante frente a la sobrecarga (lo cual es frecuente en muchos edificios), conducirá en definitiva a que con el tiempo se vayan reduciendo los momentos de apoyo y aumentando los de vano, apartándose la distribución notablemente de lo que indica el cálculo lineal. Esta situación, que analizaremos con mayor rigor más adelante, está en parte paliada por el hecho, corrector en cierta medida del fenómeno indicado de que si el cálculo lineal se da por correcto, la estructura se armará con arreglo a él.

En conjunto, las investigaciones realizadas han conducido a que, en condiciones de servicio, las estructuras reales se comporten con una razonable concordancia con las previsiones del cálculo lineal. En cambio, en fases de pre-rotura y rotura, las diferencias son importantísimas.

14.3 MOMENTO DE INERCIA I

Ya en el Capítulo 10 señalamos la incertidumbre del valor a tomar, incertidumbre especialmente grande si las vigas llevan forjados asociados.

Existe, además otra fuente de incertidumbre importante, suponiendo establecida con claridad la sección a tomar en el cálculo. Su origen reside en el hecho de que en las zonas de máximos momentos de ambos signos en las piezas, el hormigón estará fisurado. Esto es habitualmente más acusado en las vigas que en los pilares y es un hecho más intensamente producido también con los nuevos métodos de cálculo de secciones, tales como el hoy habitual de los estados límites y con el empleo de las armaduras de alto límite elástico.

En la figura 14-4 se representa una parte de viga correspondiente a la zona de momentos máximos (positivos o negativos). En condiciones de servicio, en especial cuando la sobrecarga nominal se produce realmente o cuando su valor es poco importante en relación a las cargas permanentes, la fisuración será apreciable. En la figura se han representado, en correspondencia con la posición de las fisuras, las leyes generales de distribución de tensiones de tracción en la armadura y en el hormigón que

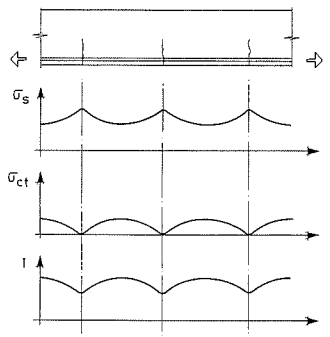


Figura 14-4

la rodea. En las fisuras, el esfuerzo de la tracción necesario para equilibrar el momento, evidentemente ha de ser proporcionado íntegramente por la armadura y las tensiones σ_s, en ella son máximas. Al alejarse la armadura de una fisura, se realiza paulatinamente su anclaje en el hormigón, tanto más deprisa cuanto más fino sea el diámetro y más eficiente el corrugado de las barras y, como consecuencia de ello, la armadura reduce sus tensiones y transfiere parte del esfuerzo de tracción al hormigón. El proceso se invierte al acercarse la armadura a la fisura siguiente. Correlativamente a lo anterior, las tensiones de tracción, σ_{ct}, en el hormigón, son naturalmente nulas en las fisuras y aumentan gradualmente entre dos fisuras consecutivas.

Consecuencia de todo ello es que el valor de I varía a lo largo de la luz, con mínimos en los planos de las fisuras. Estos valores mínimos son considerablemente inferiores a los de la sección sin fisurar. Entre dos fisuras consecutivas el hormigón presenta un fenómeno de "rigidización" de la pieza y todo ello hace que la evaluación del valor de I sea muy incierta, afectando naturalmente a la validez de los cálculos.

Un segundo aspecto que introduce error en los resultados del cálculo lineal es el de la modificación que en los valores de I a lo largo de la luz introduce la existencia de pilares. En la figura 14-5 se representa una zona de un entramado. Si se considera la viga AA' de luz L entre ejes de apoyos, entre B y B' su canto es h_t, y su momento de inercia puede ser calculado, con las incertidumbres introducidas por las consideraciones expuestas anteriormente. Pero al llegar a las zonas AB y B'A', su sección no es de canto h_t, sino de la altura de piso h. Esto supone un efecto de acartelamiento enormemente importante. Su trascendencia ha sido evaluada aproximadamente por WINTER, URQUHART, O'ROURQUE y NILSON (14.1) a partir de estudios de GERMUNDSSON (14.2) en órdenes de un aumento de los momentos de apoyo y una reducción de los de vano del 4% del momento isostático del tramo.

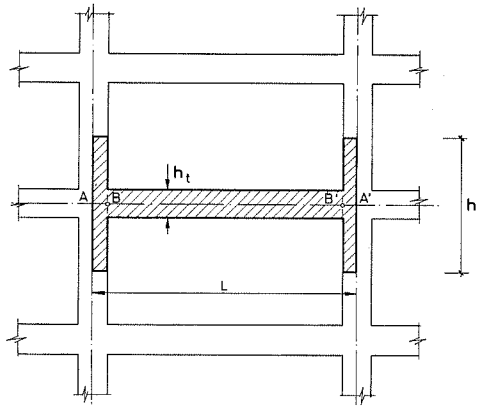


Figura 14-5

14.4 LUCES DE CÁLCULO

Ya en el apartado 1 del Capítulo 10 analizamos el problema del redondeo de los momentos negativos debido a la distribución de la reacción de apoyo en el ancho del pilar. Aunque la cuestión es insuficientemente conocida, la luz efectiva está comprendida entre la libre y la luz entre ejes, pero no es posible fijar con exactitud su valor. En ciertos tipos de estructura, especialmente en edificios industriales sometidos a grandes cargas, el ancho del pilar es importante frente a la luz y lo anterior tiene una importancia no desdeñable.

14.5 ALGUNAS HIPÓTESIS BÁSICAS

Todo lo expuesto en los Capítulos anteriores presupone una estructura exenta, es decir no coaccionada por partes no estructurales del edificio.

En bastantes edificios industriales y deportivos esto es sustancialmente cierto. Sin embargo, en muchos otros edificios, sobre todo en edificios de viviendas, oficinas, etc., la situación es bastante diferente y pueden destacarse tres tipos de coacciones muy frecuentes:

a) Las tabiquerías y fachadas, en especial las de ladrillo, coaccionan de forma importante la deformabilidad vertical de forjados y vigas.

b) Las fachadas no flotantes, es decir las unidas de forma rígida a la estructura y las tabiquerías reducen los corrimientos horizontales de la estructura.

c) Los cerramientos de cajas de escalera y de ascensores producen en ocasiones los efectos a) y b), en especial este último.

Estas coacciones hacen que las situaciones reales de muchas estructuras sean bastante diferentes de las anunciadas por el cálculo. Una aproximación al tema del cálculo de estas coacciones ha sido realizada por SMITH (14.3). Sin embargo, en nuestra opinión, *estas colaboraciones deben ser consideradas con cautela*, pues si bien son razonablemente eficaces para estados de servicio, es muy dudoso que persistan hasta la rotura, por lo cual, la situación de la estructura en su estado límite último sería la de la estructura independiente de esas coacciones.

BIBLIOGRAFÍA

(14.1) WINTER, G.; URQUHART, L.C.; O'ROURQUE C.E.; NILSON, A.H. "Design of concrete structures". McGraw-Hill. New York. 1964.

(14.2) GERDMUSSON, T.: "Effect of column width on continuous beam moment".Journal ACI. Junio 1958.

(14.3) SMITH, B.S. "Behaviour of square infilled frames". Proceedings, ASCE. Febrero 1966.

CAPÍTULO 15

MÉTODOS APROXIMADOS

15.1 INTERÉS ACTUAL DE LOS MÉTODOS APROXIMADOS

Durante muchos años los métodos aproximados constituyeron la única posibilidad práctica de abordar el cálculo de estructuras complejas o, simplemente, de gran número de piezas. Aunque muchos de ellos conducen a resultados que se apartan claramente de los obtenidos mediante un análisis riguroso de acuerdo con las hipótesis del cálculo lineal, la experiencia de su uso fue en general satisfactoria.

Sin embargo, lo anterior debe interpretarse con cuidado, pues el buen funcionamiento (o mejor dicho el funcionamiento no malo) que estos métodos "heterodoxos" han presentado, en general, no sólo debe atribuirse a las causas analizadas en el Capítulo 14, sino, en ocasiones, también a una simple reducción de los coeficientes de seguridad de la estructura.

Actualmente, con la facilidad de uso de los ordenadores, creemos que el interés de los métodos aproximados se ha reducido pero no ha desaparecido. El análisis riguroso, bien de la estructura completa, bien de partes reducidas de la misma de acuerdo con lo que expusimos en el Capitulo 8, es muy sencillo.

Sin embargo, creemos que los Métodos aproximados siguen presentando tres campos de utilización interesantes:

a) Para el análisis preliminar de las soluciones de anteproyecto.

b) Para el predimensionamiento de la estructura con vistas al cálculo definitivo con métodos más rigurosos, tema que abordaremos en el Capítulo 16.

c) Para la comprobación local de puntos de la estructura, caso en que no tiene interés alguno repetir el cálculo completo de la misma.

En este sentido, toda persona que calcula estructuras, aunque analice como es lógico sus cálculos con ordenador, debería conocer estos métodos aproximados, que son los que le permitirán realizar estimaciones rápidas de los resultados esperables y por tanto verificar los datos de salida de los programas informáticos.

En este sentido exponemos a continuación los métodos más frecuentes.

15.2 MÉTODOS SIMPLIFICADOS PARA EL CÁLCULO DE ESFUERZOS DEBIDOS A ACCIONES VERTICALES

15.2.1 MÉTODO DE LA NORMA ACI 318-95

La norma citada (15.1) establece los dos métodos siguientes:

15.2.1.1 Vigas continuas

El método se aplica a aquellos casos que cumplen las cuatro condiciones siguientes:

a) Hay como mínimo dos vanos.

b) La mayor de cada dos luces contiguas no excede en más del 20% a la menor (33%).

c) Las cargas pueden considerarse uniformemente distribuidas.

d) Las sobrecargas no exceden el triple del valor de las cargas permanentes.

Cumplidas las condiciones anteriores, los valores de los esfuerzos se obtienen directamente de la Tabla 15.1. El valor que en b) se indica entre paréntesis corresponde a la opinión del autor y amplía considerablemente el alcance del método.

15.2.1.2 Entramados

Se acepta con carácter absolutamente general que el cálculo de cualquier dintel y de los pilares superiores e inferiores puede realizarse suponiendo los extremos opuestos de estos pilares perfectamente empotrados. Este método coincide con lo expuesto en 8.3.

15.2.2 MÉTODO DE LA INSTRUCCIÓN EHE

Presenta como ventaja importante respecto al método visto en 15.2.1.2 el que proporciona no sólo los esfuerzos en los dinteles sino también en los pilares.

El método es sólo aplicable a entramados que cumplen simultáneamente las cuatro condiciones siguientes:

a) La estructura está sometida exclusivamente a la acción de cargas verticales, uniformemente repartidas de igual valor por unidad de longitud.

b) La carga variable no es superior a la mitad de la carga permanente.

c) Dentro de cada vano, las piezas son de sección constante, es decir, no existen cartelas.

d) Las luces de dos vanos adyacentes cualesquiera no difieren entre sí en más del 20% de la mayor.

A) MOMENTOS FLECTORES[1]. Los valores se indican en la figura 15-1.

TABLA 15.1 [2]

1 MOMENTOS POSITIVOS	
1.1 Vanos extremos.	
a) Extremo exterior no coaccionado.	$\frac{p\ell^2}{11}$
b) Extremo exterior construido monolíticamente con su apoyo.	$\frac{p\ell^2}{14}$
1.2 Vanos interiores.	$\frac{p\ell^2}{16}$
2 MOMENTOS NEGATIVOS	
2.1 En la cara exterior del primer apoyo interior.	
a) Dos vanos.	$-\frac{p\ell^2}{9}$
b) Más de dos vanos.	$-\frac{p\ell^2}{10}$
2.2 En la cara exterior de otros apoyos interiores.	$-\frac{p\ell^2}{11}$
2.3 En la cara exterior de todos los apoyos interiores para forjados cuya luz máxima no excede los 3 m y vigas en las que la relación de la suma de rigideces de los pilares superior e inferior de cada extremo de la viga no es inferior a ocho veces la rigidez de la viga.	$-\frac{p\ell^2}{12}$
2.4 En la cara exterior del apoyo extremo de vigas o losas construídas monolíticamente con sus apoyos.	
a) Cuando el apoyo es una viga en la que la considerada se empotra produciendo torsiones.	$-\frac{p\ell^2}{24}$
b) Cuando el apoyo es un pilar extremo.	$-\frac{p\ell^2}{16}$

1 Los coeficientes multiplican a $q\ell^2$, donde q es la carga por unidad de longitud y ℓ es la luz del vano, para los momentos positivos, y la semisuma de las luces de los vanos contiguos para los momentos negativos. Se toman como luces las distancias entre ejes de pilares del piso inferior.

2 p es la carga por unidad de longitud, ℓ es la luz libre entre caras de apoyo para momentos positivos y la semisuma de las luces libres de los vanos contiguos para momentos negativos.

3 CORTANTES

3.1 Cortante en la cara exterior del apoyo interior en vano extremo. $1{,}15\dfrac{p\ell}{2}$

3.2 Cortante en la cara exterior de todos los demás apoyos. $\dfrac{p\ell}{2}$

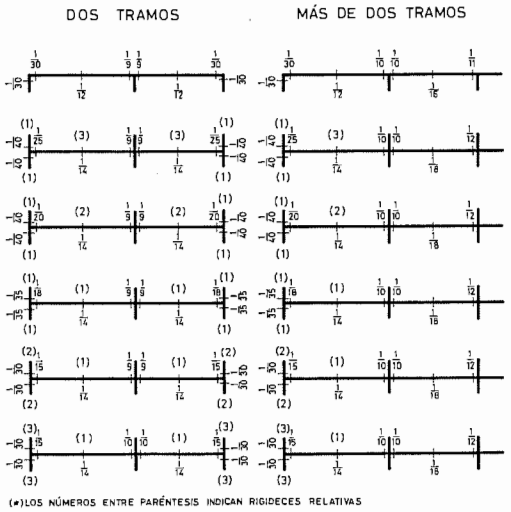


Figura 15-1

Obsérvese que el método desprecia los momentos flectores en los pilares interiores. De acuerdo con lo visto en el Capítulo 14 y con las limitaciones b) y d) expuestas, esto es fácilmente aceptable. La costumbre en cambio de despreciar los momentos en los pilares interiores con diferencias de luces o desequilibrios de cargas importantes, no es realmente justificable.

B) ESFUERZOS CORTANTES

- En sección de apoyo de vano extremo en pilar interior $1{,}15\dfrac{p\ell}{2}$

- En todas las demás secciones de apoyo $\dfrac{p\ell}{2}$ [1]

C) ESFUERZOS AXILES

Se calculan de acuerdo con los valores establecidos para los cortantes.

1 EHE no indica el valor de ℓ a tomar para el cálculo de los esfuerzos cortantes. Es lógico tomar el libre.

El método es bastante más conservador que el del ACI indicado en 15.2.1.1, ya que si bien los coeficientes indicados en la Tabla 15-1 son prácticamente iguales a los que se adoptan para momentos flectores de vigas en la figura 15-1, debe tenerse en cuenta el distinto valor adoptado para las luces, que es el de la luz libre en el método del ACI y el de la luz entre ejes de apoyos en el método de EHE. Con un valor de ancho de soporte a luz entre ejes de soportes del vano de $\dfrac{L}{20}$, la diferencia en los valores de los momentos es del 10%. En zonas bajas de edificios de altura media y en zonas medias y bajas de edificios de gran altura, el valor $\dfrac{L}{20}$ es frecuentemente superado y las diferencias son, por tanto, aún más importantes.

Un inconveniente importante del método de EHE es la condición b), de que la carga variable no supere la mitad de la carga permanente. A nuestro juicio, se trata de una limitación excesivamente prudente y restringe el empleo del método prácticamente a sólo los edificios de viviendas y las cubiertas. **Creemos que dicho límite puede elevarse hasta cargas variables iguales a la permanente, lo cual extiende la aplicabilidad del método a la mayoría de los casos prácticos de edificios de oficinas, hospitales, hoteles, etc. y a un gran número de edificios industriales.**

15.3 MÉTODOS SIMPLIFICADOS PARA EL CÁLCULO DE SOLICITACIONES DEBIDAS A ACCIONES HORIZONTALES [1]

15.3.1 MÉTODO DEL PÓRTICO [2]

El método presupone que los puntos de momento nulo, bajo las acciones horizontales, se hallan en el punto medio de la luz tanto en vigas como en pilares (figura 15-2).

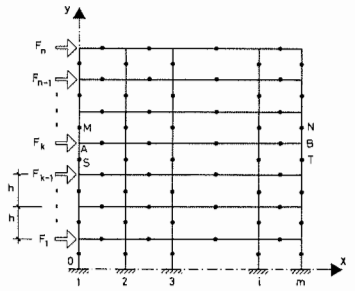


Figura 15-2

1 De todos los sistemas que exponemos, en nuestra opinión el más adecuado es el pórtico, expuesto en 15.3.1 con la corrección de SVED y BULL que se detalla en 15.3.3. De todas formas todos estos métodos son eficaces para determinar los esfuerzos axiales en los pilares extremos de los pórticos, pero su uso requiere un cierto entrenamiento para aplicarlo a los pilares restantes.

2 Este método fue publicado por A.SMITH en 1915 (15.2).

Supongamos aislado el dintel AB, por ejemplo, con las mitades de los pilares superiores e inferiores (figura 15-3).

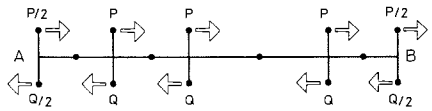


Figura 15-3

Sea $\sum_{k+1}^{n} F_j$ la suma de acciones horizontales desde cubierta hasta el piso inmediato superior al considerado y $\sum_{k}^{n} F_j$ la suma desde cubierta hasta el piso considerado[1].

El valor $\sum_{k+1}^{n} F_j$ se repartirá entre toda la serie de articulaciones de pilares MN.

En lo que sigue, se supone que dicha distribución se realiza según los valores $\frac{P}{2}$ y P de la figura 15-3 [2], siendo:

$$P = \frac{\sum_{k+1}^{n} F_j}{m - 1} \qquad [15.1]$$

donde m - 1 es el número de vanos del dintel. (Acciones de la estructura superior sobre los tramos de semiluz de los pilares superiores interiores).

Análogamente el valor $\sum_{k}^{n} F_j$ se reparte entre todas las articulaciones de la serie ST de la figura 15-2, según los valores $\frac{Q}{2}$ y Q de la figura 15-3, siendo:

$$Q = -\frac{\sum_{k}^{n} F_j}{m - 1} \qquad [15.2]$$

1 Tanto en este método como en el siguiente, deducimos las fórmulas generales. Para el trabajo práctico, es mejor calcular directamente los valores numéricos correctos.

2 Se supone por lo tanto que todos los pilares interiores absorben el mismo cortante y que los de fachada absorben la mitad. Esta hipótesis se basa por tanto en aceptar que los pilares de fachada tienen rigidez mitad de la de los interiores.
Existen variantes del método.Una muy conocida es suponer que los cortantes se reparten entre los pilares en proporción a las luces tributarias de cortante isostático correspondientes a cada pilar. Esto tiene el inconveniente de que los esfuerzos axiles resultan nulos en todos los pilares interiores.

Esta distribución supone que aproximadamente los pilares de fachada tienen rigidez mitad de los interiores y que éstos son todos de igual rigidez.

De acuerdo con lo anterior, respeto al sistema de ejes indicado en la figura 15-2, el momento flector en arranque del pilar superior del nudo A vale:

$$M^p_{1,k} = -\frac{P}{2}\frac{h}{2} \qquad [15.3]$$ [1]

Para el pilar inferior del mismo nudo: (Q es positiva hacia la derecha. El valor del momento corresponde al momento flector, no al de empotramiento).

$$M^p_{1,k-1} = -\frac{Q}{2}\frac{h}{2} \qquad [15.4]$$ [2]

Para el extremo dorsal de la viga del primer vano, el momento de empotramiento ha de equilibrar el nudo, luego $-M^v_{1,k} = -(-M^p_{1,k} + M^p_{1,k-1})$ ya que en los extremos dorsales los momentos flectores son de igual valor pero de signo contrario a los de empotramiento. El momento flector vale por tanto

$$M^v_{1,k} = -\frac{h}{4}(P - Q) \qquad [15.5]$$

Para los nudos interiores, los momentos de empotramiento en pilares son dobles de los proporcionados por las fórmulas [15.3] y [15.4] y para las restantes extremidades de vigas, al estar el punto de momento nulo en el centro de la luz, el valor [15.5] se propaga a lo largo del dintel siendo el mismo para todos los empotramientos de vigas hasta la fachada opuesta.

El cálculo de los esfuerzos axiles es inmediato a partir de los esfuerzos cortantes en cada vano.

$$-V_d = V_f = \frac{M_{fd} - M_{ff}}{L} \qquad [15.6]$$

y teniendo en cuenta que M_{fd} viene dada por [15.5] y M_{ff} es igual y de signo contrario, se obtiene para todos los vanos

$$-V_d = V_f = \frac{h\,(P - Q)}{2L} \qquad [15.7]$$

bastando para cada pilar en cada planta sumar los cortantes correspondientes a ese pilar desde esa planta hasta más alta para obtener el esfuerzo axil.

1 Se suponen todos los pisos de la misma altura. El cálculo es también muy simple aunque las alturas sean diferentes.

2 Las fuerzas P y Q son acciones del resto de la estructura sobre la estructura parcial indicada en la figura 15-3. Los sentidos de avance se consideran coincidentes con las direcciones positivas de los ejes. Recuérdese que P y Q se consideran positivas en el sentido positivo del eje OX.

Obsérvese que para luces iguales, las reacciones de las dos vigas sobre cualquier nudo interior son iguales en valor y de signo contrario, lo que supone que el método del pórtico conduce, en ese caso, a que los esfuerzos axiles debidos a las cargas horizontales son nulos en todos los pilares interiores, lo que puede conducir a errores importantes en el caso de edificios esbeltos.

15.3.2 MÉTODO DEL VOLADIZO [1]

El método se basa en las hipótesis siguientes:

a) Los puntos de momento nulo se hallan en el punto medio de la luz, tanto en vigas como en pilares.

b) La distribución de tensiones en los distintos pilares del entramado es proporcional a sus distancias al baricentro de las áreas de sus secciones. (Figura 15-4).

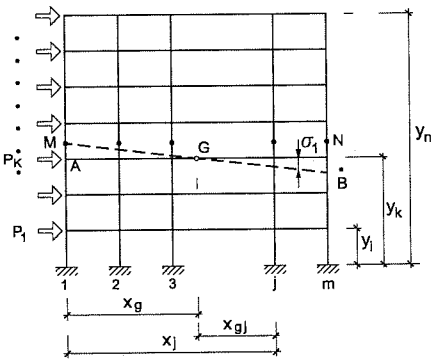


Figura 15-4

De acuerdo con b), en un pilar j la tensión σ_j (figura 15-4) es proporcional a la distancia X_{gj} del baricentro G al eje de ese pilar. (De ello viene el nombre del método, por semejanza con los resultados de considerar AB como la sección de un voladizo de luz la altura del entramado y sometido a las cargas horizontales).

La determinación del punto G, si llamamos S_j al área de la sección recta del pilar j y x_j a su distancia al eje del pilar 1, se obtiene directamente tomando momentos estáticos de las áreas S_i .

$$X_g = \frac{x_2 S_2 + x_3 S_3 + ... + x_{m-1} S_{m-1} + x_m S_m}{S_1 + S_2 + ... + S_m} \qquad [15.8]$$

Si llamamos $\sum_k^n P_i$ a la resultante de todas las cargas horizontales desde la planta k considerada hasta cubierta, la resultante de las acciones horizontales en la fila de

1 Este método fue publicado por A.WILSON en 1908 (15.3)

articulaciones M, N situadas en la mitad de la altura de los pilares será igual a $\sum_k^n P_i$ y su momento respecto a G será

$$M = \frac{h}{2} \sum_{i=k}^{i=n} P_i + \sum_{i=k}^{i=n} P_i \, (y_i - y_k) \qquad [15.9]$$

donde h es la altura del piso considerado.

Llamando $\sigma_1, \sigma_2, ... \sigma_m$ las tensiones en los pilares 1, 2, ... m, y $x_{g1}, x_{g2}, ... x_{gm}$ las distancias de sus ejes al baricentro, se ha de cumplir

$$M = \sigma_1 S_1 x_{g1} + \sigma_2 S_2 x_{g2} + ... + \sigma_m S_m x_{gm} \qquad [15.10]$$

y por la linealidad de deformaciones aceptada

$$\frac{\sigma_1}{x_{g1}} = \frac{\sigma_2}{x_{g2}} = ... = \frac{\sigma_m}{x_{gm}} \qquad [15.11]$$

y eliminando $\sigma_1, \sigma_2 ... \sigma_{m-1}$ de [15.11] y sustituyendo en [15.10] se obtiene:

$$M = \frac{\sigma_j \sum_1^m x^2_{gj} S_j}{x_{gj}} \qquad [15.12]$$

De [15.12] se obtienen los valores de σ en cada pilar, que multiplicados por las áreas respectivas nos proporcionan los valores $N_1, N_2, ..., N_m$ de los esfuerzos axiles. Esta operación se repite para cada planta.

Considerando el nudo H, correspondiente al soporte i, de la figura 15-5, se obtienen las fórmulas para los esfuerzos en cualquier vano, de acuerdo con lo que sigue.

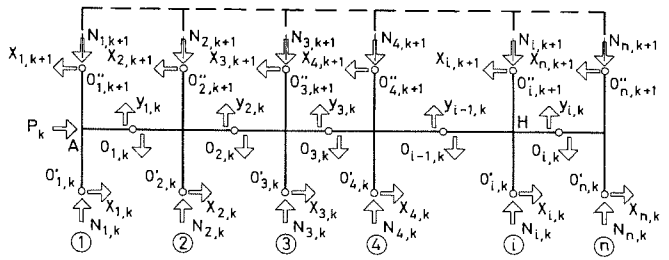


Figura 15-5

El equilibrio del sólido $0_{i-1,k}$; $0''_{i,k+1}$; $0_{i,k}$; $0_{i,k}$; $0'_{i,k}$ permite establecer

$$-Y_{i-1,k} + N_{i,k} + Y_{i,k} - N_{i,k+1} = 0$$

de donde

$$Y_{i,k} = Y_{i-1,k} - N_{i,k} + N_{i,k+1} \qquad [15.13]$$

Tomando momentos respecto al nudo H

$$Y_{i-1,k}\,\frac{\ell_{i-1}}{2} + X_{i,k}\,\frac{h}{2} + Y_{i,k}\,\frac{\ell_i}{2} + X_{i,k+1}\,\frac{h}{2} = 0$$

$$X_{i,k} = -\,\frac{\ell_i\, Y_{i,k} + \ell_{i-1}\, Y_{i-1,k} + X_{i,k+1}\, h}{h} \qquad [15.14]$$

y los esfuerzos resultan por tanto

Viga de luz ℓ_i

Momento flector:

$$M^v_{i,k} = Y_{i,k}\,\frac{\ell_i}{2} \qquad [15.15]$$

Esfuerzo cortante:

$$V^v_{i,k} = Y_{i,k} \qquad [15.16]$$

Esfuerzo axil:

$$X'_{i,k} = P_k + \sum_1^i X_{j,k} - \sum_1^i X_{j,k+1} \qquad [15.17]$$

Pilar, i, del piso k-1 al k

Momento flector:

$$M^p_{i,k} = -\,X_{i,k}\,\frac{h}{2} \qquad [15.18]$$

Esfuerzo cortante:

$$V^p_{i,k} = X_{i,k} \qquad [15.19]$$

Las fórmulas [15.13] a [15.19] son válidas para cualquier vano, incluidos los del dintel superior y los vanos extremos de cualquier dintel, sin más que hacer nulos en ellas los términos correspondientes.

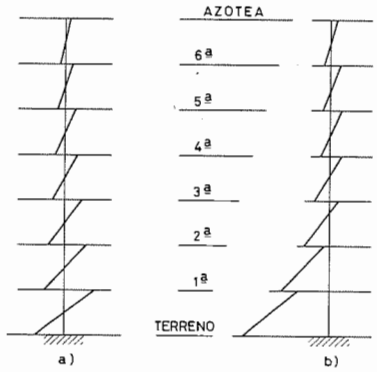
Conocidos los valores N de los esfuerzos axiles, el cálculo mediante las fórmulas [15.13] a [15.19] *debe comenzarse por un nudo extremo del dintel más alto* y continuarse con el resto del dintel y los pilares en que se apoya. A continuación, se calcula el dintel inferior, comenzando también por un nudo extremo y así sucesivamente.

15.3.3 CORRECCIÓN DE BULL Y SVED A LOS MÉTODOS DEL PÓRTICO Y DEL VOLADIZO

Tanto el método del pórtico como el método del voladizo satisfacen a las ecuaciones de la estática pero no a las de compatibilidad de deformaciones. Esto hace que dichos métodos introduzcan errores importantes, especialmente en las zonas bajas de estructuras de edificios altos. F.B. BULL y G. SVED desarrollaron en 1962 un método que puede estudiarse en detalle en la referencia (15.4). Dicho método corrige en gran medida el error de suponer que los momentos son nulos en los puntos medios de la luz de los pilares (figura 15-6 a) cuando en realidad los puntos de momentos nulos pueden estar fuera de la luz del pilar (figura 15-6 b).

BULL y SVED establecen un factor C que, multiplicado por el momento flector del pilar dado por los métodos del pórtico o del voladizo, proporciona el valor del momento con bastante mejor aproximación.

Es fácil ver que, si la rigidez de las vigas es despreciable frente a la de los pilares, éstos trabajan como voladizos, sin que las acciones horizontales induzcan en ellos esfuerzos axiles. En este caso, el coeficiente C para la planta baja, al crecer el número n de plantas, tiende hacia el valor n.



DISTRIBUCIÓN DE MOMENTOS EN PILARES SEGÚN EL MÉTODO DEL PORTAL (a) Y DISTRIBUCIÓN REAL (b) EN UN EDIFICIO ALTO DE TIPO MEDIO.

Figura 15-6

Por el contrario, si la rigidez de las vigas es infinita frente a la de los pilares, los métodos del pórtico y del voladizo resultan ciertos y C tiende hacia la unidad.

Para edificios sin sótanos, el gráfico de la figura 15-7 da, en función del número total n de plantas y de la relación $\frac{k_p}{k_v}$ de rigideces del pilar a las vigas[1], el valor del coeficiente C a aplicar a los pilares de planta baja.

Como puede apreciarse, a partir de seis plantas los valores de C no dependen prácticamente del número de plantas.

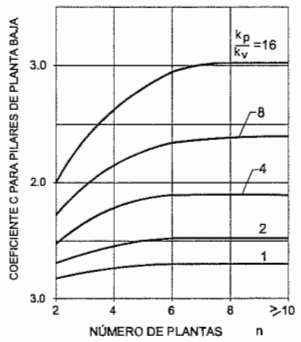


Figura 15-7

Los coeficientes C para pilares pueden variar de forma importante respecto a lo expuesto si el edificio tiene sótano.

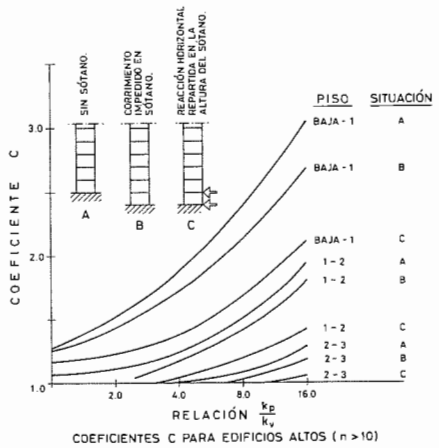


Figura 15-8

1 k_v es, en general, la suma de rigideces de las dos vigas contiguas al pilar considerado.

En la figura 15-8 se obtienen los coeficientes C que deben aplicarse a las tres plantas inferiores en las tres situaciones siguientes:

A. Estructura empotrada a nivel de planta baja en el terreno. (Coincide con lo recogido en la figura 15-7).

B. Estructura que tiene impedidos los corrimientos en toda la profundidad del sótano, bien sea por la naturaleza del suelo, bien por la rigidez de muros y forjados o por cualquier otro procedimiento.

C. Estructura en la que la reacción horizontal en la profundidad del sótano se reparte uniformemente en los distintos niveles de cimentación y forjados comprendidos en dicha profundidad.

Los coeficientes C deben aplicarse a las tres plantas a partir del terreno y a las de sótano. Para las superiores, puede aceptarse $C = 1$ si, como es usual, las secciones de los pilares se van reduciendo. En caso contrario, C puede alcanzar valores apreciablemente mayores que la unidad, pero esto no resultará crítico en la elección de la escuadría del pilar de hormigón[1].

En cualquier caso, los esfuerzos axiles se obtienen multiplicando los resultantes del cálculo según el método del pórtico o el del voladizo por un coeficiente λ que viene dado por la expresión

$$\lambda = 1 + \frac{(C - 1)}{n - n_i} \qquad [15.20]$$

donde C es el coeficiente resultante de los gráficos de las figuras 15-7 ó 15-8 respectivamente, n el número de plantas de la estructura y n_i el de la planta considerada contada desde el terreno.(Para $n_i = n$, debe tomarse en [15.20] el valor $\lambda = 1$).

15.3.4 MÉTODO DE LA NORMA BAEL 83

La Norma Francesa BAEL 83 (15.5) indica como utilizable un método que es mezcla de los del pórtico y del voladizo, con alguna adición propia. Consiste en lo siguiente:

a) El método es de aplicación a entramados en los cuales la rigidez de las vigas no es inferior al quinto de la de los pilares en que apoyan.

b) Las fuerzas horizontales que actúan sobre la fila de pilares de un piso determinado se reparten entre esos pilares proporcionalmente a sus rigideces, afectada la rigidez de los pilares extremos de un coeficiente igual a 0,8.

c) En los pilares de plantas distintas de la baja, se supone que el punto de momento nulo está en la mitad de la luz.

d) La norma no da reglas para situar el punto de momento nulo en los pilares de planta baja. Nuestra opinión es que puede considerarse también a un medio de la altura[2].

1 Como se indicó, se parte de que estos métodos van a ser usados como métodos de predimensionamiento.

2 Si bien es cierto que la unión al terreno se aleja habitualmente mucho del empotramiento perfecto, también ocurre eso en la unión al dintel de techo.

e) Los esfuerzos de los pilares se suponen proporcionales a su distancia al punto medio de la longitud total del dintel. (Punto *M* en la figura 15-9).

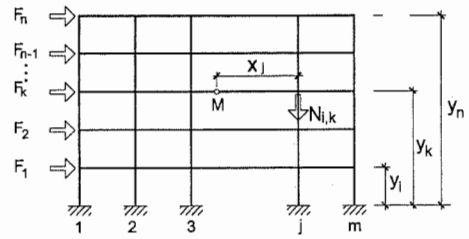


Figura 15-9

El Esfuerzo axil $N^j_{i,k}$ del soporte j (figura 15-9) en la planta k, viene dado por lo tanto por

$$N^j_{i,k} = \frac{x_j \left[\frac{h}{2} \sum_{i=k}^{i=n} F_i + \sum_{i=k}^{i=n} F_i \, (y_i - Y_k) \right]}{\sum_{1}^{m} x_j^2} \qquad [15.21]$$

Los valores de x son positivos para pilares más alejados de la fachada de barlovento que el punto medio M del dintel y negativos en caso contrario.

Obsérvese que este método sólo es válido para el cálculo de esfuerzos axiles en pilares (que es el problema fundamental en el predimensionamiento), pero no lo es para hallar esfuerzos cortantes ni momentos flectores en vigas, ya que los esfuerzos axiles en pilares no están en equilibrio.

En nuestra opinión, la corrección del BULL y SVED debe aplicarse también a este procedimiento.

BIBLIOGRAFÍA

(15.1) ACI 318-95 "Building code requirements for structural Concrete". American Concrete Institute. Detroit, 1995.

(15.2) SMITH, A. "Wind stresses in the frames of office buildings". Journal of the Western Society of Engineers. U.S.A.. Abril 1915.

(15.3) WILSON, A.C. "Wind bracing with knee braces or gusset plates". Engineering Record. Septiembre 1908.

(15.4) BULL, F.B.; SVED, G. "The design of tall buildings under wind loads". Symposium on the design of high buildings. Hong-Kong 1962.

(15.5) Règles tecniques de conception et de calcul des ouvrages et constructions en beton armé suivant la méthode des états limites. Règles BAEL 83. Eyrolles. París 1983.

CAPÍTULO 16

PREDIMENSIONAMIENTO

16.1 CONSIDERACIONES PREVIAS

En todas las estructuras es necesario, para realizar su cálculo de esfuerzos, fijar previamente sus dimensiones. En el caso de las isostáticas, esta necesidad surge exclusivamente de la necesidad de conocer su peso propio. Como en la mayoría de los casos el peso propio representa una fracción pequeña de la carga total, un error de estimación suele tener escasa importancia.

En el caso de estructuras hiperestáticas, el problema es más complejo pues las dimensiones, al influir en las rigideces de las piezas, afectan de manera importante a la distribución de los esfuerzos. Un error grande de apreciación en el tamaño de una pieza puede ocasionar el que no sea capaz, con la sección elegida, de resistir los esfuerzos resultantes o, más frecuentemente, que conduzca a una cuantía excesivamente alta o, en otros casos, a escuadrías excesivas.

Es clara por tanto no sólo la necesidad de un predimensionamiento para poder realizar el cálculo de las estructuras hiperestáticas, sino la necesidad también de que este predimensionamiento conduzca a unas secciones adecuadas a los esfuerzos que resultarán del cálculo.

Errores apreciables en el predimensionamiento conducirán a repeticiones costosas del cálculo.

Aunque es evidente que la experiencia y la habilidad del Proyectista son en esto las mejores armas, los métodos simplificados que vimos en el Capítulo 8 y, sobre todo, los aproximados expuestos en el Capítulo 15, suponen una ayuda muy importante.

El proceso exige dos etapas: Determinación aproximada de Esfuerzos y Elección de Secciones adecuadas para resistirlos.

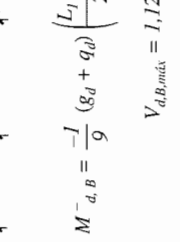
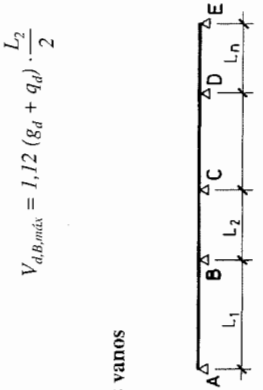
Debe advertirse que no se incluye en este Capítulo el predimensionamiento de placas ni el de pavimentos, ya que la información contenida en los Capítulos 20 y 70, dedicados específicamente a esos temas, proporciona un predimensionamiento inmediato.

16.2. DETERMINACIÓN DE ESFUERZOS Y DIMENSIONES

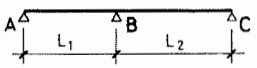
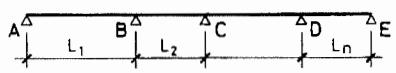
En lo que sigue se definen reglas para el predimensionamiento de los elementos estructurales de uso más frecuente.

REGLAS DE PREDIMENSIONAMIENTO

Si no se indica otra cosa g_d y q_d son los valores de cálculo de las cargas permanentes y de las sobrecargas (ver Capítulo 31) que se consideran uniformemente repartidas.

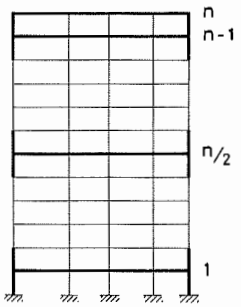
TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS
16.2.1. LOSAS Y FORJADOS CON LA MISMA CAPACIDAD RESISTENTE A MOMENTOS POSITIVOS Y NEGATIVOS	1.1. CÁLCULO LINEAL a) **Dos vanos**  $L_2 \geq L_1$ $M^-_{d,B} = \frac{-1}{9}(g_d + q_d)\left(\frac{L_1 + L_2}{2}\right)^2 \geq \frac{(g_d + q_d)L_2^2}{16}$ $V_{d,B,máx} = 1{,}12\,(g_d + q_d)\cdot\frac{L_2}{2}$ b) **Tres o más vanos**  $M^-_{d,máx} = \frac{-1}{k}(g_d + q_d)\left(\frac{L_i + L_{i+1}}{2}\right)^2 \geq \frac{(g_d + q_d)L_{máx}^2}{16}$	Elegir la sección con $M^-_{d,B}$ y $V_{d,B,máx.}$. Atención a las flechas máximas admisibles para elegir el canto. Si hay desigualdades importantes de luces, conviene estudiar posibles variaciones de canto de unas luces a otras Atención a las flechas máximas admisibles para elegir el canto.

TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS
	k = 10 para apoyo contiguo al extremo k = 11 para otros apoyos Considerar el valor máximo de $\frac{L_i + L_{i+1}}{2}$ $V_{d,,máx}$: El mayor de $1{,}12\ (g_d + q_d)\frac{L_1}{2}$ $1{,}12\ (g_d + q_d)\frac{L_n}{2}$ $(g_d + q_d)\frac{L_i}{2}$ (L_i es la mayor luz de los vanos interiores). 1.2. CÁLCULO NO LINEAL (Este procedimiento es especialmente adecuado para forjados de viguetas, nervados, etc.).	

TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS
FORJADOS CON MAYOR CAPACIDAD RESISTENTE A MOMENTOS POSITIVOS QUE NEGATIVOS (Es válido también para el caso anterior)	a) **Dos vanos**  $L_2 \geq L_1$ $M^-_{d,B} = \frac{-1}{11{,}6}\ (g_d + q_d)\ L_2^2$ $M^+_{d,B} = \frac{1}{11{,}6}\ (g_d + q_d)\ L_2^2$ $V_{d,B,máx} = 1{,}09\ (g_d + q_d) \cdot \frac{L_2}{2}$ b) **Tres o más vanos**  	Elegir la sección con $M^-_{d,B}$, para momentos negativos, o $M_{d,BC}$ para momentos positivos y $V_{d,B,máx}$ para esfuerzos cortantes y rasantes. Atención a las flechas máximas admisibles para elegir la sección. Si hay desigualdades importantes de luces, conviene estudiar posibles variaciones de canto de unas luces a otras Atención a las flechas máximas admisibles para elegir el canto.

TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS
	$M^-_{d,\,máx}$: Se debe tomar el mayor valor de $$M^-_d = \frac{-1}{11{,}6}\,(g_d + q_d)^2\ L_e^2$$ $$M^-_d = \frac{-1}{16}\,(g_d + q_d)^2\ L_i^2$$ donde L_e es la luz mayor de los dos vauos extremos y L_i la mayor de las luces de los vanos interiores. $M^+_{d,\,máx}$: Se debe tomar el mayor de $$M^+_d = \frac{1}{11{,}6}\,(g_d + q_d)^2\ L_e^2$$ $$M^+_d = \frac{1}{16}\,(g_d + q_d)^2\ L_i^2$$ donde L_e y L_i tienen los mismos significados que para el caso de momentos negativos.	

TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS
16.2.2. VIGAS CONTINUAS Y DINTELES DE ENTRAMADOS SOMETIDOS A ACCIONES VERTICALES	16.2.2.1. a) **Vigas continuas** Puede aplicarse el método expuesto en 1.1. Si interesa, a los valores de M^-_d se les puede aplicar un coeficiente de redistribución plástica k_v = 1,15 ó 0,85 y correlativamente a los de M^+_d un coeficiente k_v = 0,85 ó 1,15. b) **Dinteles de entramados** - Pueden aplicarse los valores indicados en el apartado 15.2.2, con las ampliaciones que allí se siguieron para las relaciones de luces contiguas y las de sobrecarga a carga permanente. A los valores de M^-_d y M^+_d se les pueden aplicar los coeficientes k_a y k_v de redistribución plástica indicados en el párrafo 16.2.2.1.a) anterior. **Nota**: Este método permite un predimensionamiento más afinado, al considerar el empotramiento de pilares y dinteles. Ello exige estimar aproximadamente las rigideces relativas de ambas piezas, lo cual no es problema en la práctica.	Los vanos continuos con relación luz/canto no superiores a 12, no suelen presentar problemas de flecha. Una relación luz/canto usual es del orden de 10 a 15. Si las luces varian considerablemente, puede ser adecuado cambiar los cantos según los vanos. En vigas planas la relación puede oscilar de 18 a 22.

TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS
16.2.3. PILARES DE ENTRAMADOS SOMETIDOS A ACCIONES VERTICALES	- Si no se cumplen las relaciones establecidas en el apartado 15.2.2., puede aplicarse el método 16.2.2.1.a). Un procedimiento en general suficientemente aproximado es el indicado en la figura.  De acuerdo con ello y con los coeficientes de la figura 15-1 se calculan los momentos, **solamente** en los pilares de fachadas en las plantas 1, n/2, n-1 y n. Los momentos en las plantas entre la n-1 y la n/2 se interpolan linealmente. Lo mismo se hace entre las plantas n/2 y 1.	1. De acuerdo con la altura del edificio, es conveniente unificar las escuadrías en altura de los distintos tramos de pilares, cada cierto número de plantas. Aunque esta ventaja es especialmente importante si el encofrado de pilares es de madera, para incrementar su reutilización, subsiste aunque el encofrado sea metálico, pues el no variar demasiado de escuadrías permite simplificar la ferralla. 2. Es necesario cierto entrenamiento para estimar las escuadrías de pilares a lo largo de la altura, con los momentos de sólo algunas alturas. 3. Dentro de cada planta, conviene también unificar escuadrías entre grupos de pilares cuyas solicitaciones M_d, N_d sean comparables. Ello simplifica la ferralla.

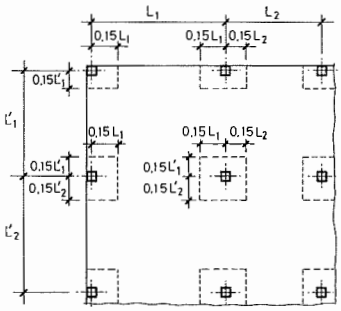
TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS
	Los axiles de todos los pilares se calculan en todas las plantas de acuerdo con los cortantes isostáticos. En los pilares interiores de los vanos extremos, los axiles se multiplican por 1,10 para tener en cuenta el efecto hiperestático. En los pilares interiores se desprecia el momento flector. Con los valores de M_d y N_d obtenidos se dimensionan las cuantías de los pilares. Si no hay motivos funcionales que aconsejen forzar la cuantía para reducir la sección de hormigón, lo recomendable es hacer el predimensionamiento con cuantías cercanas a la mínima ($\omega \approx 0{,}1$ a $0{,}15$) en los ábacos GT-84 a GT-91. En las últimas plantas puede ser más económico forzar algo más la cuantía. NOTA Si en pilares interiores existe una desigualdad de luces contiguas L_1 y L_2 ($L_2 \geq L_1$) tal que $L_2/L_1 \geq 1{,}5$, no es prudente despreciar los momentos flectores. Puede estimarse la diferencia de momentos de empotramiento de los dos vanos $$\Delta M_d = \frac{1}{12}(g_{d2} + q_{d2})\, L_2^2 - \frac{1}{12} g_{d1}\, L_1^2$$ y repartirlo entre los dos tramos de pilar, superior e inferior, bien en proporción a sus rigideces, o, más simplificadamente, en partes iguales.	4. Normalmente, los dinteles se unifican en toda la altura en edificios de poca altura. En edificios de media y gran altura se disponen a veces dos o tres zonas en altura. 5. La planta baja, si es de oficinas, y la de azotea, a veces, pueden requerir un canto diferente.

TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS
16.2.4. ENTRAMADOS SOMETIDOS A ACCIONES HORIZONTALES Y VERTICALES	El predimensionamiento puede hacerse calculando por separado: a) Los momentos flectores, esfuerzos cortantes y esfuerzos axiles debidos a las acciones verticales, de acuerdo con lo expuesto en los puntos 16.2.2. y 16.2.3. b) Los mismos esfuerzos, pero debidos a las acciones horizontales, de acuerdo con cualquiera de los métodos expuestos en 15.3. La suma de los esfuerzos obtenidos en a) y b) permite el predimensionamiento.	1. De acuerdo con la altura del edificio, es conveniente unificar las escuadrías en altura de los distintos tramos de pilares, cada cierto número de plantas. Aunque esta ventaja es especialmente importante si el encofrado de pilares es de madera, para incrementar su reutilización, subsiste aunque el encofrado sea metálico, pues el no variar demasiado de escuadrías permite simplificar la ferralla. 2. Es necesario cierto entrenamiento para estimar las escuadrías de pilares a lo largo de la altura, con los momentos de sólo algunas alturas. 3. Dentro de cada planta, conviene también unificar escuadrías entre grupos de pilares cuyas solicitaciones M_d, N_d sean comparables. Ello simplifica la ferralla. 4. Normalmente, los dinteles se unifican en toda la altura en edificios de poca altura. En edificios de media o

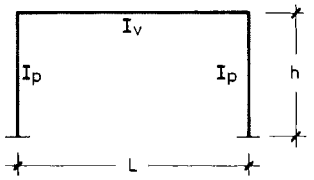
TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS
		gran altura se disponen a veces dos o tres zonas en altura 5. La planta baja, si es de oficinas, y la de azotea, a veces, pueden requerir un canto diferente
16.2.5. FORJADOS SIN VIGAS SOMETIDOS A ACCIONES VERTICALES	a) CANTO MÍNIMO POR RAZONES DE FLECHA. Puede predimensionarse de acuerdo con la tabla siguiente: **TABLA T-16.1** **CANTOS MÍNIMOS DE FORJADOS SIN VIGAS**	Conviene ser conservador en esta etapa. El cumplimiento de la tabla no exime de la comprobación de la flecha.

TIPO DE ACERO	PLACAS MACIZAS SIN ÁBACOS			PLACAS ALIGERADAS		
	RECUADRO DE BORDE O ESQUINA		RECUADRO INTERIOR	RECUADRO DE BORDE O ESQUINA		RECUADRO INTERIOR
	SIN VIGA DE BORDE	CON VIGA DE BORDE		SIN VIGA DE BORDE	CON VIGA DE BORDE	
B 400S	$\ell_n/30$	$\ell_n/33$	1/33	$\ell_n/22$	$\ell_n/23$	$\ell_n/25$
B 500S	$\ell_n/28$	$\ell_n/31$	1/31	$\ell_n/20$	$\ell_n/22$	$\ell_n/23$

(*) ℓ_n es la luz libre entre cargas de pilares

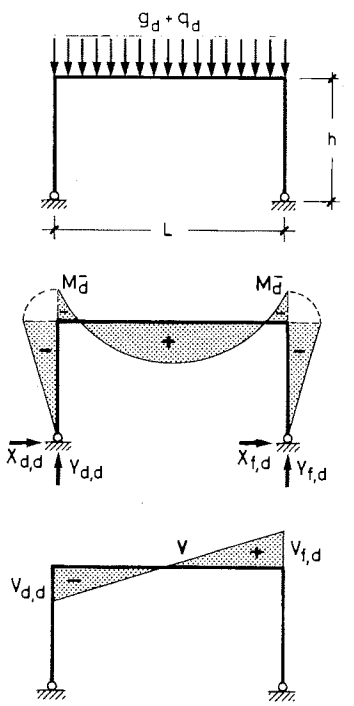
TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS
	b) DIMENSIONES DE ÁBACOS EN LAS PLACAS ALIGERADAS. Se rigen por los croquis de la figura.  	Normalmente deben adaptarse las dimensiones del ábaco a la separación entre nervios.
	c) CANTO MÍNIMO POR RAZONES DE PUNZONAMIENTO. Debe tantearse para el axil N_d en kN derivado de aplicar las cargas permanentes y sobrecargas de cálculo a su área tributaria de placa. Siendo c_1 y c_2 los lados del pilar en la planta inferior, d el canto útil y f_{ck} la resistencia característica del hormigón, se ha de cumplir $$d^3 + (c_1 + c_2)\, d^2 + c_1\, c_2\, d \geq \frac{N_d}{0{,}33\sqrt{f_{ck}}}$$	Este tanteo de canto conduce a no necesitar armadura de punzonamiento. La comprobación debe realizarse en la planta con pilares de menor escuadría.

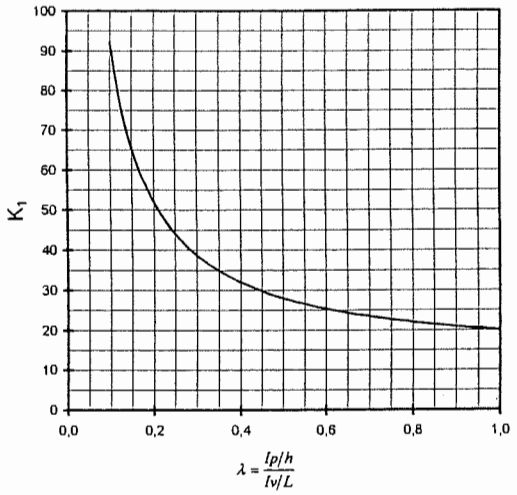
TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS
	d) PREDIMENSIONAMIENTO DE PILARES. Los esfuerzos axiles pueden deducirse de la asignación de las cargas de las áreas tributarias isostáticas, con las reducciones de carga correspondientes. Los momentos flectores se calculan con los coeficientes asignados directamente en el Capítulo 18.	
16.2.6. FORJADOS SIN VIGAS SOMETIDOS A ACCIONES HORIZONTALES	Vale lo dicho en 16.2.5.a) y b). Para el predimensionamiento de pilares puede emplearse el método de los pórticos virtuales, aplicando 16.2.4.a) y b). Téngase en cuenta que el ancho de dintel del pórtico virtual debe reducirse. Puede para el dimensionamiento tomarse 1/3 del valor real (Véase 20.4.2.2.).	

TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS
16.2.7. PÓRTICOS SIMÉTRICOS DE UN SÓLO VANO CON DINTEL HORIZONTAL (*)	Notaciones generales (**)  I_p = Inercia bruta del pilar I_v = Inercia bruta del dintel $\lambda = \frac{I_p / h}{I_v / L}$ Gráficos empleados,(k_1, k_2, k_3, k_4). 1.1. **Hipótesis de articulación en el enlace a la zapata o de ésta al terreno.** 1.1.1. **Carga vertical uniformemente repartida sobre todo el dintel**	*Esta hipótesis puede ser adecuada: - Si realmente se materializa una rótula en la unión a la zapata. - Si las zapatas descansan en suelos muy deformables.

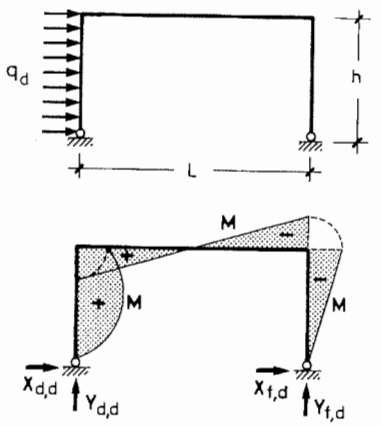
(*) La mayor parte de los gráficos que se incluyen para pórticos de un vano, han sido construidos, con algunas modificaciones, a partir de las fórmulas de LEONTOVICH (16.1).

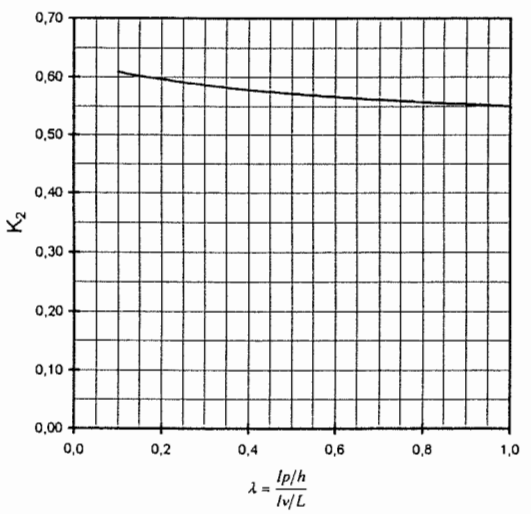
(**) Recuérdense las notaciones expuestas en el Capítulo 1. En lo que sigue, en las reacciones x e y y en los arranques de los pilares, las letras minúsculas hacen referencia, la primera al extremo dorsal o frontal del pórtico, la segunda indica que el valor es el valor de cálculo. $X_{f,d}$, p. ej. indica el valor de cálculo de la reacción horizontal del arranque del pilar frontal.

TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS
	 	* Conviene tantear con un canto de dintel entre $\frac{L}{10}$ y $\frac{L}{15}$. * Para suelos de deformabilidad media interpolar entre los casos correspondientes de 1.1. y 1.2.

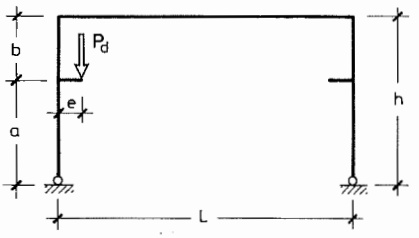
TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS
	a) Se calcula el coeficiente λ de relación de rigideces supuestas de pilar a dintel. b) En el gráfico se obtiene el coeficiente k_1 . 	* Conviene tantear con un canto de dintel entre $\frac{L}{10}$ y $\frac{L}{15}$. * Para suelos de deformabilidad media interpolar entre los casos correspondientes de 1.1. y 1.2.

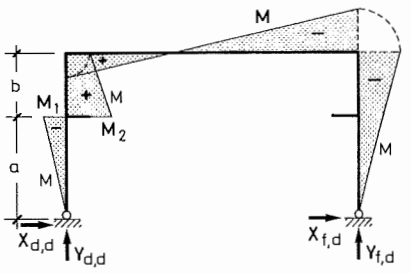
TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS
	c) Momentos flectores en esquinas $$M^{-}_{d} = -\frac{(g_d + q_d)\, L^2}{k_1}$$ d) Reacciones verticales en los apoyos $$Y_{f,d} = Y_{d,d} = (g_d + q_d)\frac{L}{2}$$ e) Reacciones horizontales en las articulaciones $$X_{d,d} = -X_{f,d} = \frac{(g_d + q_d)\, L^2}{k_1 \, h}$$ f) Los esfuerzos cortantes en el dintel se deducen de d).	* El máximo momento en vano es de cálculo inmediato.

TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS
	1.1.2. **Carga de viento en fachada** 	La carga indicada es la de presión. La de succión en la otra fachada se obtiene por superposición.
	a) Momento flector máximo en las esquinas $$M_d = \frac{q_d \cdot h^2}{2} k_2$$	El máximo momento en el pilar izquierdo es de cálculo inmediato.

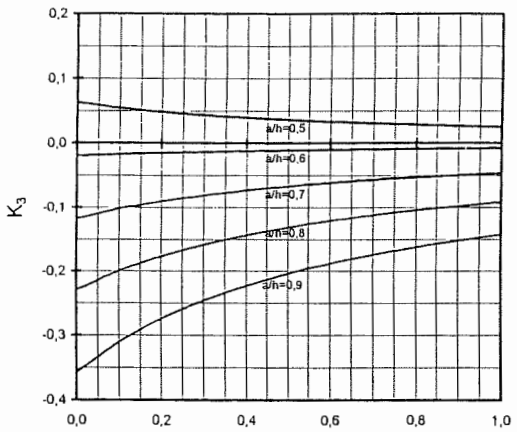
TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS
	b) Reacciones verticales en las articulaciones $$Y_{fd} = -Y_{dd} = \frac{q_d \cdot h^2}{2\,L}$$ 	

ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR · BIBLIOTECA · UNIVERSIDAD DE ALICANTE

TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS
	c) Reacciones horizontales en las articulaciones $X_{f,d} = \frac{-q_d \cdot h}{2} k_2$ $X_{d,d} = -(q_d \cdot h - X_{f,d})$ d) Los esfuerzos cortantes en el dintel se deducen de b). 1.1.3. **Carga vertical de puente grúa en ménsula** 	* En la práctica habrá que superponer a la carga P_d en la ménsula del pilar izquierdo otra en el derecho, una de ellas con la máxima reacción del puente y otra con la mínima.

TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS
	 a) Máximo momento flector en esquina $M_d = \frac{-P_d \cdot e}{2} (1 + 2 k_3)$ b) Momentos flectores a nivel de ménsula $M_{1d} = -(P_d \cdot e - M_d)\frac{a}{h}$ $M_{2d} = P_d \cdot e \frac{b}{h} + M_d \frac{a}{h}$ (M_d viene dado en a)).	

TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS



c) Reacciones verticales en las articulaciones

$$Y_{d,d} = P_d \left[1 - \frac{e}{L} \right] \qquad Y_{f,d} = \frac{P_d \cdot e}{L}$$

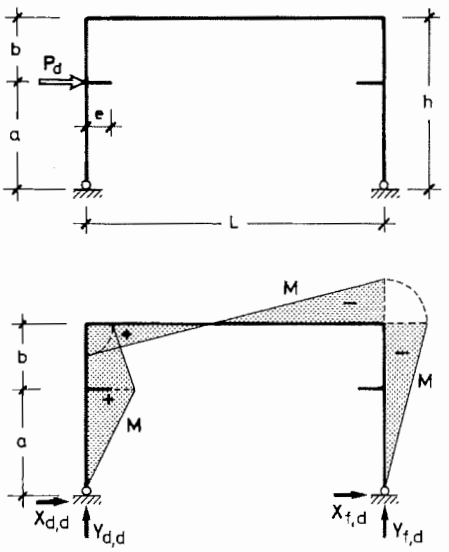
TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS

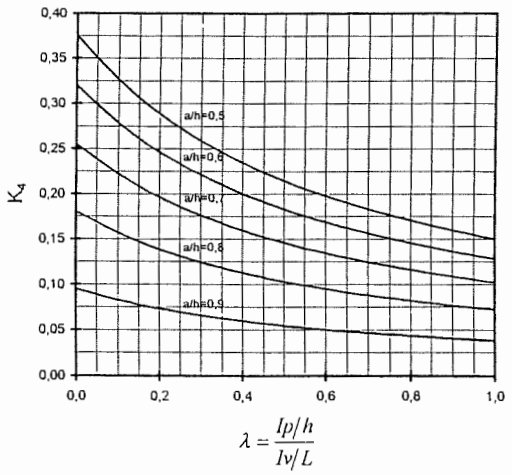
d) Reacciones horizontales en las articulaciones

$$X_{d,d} = -X_{f,d} = \frac{P_d \cdot e}{2\,h}\,(1 + 2\,k_3)$$

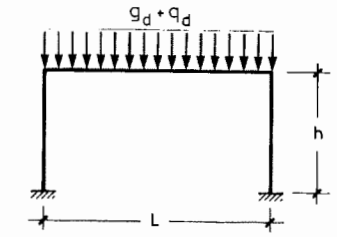
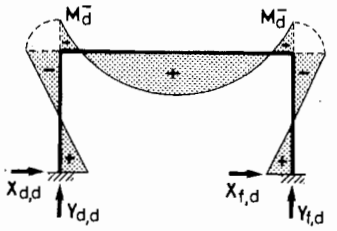
1.1.4. **Carga puntual horizontal de frenado transversal del puente grúa**

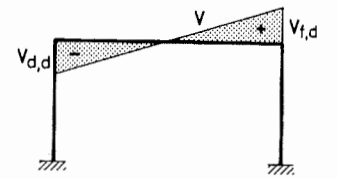
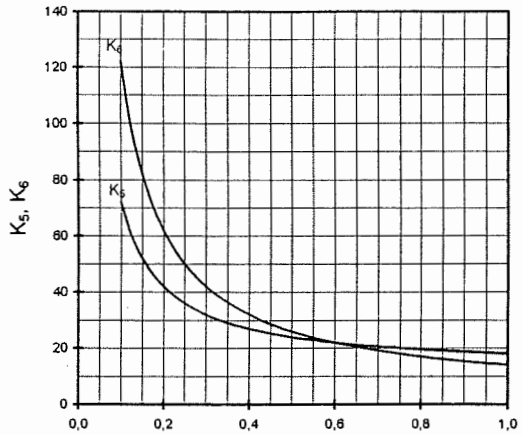
El momento máximo del pilar debe calcularse a partir del momento en el extremo y del valor de P_d.



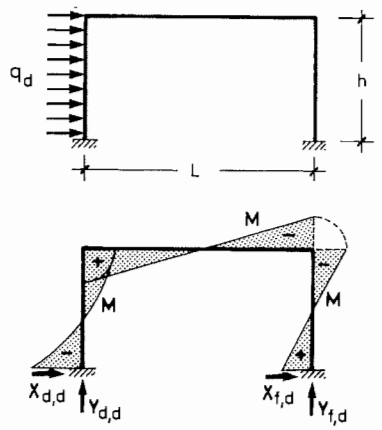
TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS
	 a) Máximo momento flector en esquina $M_d = -\frac{P_d \cdot a}{2}(1 + k_4)$	

TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS
	b) Reacciones verticales en las articulaciones $Y_{d,d} = -\frac{P_d \cdot a}{L} \qquad Y_{f,d} = -Y_{d,d}$ c) Reacciones horizontales en las articulaciones $X_{d,d} = -P_d\left[1 - \frac{a}{2h}(1 + k_4)\right]$ $X_{f,d} = -\frac{P_d \cdot a}{2h}(1 + k_4)$ d) Los esfuerzos cortantes en el dintel se deducen de b).	

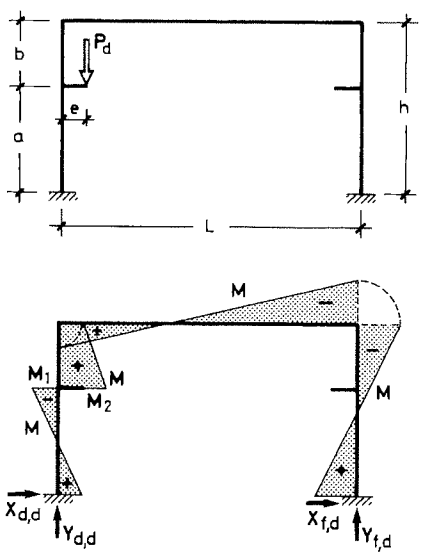
TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS
	1.2. **Hipótesis de empotramiento de los pilares en la zapata y de ésta en el terreno.** Gráficos empleados (k_5, k_6, k_7 y k_8). 1.2.1. **Carga vertical uniformemente repartida sobre todo el dintel**  $\lambda = \frac{I_p / h}{I_v / L}$ 	* Conviene tantear con un canto de dintel entre $\frac{L}{12}$ y $\frac{L}{16}$. * Esta hipótesis puede ser adecuada cuando el suelo es muy rígido o la zapata se apoya en varios pilotes. * Para suelos de deformabilidad media interpolar entre los casos correspondientes de 1.1. y 1.2.

TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS
	  $\lambda = \frac{Ip/h}{Iv/L}$	

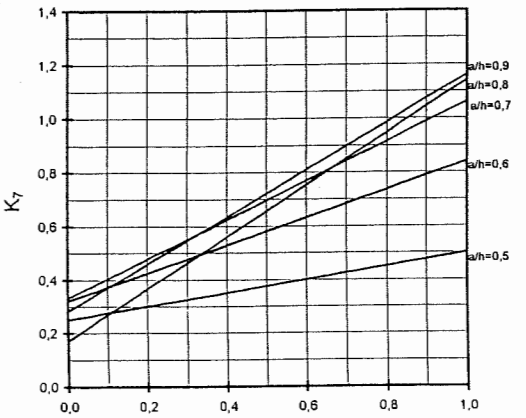
TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS
	a) Se calcula el coeficiente λ de relación de rigideces supuestas de pilar a dintel. b) En el gráfico se obtiene el coeficiente k_5. c) Momentos flectores en arranque de pilares. $$M_{d,a} = \frac{(g_d + q_d)\, L^2}{2\, k_5}$$ d) Momentos flectores en esquinas $$M_{d,e} = \frac{-(g_d + q_d)\, L^2}{k_5}$$ e) Reacciones verticales en los empotramientos $$Y_{f,d} = Y_{d,d} = (g_d + q_d)\frac{L}{2}$$ f) Reacciones horizontales en los empotramientos $$X_{d,d} = -X_{f,d} = \frac{3}{2} \cdot \frac{(g_d + q_d)\, L^2}{h\, k_5}$$ g) Los esfuerzos cortantes en el dintel se deducen de e).	

TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS
	1.2.2. **Carga de viento en fachada**  	

TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS
	a) Momento máximo en los arranques de los pilares $$M_d = \frac{q_d\, h^2}{\lambda}\left(\frac{1 + 3\,\lambda}{4\,k_5} + \frac{\lambda\, k_6 - 4}{4\,k_6}\right)$$ b) Momentos máximos en las esquinas del pórtico $$M_d = \frac{q_d\, h^2}{4\,\lambda}\left(\frac{1}{k_5} + \frac{4}{k_6}\right)$$ c) Reacciones verticales en los empotramientos $$Y_{d,d} = -\,Y_{f,d} = \frac{2 \cdot q_d \cdot h^2}{L\,\lambda\, k_6}$$ d) Reacciones horizontales en los empotramientos $$X_{f,d} = -\,\frac{q_d \cdot h}{4}\left(1 - \frac{3}{k_5}\right)$$ $$X_{d,d} = -\left(q_d \cdot h - X_{f,d}\right)$$ e) Los esfuerzos cortantes en el dintel se deducen de c).	

TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS
	1.2.3. **Carga vertical de puente grúa en ménsula** 	

TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS



$$\lambda = \frac{lp/h}{lv/L}$$

a) Momento flector máximo en los arranques de los pilares

$$M_d = \frac{P_d \cdot e}{\lambda}\left(\frac{3\,k_7}{k_5} + \frac{\lambda\,k_6 - 12\frac{a}{h}}{2\,k_6}\right)$$

TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS

b) Momento flector máximo en las esquinas del pórtico

$$M_d = \frac{3\,P_d \cdot e}{\lambda}\left[\frac{k_7}{k_5} + \frac{2\frac{a}{h}}{k_6}\right]$$

c) Momentos flectores a nivel de ménsula

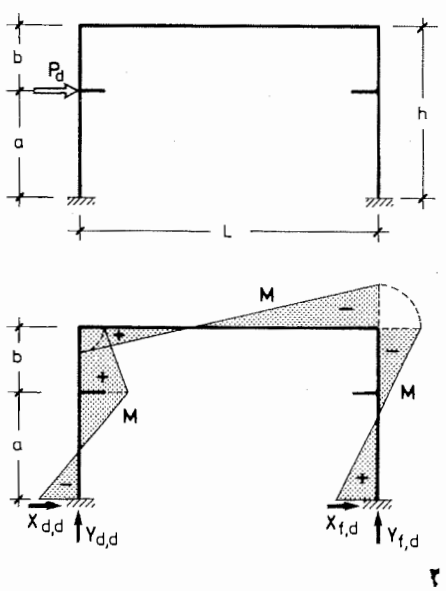
$$M_{1d} = \frac{P_d \cdot e}{\lambda}\left[3\frac{k_7}{k_5} + \frac{6\,\frac{a}{h}\,\frac{(b-a)}{h}}{k_6} - \frac{\lambda}{h}\left(a + \frac{b}{2}\right)\right]$$

$$M_{2d} = (P_d \cdot e + M_{1d})\,\frac{b}{h} + \frac{3\,P_d\,e}{\lambda}\left[\frac{k_7}{k_5} - \frac{2\frac{a}{h}}{k_6}\right]\cdot\frac{a}{h}$$

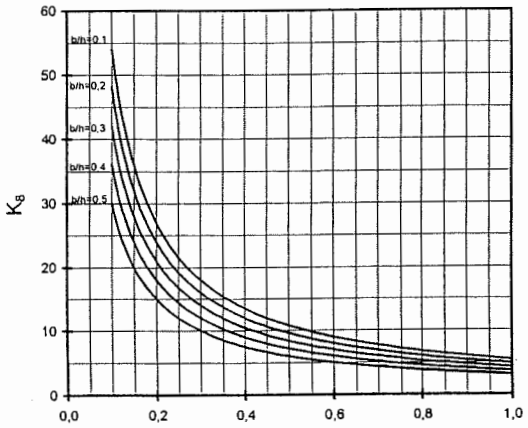
d) Reacciones verticales en los empotramientos de los pilares

$$Y_{f,d} = \frac{12 \cdot P_d \cdot e \cdot \frac{a}{h}}{\lambda\,L\,k_6}$$

TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS
	$$Y_{d,d} = P_d - Y_{f,d}$$ e) Reacciones horizontales en el empotramiento de los pilares $$X_{d,d} = \frac{P_d \cdot e}{h}\left[0{,}5 + 3\left(\frac{\frac{2\,a}{h} - 3\left(\frac{a}{h}\right)^2 + k_7}{\lambda\, k_5}\right)\right]$$ $$X_{f,d} = -X_{d,d}$$ f) Los esfuerzos cortantes en el dintel se deducen de d).	

TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS
	1.2.4. **Carga puntual horizontal de frenado transversal del puente grúa**  	El momento máximo del pilar debe calcularse a partir del momento en el extremo y del valor de P_d.

TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS



$$\lambda = \frac{Ip/h}{Iv/L}$$

a) Momento flector máximo en arranque de pilares

$$M_d = P_d \cdot \left(\frac{\frac{3\,a^2\,b}{\lambda\,h^2} \cdot \frac{b + \lambda\,(h+b)}{a}}{k_5} + \frac{a\,(k_6 - k_8)}{2\,k_6} \right)$$

TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS

b) Momento flector máximo en esquina de pórtico

$$M_d = P_d \left(\frac{3\,a^2\,b}{\lambda\,h^2\,k_5} + \frac{a\,k_8}{2k_6} \right)$$

c) Reacciones verticales en los empotramientos

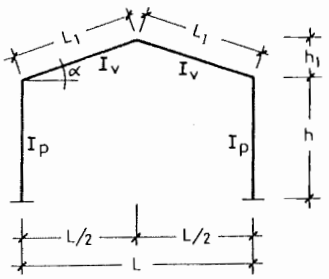
$$Y_{f,d} = \frac{P_d \cdot a \cdot k_8}{k_6\,L}$$

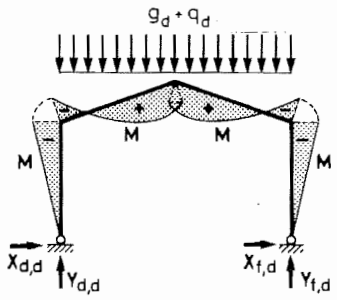
$$Y_{d,d} = P_d - Y_{f,d}$$

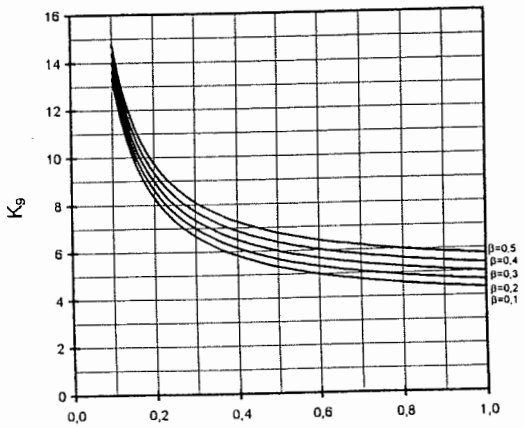
d) Reacciones horizontales en los empotramientos

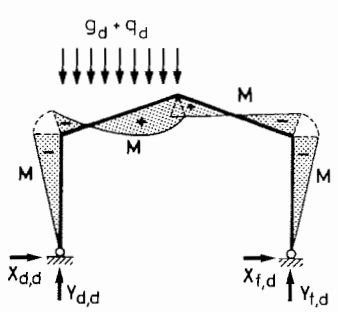
$$X_{f,d} = \frac{P_d}{h} \left[\frac{3\,a^2\,b}{\lambda\,k_5\,h^2} \left(1 - \frac{b + \lambda\,(b+h)}{a} \right) + \frac{a}{2} \right]$$

$$X_{d,d} = -\left(P_d - X_{f,d} \right)$$

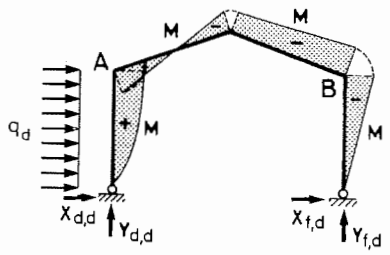
TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS
16.2.8. PÒRTICOS SIMÉTRICOS A DOS AGUAS	Notaciones generales  $\alpha = \frac{I_p / h}{I_v / L_1} \qquad \beta = \frac{h_1}{h}$ I_p = Inercia bruta del pilar I_v = Inercia bruta de los pares de luz L_1 del dintel 1.1. **Hipótesis de articulación en el enlace a la zapata o de ésta en el terreno.** Gráficos empleados,(k_9, k_{10}, k_{11} k_{12}). 1.1.1. **Carga vertical uniformemente repartida en toda la luz del dintel**	* Esta hipótesis puede ser adecuada: - Si realmente se materializa una rótula en la unión a la zapata. - Si los pilares descansan en suelos muy deformables.

TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS
	 a) Momentos flectores en esquinas de pórtico $M_d = -\frac{(g_d + q_d)\, L^2}{32\, k_9} (8 + 5\, \beta)$	* Conviene tantear con un canto de dintel entre $\frac{L}{10}$ y $\frac{L}{15}$. * Para suelos de deformabilidad media interpolar entre los casos correspondientes de 1.1. y 1.2.

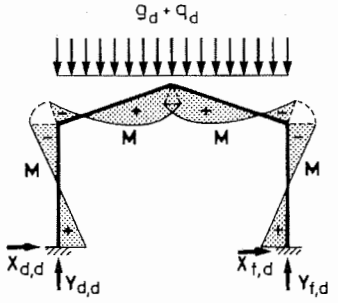
TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS
	 $\alpha = \frac{I_p / h}{I_v / L_1}$	
	b) Momento flector en la cumbrera. $M_d = \frac{(g_d + q_d)\, L^2}{8}\left[1 - \left[\frac{(8 + 5\,\beta)\,(1 + \beta)}{4\, k_9}\right]\right]$	* El momento flector máximo en el par del dintel debe ser estimado a partir de los momentos en sus extremos a) y b).

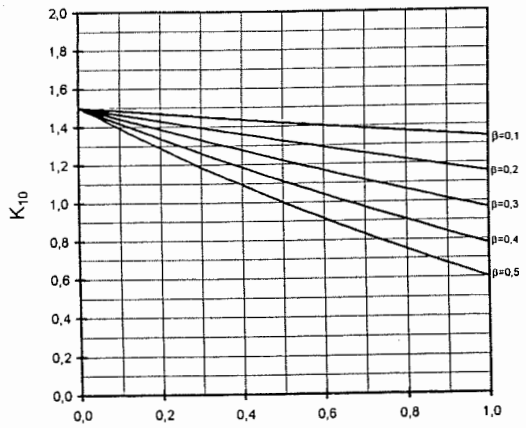
TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS
	c) Reacciones verticales en las articulaciones. $Y_{f,d} = Y_{d,d} = \frac{(g_d + q_d)\, L}{2}$	
	d) Reacciones horizontales en las articulaciones. $X_{d,d} = X_{f,d} = \frac{(g_d + q_d)\, L^2}{32\, k_9\, h}\,(8 + 5\,\beta)$	
	e) Los esfuerzos cortantes en los pares del dintel se deducen de a) y b) con la carga normal al dintel por unidad de longitud. $(g_d + q_d)\, \cos^2 \alpha$	
	1.1.2. **Carga vertical uniformemente repartida sobre un par del dintel** 	Las fórmulas son directamente aplicables al caso de nieve en un faldón. Si se trata de viento, debe entrarse en las fórmulas con un valor $q = \frac{q_v}{\cos^2 \alpha}$ donde q_v es la sobrecarga de viento por unidad de longitud de par.

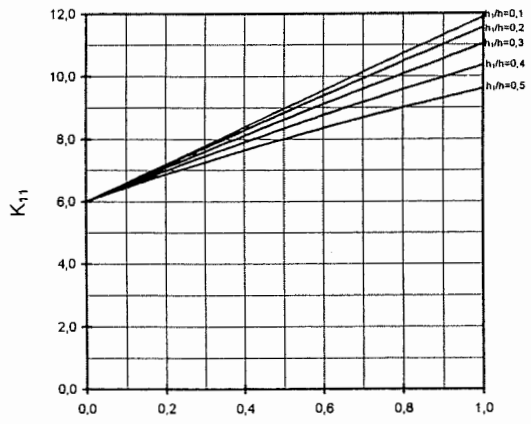
TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS
	a) Momentos flectores en esquinas de pórtico. $$M_d = -\frac{(g_d + q_d)\, L^2}{64\, k_9}\,(8 + 5\,\beta)$$ b) Momento flector en la cumbrera. $$M_d = \frac{(g_d + q_d)\, L^2}{16}\left(1 - \frac{(8 + 5\,\beta)\cdot(1 + \beta)}{4\, k_9}\right)$$ c) Reacciones verticales en las articulaciones. $$Y_{d,d} = \frac{3}{8}\,(g_d + q_d)\, L$$ $$Y_{f,d} = \frac{1}{8}\,(g_d + q_d)\, L$$ d) Reacciones horizontales en las articulaciones. $$X_{d,d} = -X_{f,d} = \frac{(g_d + q_d)\, L^2}{64\, k_9\, h}\,(8 + 5\,\beta)$$ e) Los esfuerzos cortantes en los pares del dintel se deducen de a) y b) con la carga normal al dintel. $$(g_d + q_d)\, \cos^2 \alpha$$	

TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS
	1.1.3. **Sobrecarga de viento sobre fachada**  a) Momentos flectores en las esquinas del pórtico. $$M_{A,d} = \frac{q_d \cdot h^2}{2}\left[1 - \frac{1 + \alpha\left(12 + 6\,\beta + \frac{4}{\alpha}\right)}{8\,\alpha\, k_9}\right]$$ $$M_{Bd} = -\frac{q_d \cdot h^2}{16\,\alpha\, k_9}\left[1 + \alpha\left(12 + 6\,\beta + \frac{4}{\alpha}\right)\right]$$	q es positiva si se trata de presión y negativa si se trata de succión.

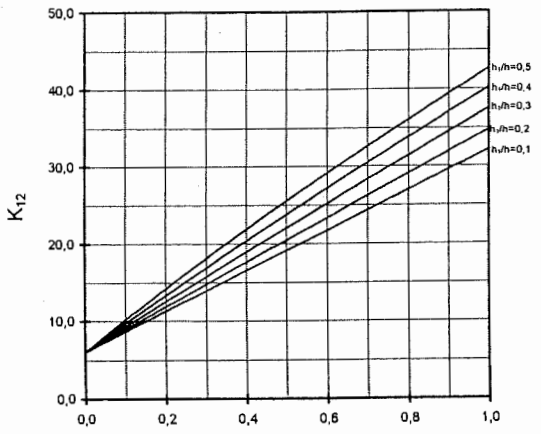
TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS
	b) Momento flector en la cumbrera. $$M_d = \frac{-q_d \cdot h^2}{4}\left[1 - \frac{\left[1 + \alpha\left(12 + 6\beta + \frac{4}{\alpha}\right)(1+\beta)\right]}{4\,\alpha\,k_9}\right]$$ c) Reacciones verticales en las articulaciones. $$Y_{d,d} = -Y_{f,d} = -\frac{q_d \cdot h^2}{2\,L}$$ d) Reacciones horizontales en las articulaciones. $$X_{d,d} = q_d\ h\left[\frac{\left[1 + \alpha\left(12 + 6\beta\,\frac{4}{\alpha}\right)\right]}{16\,\alpha\,k_9} - 1\right]$$ $$X_{f,d} = -\frac{q_d \cdot h}{16\,\alpha\,k_9}\left[1 + \alpha\left(12 + 6\beta + \frac{4}{\alpha}\right)\right]$$	

TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS
	1.2. **Hipótesis de empotramiento de los pilares en la zapata y de ésta en el terreno.** 1.2.1. **Carga vertical uniformemente repartida en toda la luz del dintel** 	* Esta hipótesis puede ser adecuada cuando el suelo es muy rígido o la zapata se apoya en varios pilotes. * Para suelos de deformabilidad media interpolar entre los casos correspondientes de 1.1. y 1.2. * Conviene empezar con un canto de dintel entre $\frac{L}{12}$ y $\frac{L}{16}$. * Para suelos de deformabilidad media interpolar entre los casos correspondientes de 1.1. y 1.2.

TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS
	 $\alpha = \frac{I_p / h}{I_v / L_1}$	

TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS
	 $\alpha = \frac{I_p / h}{I_v / L_1}$	

TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS



$$\alpha = \frac{I_p / h}{I_v / L_1}$$

a) Momentos flectores en esquinas de pórtico

$$M_d = -\frac{(g_d + q_d)\, L^2 \;\; \alpha \left(2 + \frac{5\,\beta}{4} \cdot k_{10}\right)}{k_{12}}$$

TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS

b) Momento flector en los arranques de los pilares.

$$M_d = \frac{\alpha\,(g_d + q_d)\, L^2}{k_{12}} \left[2\, k_{10} - 2 + \frac{5\,\beta}{4} \left(\frac{k_{11}}{2} - k_{10} \right) \right]$$

c) Momento flector en la cumbrera

$$M_d = (g_d + q_d)\, L^2 \left[\frac{1}{8} - \frac{\alpha}{k_{12}} \left[2 + \frac{5}{4} \beta k_{10} + \beta \left(2\, k_{10} + \frac{5}{8}\, \beta\, k_{11} \right) \right] \right]$$

d) Reacciones verticales en las articulaciones.

$$Y_{d,d} = Y_{f,d} = (g_d + q_d) \frac{L}{2}$$

e) Reacciones horizontales en las articulaciones.

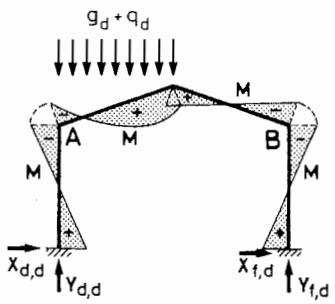
$$X_{d,d} = -X_{f,d} = \frac{\alpha\,(g_d + q_d)\, L^2 \cdot \left(2\, k_{10} + \frac{5\, k_{11}\, \beta}{8} \right)}{h \cdot k_{12}}$$

Los momentos flectores y esfuerzos cortantes en los pares del dintel se deducen de los momentos en sus extremos y de la carga perpendicular a su directriz.

$$(g_d + q_d)\, cos^2\, \alpha$$

TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS

1.2.2. **Carga vertical uniformemente repartida sobre un par del dintel**



a) Momentos flectores en esquinas del pórtico

$$M_{Ad} = -\alpha (g_d + q_d)\frac{L^2}{2}\left(\frac{2+\frac{5}{4}\beta k_{10}}{k_{12}} + \frac{1}{32(3+\alpha)}\right)$$

$$M_{Bd} = -\alpha (g_d + q_d)\frac{L^2}{2}\left(\frac{2+\frac{5}{4}\beta k_{10}}{k_{12}} - \frac{1}{32(3+\alpha)}\right)$$

TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS

b) Momento flector en la cumbrera.

$$M_d = -(g_d + q_d)\frac{L^2}{2}\left[\frac{\alpha\left(2+\frac{5}{4}\beta k_{10}\right)}{k_{12}} + \frac{\alpha\beta\left(2k_{10}+\frac{5}{8}\beta k_{11}\right)}{k_{12}} - \frac{1}{8}\right]$$

c) Reacciones verticales en arranques de pilares.

$$Y_{f,d} = \frac{3(g_d + q_d)\frac{L}{2}(4+\alpha)}{16(3+\alpha)}$$

$$Y_{d,d} = (g_d + q_d)\frac{L}{2}\cdot\frac{36+13\alpha}{16(3+\alpha)}$$

d) Reacciones horizontales en arranques de pilares.

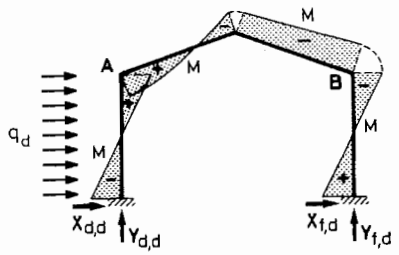
$$X_{d,d} = -X_{f,d} = \frac{\alpha(g_d + q_d)\frac{L^2}{2}\left(2k_{10}+\frac{5}{4}\beta k_{11}\right)}{h \cdot k_{12}}$$

Las fórmulas son directamente aplicables al caso de nieve en un faldón.

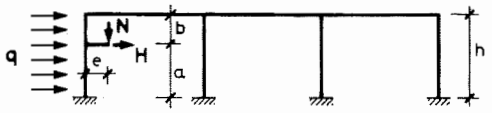
Si se trata de viento, debe entrarse en las fórmulas con un valor $g_d = 0$ y donde q_v es la sobrecarga de viento por m de par.

Los momentos flectores y esfuerzos cortantes en los pares del dintel se deducen de los momentos en sus extremos y de la carga perpendicular a su directriz.

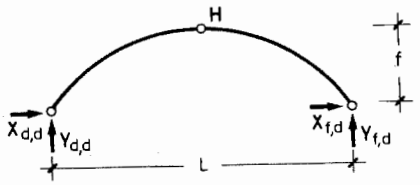
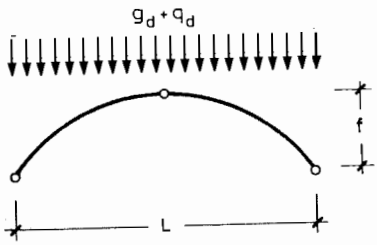
$$(g_d + q_d)\cos^2\alpha$$

TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS
	1.2.3. **Sobrecarga de viento sobre fachada**  a) Momentos flectores en las esquinas del pórtico. $$M_{A,d}=\frac{q_d\ h^2}{2}\left[\frac{4-3\,k_{10}}{k_{12}}+\frac{1}{2\,(3+\alpha)}\right]$$ $$M_{B,d}=\frac{q_d\ h^2}{2}\left[\frac{4-3\,k_{10}}{k_{12}}-\frac{1}{2\,(3+\alpha)}\right]$$	q es positiva si se trata de presión de viento y negativa si se trata de succión.

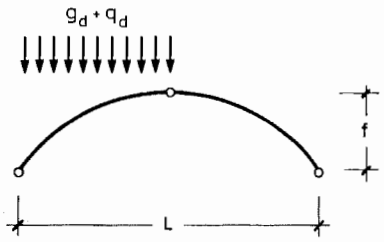
TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS
	b) Momento flector en la cumbrera. $$M_d=\frac{q_d\,h}{2\,k_{12}}\left[h\,(4-3\,k_{10})-\frac{h_1}{2}(3\,k_{11}-8\,k_{10})\right]$$ c) Reacciones verticales en los arranques de los pilares. $$Y_{f,d}=-\,Y_{d,d}=\frac{q_d\,h^2}{2\,L\,(3+\alpha)}$$ d) Reacciones horizontales en los arranques de los pilares. $$X_{f,d}=\frac{-q_d\,h}{4\,k_{12}}\,(3\,k_{11}-8\,k_{10})$$ $$X_{d,d}=\frac{q_d\,h}{4\,k_{12}}\,[3\,k_{11}-8\,k_{10}-4\,k_{12}]$$	

TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS
16.2.9. PÓRTICOS DE VARIOS VANOS Y UN SÓLO PISO	 1°. Valen los criterios de predimensionamiento expuestos en 16.2.3. y 16.2.4. (según existan o no acciones horizontales), aplicados al caso de un sólo piso. 2°. Puede partirse de un empotramiento perfecto en la zapata y de ésta en el terreno. 3°. Si existen fuerzas horizontales de viento, q por unidad de altura de pilar, puede partirse de aplicar $\frac{5\,q\,h}{8}$ a la zapata y $\frac{3\,q\,h}{8}$ al dintel, como fuerzas horizontales. 4°. Si existe en cualquier pilar una carga H de frenado transversal de puente grúa, aplicada en la ménsula, puede aceptarse que $0{,}4\,H\,\frac{a}{h}$ se aplica al dintel y $0{,}6\,H\,\frac{a}{h}$ a la zapata. El pilar debe ser calculado para el momento flector directo de la carga 1,2 H en viga perfectamente empotrada en sus extremos sometida a la carga puntual.	

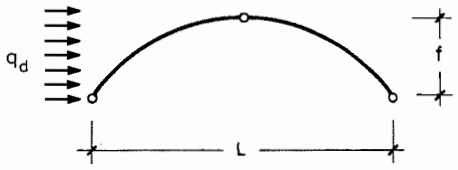
TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS
	5°. El momento $M = -N \cdot e$ se reparte en las proporciones siguientes: En la cabeza del pilar $$M = -0{,}8\,\frac{N \cdot e \cdot a}{4}\left(2 - 3\,\frac{a}{h}\right)$$ En el arranque del pilar $$M = 1{,}2\,\frac{N \cdot e \cdot a}{4}\left(4 - 3\,\frac{a}{h}\right)$$ 6°. Las reacciones horizontales del momento (generalmente despreciables en el predimensionamiento) pueden estimarse por las fórmulas: En la cabeza del pilar $$H = \frac{4{,}8\;N \cdot e \cdot a}{h^2}\left(1 - \frac{a}{h}\right)$$ En el pie del pilar $$H = \frac{7{,}2\;N \cdot e \cdot a}{h^2}\left(1 - \frac{a}{h}\right)$$	

TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS
16.2.10. ARCOS PARABÓLICOS TRIARTICULADOS 16.2.10.1. ARCOS HORMIGONADOS IN SITU	1.1. **Notaciones**  1.2. **Carga vertical uniformemente repartida sobre toda la luz.**  a) Reacciones verticales en los apoyos $$Y_{d,d} = Y_{f,d} = (g_d + q_d) \cdot \frac{L}{2}$$	La nieve da en general una distribución de cargas como la adoptada. Las cargas permanentes por m de luz crecen generalmente de clave hacia arranques. Para un predimensionamiento la simplificación es aceptable. Los momentos flectores deben calcularse directamente, a partir de las cargas y reacciones, de acuerdo con lo expuesto en el Capítulo 1. Para el predimensionamiento es suficiente con estimarlos en los dos puntos correspondientes a los tercios de los semiarcos.

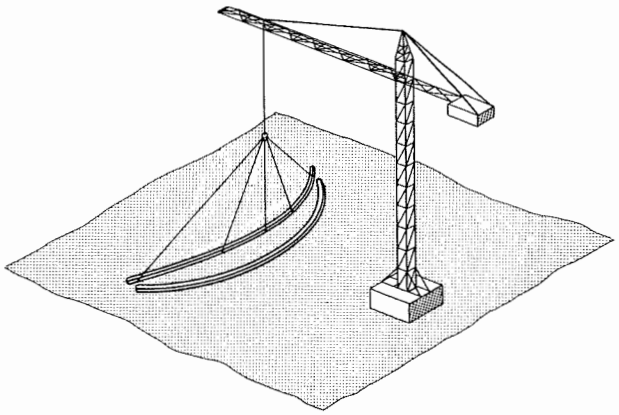
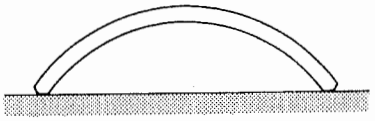
TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS
	b) Reacciones horizontales en los apoyos $$X_{d,d} = -X_{f,d} = (g_d + q_d) \cdot \frac{L^2}{8f}$$ c) Compresión en la articulación de clave $$N_{H,d} = (g_d + q_d) \cdot \frac{L^2}{8f}$$ d) Esfuerzo cortante en la articulación de clave $$V_{H,d} = 0$$	

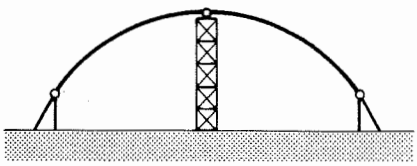
TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS
	1.3. **Carga vertical uniformemente repartida sobre la mitad izquierda de la luz**  a) Reacciones verticales en los apoyos $Y_{d,d} = -\frac{3}{8}(g_d + q_d)\,L$ $Y_{f,d} = \frac{1}{8}(g_d + q_d)\,L$ b) Reacciones horizontales en los apoyos $X_{d,d} = \frac{(g_d + q_d)\,L^2}{16\,f}$	La nieve da en general una distribución de cargas como la adoptada. Las cargas permanentes por m de luz crecen generalmente de clave hacia arranques. Para un predimensionamiento la simplificación es aceptable. Los momentos flectores deben calcularse directamente, a partir de las cargas y reacciones, de acuerdo con lo expuesto en el Capítulo 1. Para el predimensionamiento es suficiente con estimarlos en los dos puntos correspondientes a los tercios de los semiarcos.

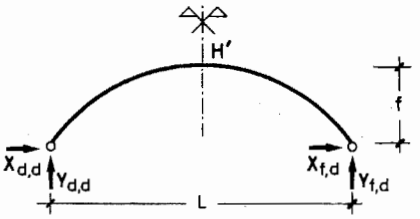
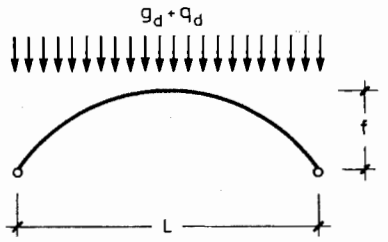
TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS
	$X_{f,d} = \frac{-(g_d + q_d)\,L^2}{16\,f}$ c) Compresión en la articulación de clave $N_{H,d} = \frac{(g_d + q_d)\,L^2}{16\,f}$ d) Esfuerzo cortante en la articulación de clave $V_{H,d} = \frac{1}{8}(g_d + q_d)\,L$	

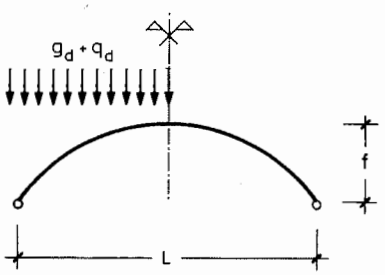
TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS
	1.4. **Carga horizontal de viento uniformemente repartida en la altura *f***  a) Reacciones verticales en los apoyos $$Y_f = q_d \frac{f^2}{2L}$$ $$Y_d = -Y_f$$ b) Reacciones horizontales en los apoyos $$X_{d,d} = \frac{-3}{4} q_d \cdot h$$ $$X_{f,d} = -\frac{1}{4} q_d \cdot h$$	* Los valores positivos de q corresponden a presiones y los negativos a succiones. * La distribución indicada es aceptable para un predimensionamiento. Para el proyecto defintivo, véase 9.5.7.

TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS
	c) Compresión en la articulación de clave $$N_{H,d} = \frac{1}{4} q_d \cdot h$$ d) Esfuerzo cortante en la articulación de clave $$V_{H,d} = q_d \frac{f^2}{2L}$$	
16.2.10.2. ARCOS PREFABRICADOS	1. Para todo lo referente a cargas permanentes excluido el peso propio y para las sobrecargas, vale íntegramente lo expuesto en 16.2.10.1. si en el funcionamiento definitivo se mantiene la articulación en clave, y lo expuesto en 16.2.11 para Arcos Biarticulados si después del montaje se bloquea la articulación de clave. 2. ATENCIÓN en el caso de arcos prefabricados a las acciones del peso propio, porque se presentan excepciones a lo anterior que pueden ser críticas y condicionantes en el proyecto. a) Usualmente los semiarcos se fabrican acostados y se levantan con grúa, con eslingas de tipo variable.	

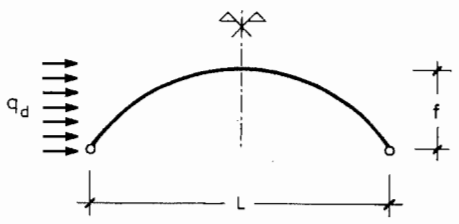
TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS
	 Los momentos flectores en esta operación deben ser evaluados cuidadosamente. b) Al final de la operación anterior, el semiarco queda en posición vertical, funcionando como una pieza isostática apoyada por sus extremos. 	

TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS
	Esta situación puede ser más crítica en el dimensionamiento del arco que las que éste presenta en su funcionamiento definitivo. c) Habitualmente el montaje se realiza tal como se indica en la figura.  De nuevo los esfuerzos en los semiarcos, trabajando como fuerzas isostáticas, pueden ser más críticos que los del funcionamiento definitivo. d) Si se va a bloquear la articulación para transformar el arco en biarticulado para las restantes cargas, la articulación de clave debe bloquearse antes de retirar la torre de apoyo y de colocar cualquier otra carga sobre el arco.	

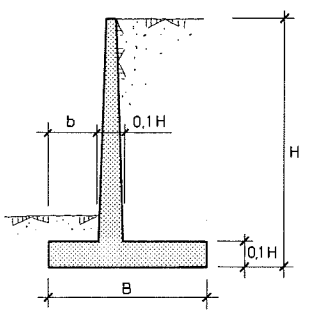
TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS
16.2.11. ARCOS PARABÓLICOS BIARTICULADOS	1.1. **Notaciones**  1.2. **Carga vertical uniformemente repartida sobre toda la luz**  a) Reacciones verticales en los apoyos $$Y_{d,d} = Y_{f,d} = (g_d + q_d)\frac{L}{2}$$	La nieve da en general una distribución de cargas como la adoptada. Las cargas permanentes por m de luz crecen generalmente de clave hacia arranques. Para un predimensionamiento la simplificación es aceptable. Los momentos flectores deben calcularse directamente, a partir de las cargas y reacciones, de acuerdo con lo expuesto en el Capítulo 1. Para el predimensionamiento es suficiente con estimarlos en los dos puntos correspondientes a cuatro puntos igualmente espaciados a lo largo de la luz.

TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS
	b) Reacciones horizontales en los apoyos $$H_{d,d} = H_{f,d} = (g_d + q_d)\cdot\frac{L^2}{8f}$$ c) Compresión en clave $$N_{H,d} = (g_d + q_d)\cdot\frac{L^2}{8f}$$ d) Esfuerzo cortante en clave $$V_{H,d} = 0$$ 1.3. **Carga vertical uniformemente repartida sobre la mitad izquierda de la luz**  	La nieve da en general una distribución de cargas como la adoptada. Las cargas permanentes por m de luz crecen generalmente de clave hacia arranques. Para un predimensionamiento la simplificación es aceptable.

TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS
	a) Reacciones verticales en los apoyos $V_{d,d} = \frac{3}{4}(g_d + q_d)\,L$ $V_{d,d} = \frac{1}{4}(g_d + q_d)\,L$ b) Reacciones horizontales en los apoyos $X_{d,d} = \frac{(g_d + q_d)\,L^2}{16\,f}$ $X_{f,d} = \frac{(g_d + q_d)\,L^2}{16\,f}$ c) Compresión en clave $N_{H,d} = \frac{(g_d + q_d)\,L^2}{16\,f}$ d) Esfuerzo cortante en la clave $V_{H,d} = \frac{1}{4}(g_d + q_d)\,L$	Los momentos flectores deben calcularse directamente, a partir de las cargas y reacciones, de acuerdo con lo expuesto en el Capítulo 1. Para el predimensionamiento es suficiente con estimarlos en los dos puntos correspondientes a cuatro puntos igualmente espaciados a lo largo de la luz.

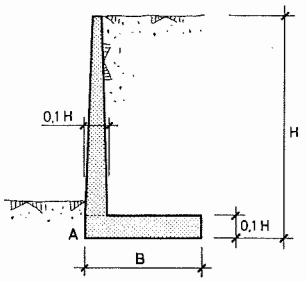
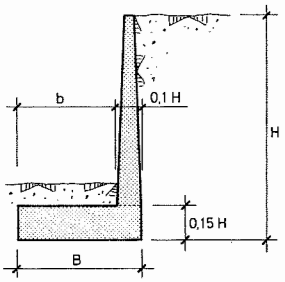
TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS
	1.4. **Carga horizontal de viento vertical uniformemente repartida en la altura *f***  a) Reacciones verticales en los apoyos $Y_{d,d} = -\frac{q_d \cdot f^2}{2\,L}$ $Y_{f,d} = -\frac{q_d \cdot f^2}{2\,L}$ b) Reacciones horizontales en los apoyos $X_{d,d} = -\frac{5}{7}\,q_d \cdot f$ $X_{f,d} = -\frac{2}{7}\,q_d \cdot f$	* Los valores positivos de q corresponden a presiones y los negativos a succiones. * La distribución indicada es aceptable para un predimensionamiento. Para el proyecto definitivo, véase 9.5.7.

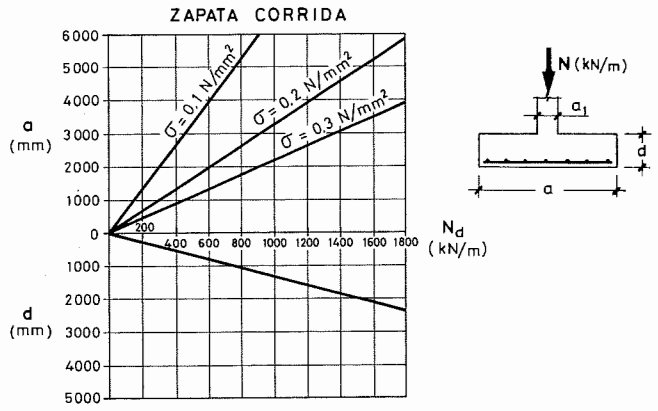
TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS
	c) Compresión en la clave $$N_{H,d} = -\frac{2}{7} q_d \cdot f$$ d) Esfuerzo cortante en la clave $$V_{H,d} = \frac{q_d \cdot f^2}{2\,L}$$	

TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS
16.2.12. MUROS DE CONTENCIÓN	Las reglas que siguen son válidas para muros con el trasdós sensiblemente vertical y con el relleno del trasdós realizado con material granular permeable y drenado.	
16.2.12.1. MUROS CON PUNTERA Y TALÓN	Las reglas son válidas para el predimensionamiento de muros con alturas 3 m ≤ H ≤ 10 m (*) Siendo σ la presión máxima en N/mm² de la puntera sobre el suelo, se tiene: 	Este predimensionamiento obedece a una solución b/B que corresponde al coste mínimo del muro.

σ (N/mm²)	B/H	b/h
0,1	0,60	0,28
0,2	0,50	0,15
0,3	0,45	0,10

(*) Para alturas mayores véase (16.5) CALAVERA J., "Muros de contención y muros de sótano". Esta obra contiene ábacos para un predimensionamiento muy preciso y tablas que proporcionan ya los muros calculados, incluso con mediciones de hormigón y armaduras

TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS
16.2.12.2. MUROS SIN PUNTERA	Siendo σ la presión máxima en A en N/mm², se tiene:  σ (N/mm²) / B/H: 0,1 — 0,19 H (H ≤ 5 m); 0,2 — 0,09 H (≤ 1350 mm); 0,3 — 0,5	Para la presión en puntera de 0,1 N/mm², este tipo de muro no admite alturas superiores a 5 m.
16.2.12.3. MUROS SIN TALON	 σ (N/mm²) / B/H / b/h: 0,1 — 0,24 $\sqrt{H}$ (< 1500 mm) — 0,50; 0,2 — 0,55 — 0,45	Este tipo de muro no puede ser proyectado con presiones superiores a 0,2 N/mm2 salvo que se tomen medidas especiales para garantizar la seguridad a deslizamiento. Véase para más detalles (16.1).

TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS
16.2.13. ZAPATAS CORRIDAS DE HORMIGÓN ARMADO CON CARGA LINEAL VERTICAL CENTRADA DE VALOR CONSTANTE (*)	El diagrama permite, a partir del esfuerzo axil de cálculo, $N_d = \gamma_f N$, calcular la dimensión del lado a de la zapata cuadrada y el canto útil d, en función de la presión admisible sobre el suelo, σ. $\left(\sigma = \frac{N_d/\gamma_f}{a^2}\right)$  	El gráfico proporciona la zapata de mínimo canto posible (máxima cuantía), ya que es la más económica. La flexibilidad se limita al valor $\frac{a-a_1}{2}\Big/ d \le 3$ para que resulte aceptable la hipótesis de reparto uniforme de las tensiones σ. El gráfico está realizado para $\gamma_f = 1{,}5$. Si $\frac{\gamma_{fg}+\gamma_{fq}}{g+q} = \gamma'_f \neq \gamma_f$ basta entrar en el gráfico con valores $Nd \cdot \frac{\gamma'_f}{1{,}5}$

(*) Véase la obra (16.3) CALAVERA, J.: "Cálculo de estructuras de Cimentación". Esta obra contiene colecciones de zapatas ya calculadas, incluso con mediciones de hormigón y armaduras.

TIPO DE ELEMENTO	REGLA DE PREDIMENSIONAMIENTO	COMENTARIOS
16.2.14. ZAPATAS AISLADAS DE PLANTA CUADRADADA DE HORMIGÓN ARMADO CON CARGA VERTICAL CENTRADA	El diagrama permite, a partir del esfuerzo axil de cálculo, $N_d = \gamma_f N$, calcular la dimensión del lado a de la zapata cuadrada y el canto útil d, en función de la presión admisible sobre el suelo, σ. $\left(\sigma = \frac{N_d/\gamma_f}{a^2}\right)$	El gráfico proporciona la zapata de mínimo canto posible (máxima cuantía), ya que es la más económica. La flexibilidad se limita al valor $\frac{a - a_1}{2} \Big/ d \leq 3$ para que resulte aceptable la hipótesis de reparto uniforme de las tensiones σ. El gráfico está realizado para $\gamma_f = 1{,}5$. Si $\frac{\gamma_{fg} + \gamma_{fq}}{g + q} = \gamma'_f \neq \gamma_f$ basta entrar en el gráfico con valores $Nd \cdot \frac{\gamma'_f}{1{,}5}$

16.3 TANTEO DE DIMENSIONAMIENTO

Conocidos los esfuerzos, debe a continuación procederse a fijar de forma aproximada las secciones necesarias para resistirlos, secciones que se tomarán como punto de partida para el cálculo propiamente dicho.

El tema no está suficientemente estudiado, pues en general el criterio de elección de escuadrías, aunque influido siempre por condicionamientos funcionales y constructivos, es básicamente un problema económico de optimización y, por tanto, fundamentalmente de juicio personal por ahora.

Para pilares con excentricidades $\frac{M}{N}$ reducidas, el criterio económico es el de cuantía mínima.

En pilares de gran importancia, de sección fija, en que se renuncie a la simetría de armaduras, los ábacos de CALAVERA, VERDE y BLANCO (16.4) permiten la optimización de armaduras. Este caso es frecuente en estructuras industriales.

La optimización en general ha sido objeto de trabajos de MORAGUES (16.5), (16.6) y de GOMEZ HERMOSO (16.7).

16.4 NECESIDAD EVENTUAL DE CORRECCIONES

Un predimensionamiento poco acertado puede motivar el que, en el cálculo definitivo, la sección asignada a alguna pieza resulte inaceptable y sea por tanto necesario modificarla. De ahí la necesidad de un buen predimensionamiento.

Por supuesto, en ese momento se está en condiciones de, introduciendo las modificaciones pertinentes en esa pieza y en sus inmediatas, utilizar esta segunda versión como un nuevo predimensionamiento y repetir el cálculo definitivo. Sin embargo, la repetición del cálculo es costosa y, de acuerdo con el examen crítico que hicimos en el Capítulo 14, sólo está justificada si los errores han resultado muy importantes. El problema es especialmente frecuente en entramados múltiples,

En éstos, un criterio práctico es el siguiente:

a) Si la inercia de la sección de cualquier pieza no necesita una variación de más del 30%, no suele ser necesaria la repetición del cálculo de esfuerzos.

b) Si es mayor, basta realizar un nuevo cálculo parcial de un entramado reducido alrededor de esa pieza, de acuerdo con lo expuesto en el Capítulo 8.

BIBLIOGRAFIA

(16.1) LEONTOVICH, V.: "Pórticos y Arcos". C.E.C.S.A. Méjico. 1983.

(16.2) CALAVERA, J.: "Muros de Contención y Muros de Sótano", 3ª Edición. INTEMAC. Madrid. 1999.

(16.3) CALAVERA, J.: "Cálculo de Estructuras de Cimentación", 4ª Edición. INTEMAC. Madrid. 1998.

(16.4) CALAVERA, J.; VERDE, A.; BLANCO, F.: "Abacos para el dimensionamiento óptimo de secciones de hormigón armado sometidas a flexocompresión". INTEMAC. Madrid. 1979.

(16.5) MORAGUES, J.J.: "Diseño óptimo de piezas prismáticas flectadas de hormigón armado". Boletín de Estructuras. Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Valencia. 1981.

(16.6) MORAGUES, J:J.: "Diseño óptimo de soportes rectangulares de hormigón armado". Boletín de Estructuras. Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Valencia. 1981.

(16.7) GOMEZ HERMOSO, J.: "Análisis técnico-económico de la influencia que presenta el empleo de diferentes materiales y tipologías estructurales en el proyecto de estructuras de edificios". Tesis Doctoral realizada en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos de la Universidad Politécnica de Madrid, Febrero 1998, bajo la dirección de J. FERNANDEZ GOMEZ.

CAPÍTULO 17

CÁLCULO NO LINEAL[1]

17.1. GENERALIDADES SOBRE CÁLCULO NO LINEAL. RÓTULAS PLÁSTICAS

El cálculo, de acuerdo con los métodos clásicos, descansa de forma básica en la fórmula

$$\varphi = \frac{1}{R} = y'' = \frac{M}{EI} \qquad [17.1]$$

que expresa que la curvatura es una función lineal del momento flector actuando sobre la sección considerada de la pieza, tal como se indica en la figura 17-1[2]. De ahí que estos métodos, además de ser denominados "métodos basados en la continuidad teórica", sean conocidos más comúnmente como "métodos de cálculo lineal".

A la fórmula [17.1] le corresponde en la figura el diagrama lineal 1 de coeficiente angular EI. Este diagrama corresponde a una idealización bastante radical del comportamiento de la pieza de hormigón armado y supone que, alcanzado el punto A, en el cual la tensión del acero iguala el valor de su límite elástico, la pieza se agota. Este agotamiento encierra un doble significado, pues por una parte supone que la máxima capacidad resultante de la pieza es el valor M_A del momento; esto es bastante

1 Para lectores sin formación previa en hormigón armado, puede ser más conveniente leer este Capítulo después de una primera lectura del resto de la obra.

2 En este Capítulo se presenta el problema general del cálculo no lineal.Una vez analizados los problemas de fisuración y adherencia en los Capítulos 39 y 40, en el Anejo nº 1 del Tomo II se estudia en detalle el problema de las leyes Momentos-Curvatura y Momentos-Rotaciones y, en general, de las zonas plásticas.

aproximado. También supone que la curvatura φ_A es la máxima alcanzable por la pieza, y esto es muy inexacto.

Sin embargo, debido a diversos fenómenos tales como la fisuración, la retracción y la fluencia, el comportamiento de la estructura no es lineal y presenta aspectos más complejos.

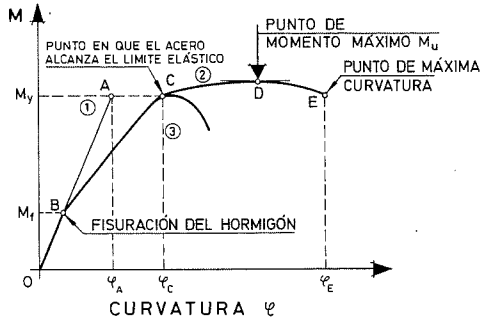


Figura 17-1

Un comportamiento bastante frecuente de una sección de hormigón armado sometida a flexión en un proceso de carga monótonamente creciente viene dado por el diagrama 2 de la figura 17-1. En él, se aprecia claramente que la ley lineal sólo resulta aceptable en un campo de deformaciones relativamente restringido.El punto *B* corresponde a la fisuración y, a partir de él, aunque el diagrama sigue aproximándose aceptablemente a una ley lineal, lo hace con un coeficiente angular menor, ya que, en el producto *EI*, el valor *I* se ha reducido apreciablemente a causa de la fisuración del hormigón. A partir del punto *C* en el que se alcanza el límite elástico del acero, el diagrama cambia bruscamente, pasa por un máximo del momento y alcanza finalmente el punto *E* de agotamiento.

La diferencia en cuanto al valor máximo del momento *M* alcanzado entre los diagramas 1 y 2 es relativamente pequeña y normalmente no supera el 10%. Sin embargo, la diferencia en cuanto a deformaciones es muy importante y la curvatura φ_E puede ser muchas veces superior a φ_A.

Un concepto fundamental es el de *ductilidad de la sección*. Se entiende por tal la relación entre la curvatura en el agotamiento, φ_u, y la curvatura al alcanzar el límite elástico, φ_y. En nuestro caso

$$\frac{\varphi_u}{\varphi_y} = \frac{\varphi_E}{\varphi_c} \qquad [17.2]$$

Rara vez, en secciones de hormigón armado sometidas a flexión, la ductilidad es inferior a 3 y frecuentemente alcanza el valor 10 e incluso valores superiores. De todas formas, disponer de la adecuada ductilidad supone cumplir ciertos requisitos de proyecto que más adelante veremos. Si una sección de hormigón armado presenta un diagrama como el 3 de la figura 17-1, alcanzará la rotura con poca deformación. Esto, como veremos en apartados sucesivos, no sólo impide una adecuada redistribución de

momentos, sino que indica que la rotura engloba una escasa absorción de energía. En general, pero sobre todo en estructuras que puedan verse sometidas a acciones sísmicas importantes, es esencial que la estructura presente una alta capacidad de absorción de energía y, por lo tanto, en ese caso la condición de ductilidad es de importancia básica.

Como hemos dicho, las piezas de hormigón armado sometidas a flexión, si han sido proyectadas adecuadamente, presentan suficiente ductilidad. En cambio, las piezas sometidas a flexión compuesta, sobre todo si la compresión es dominante, suelen presentar una ductilidad mucho más reducida,

La figura 17-2, tomada de la referencia J. ARENAS (17.1), muestra la influencia del esfuerzo axil en la actividad de una sección sometida a flexión compuesta. En general para excentricidades pequeñas la fisuración es escasa y la pérdida de rigidez se debe fundamentalmente a fenómenos de plastificación. Para excentricidades grandes el comportamiento de la sección se asemeja al caso de flexión simple.

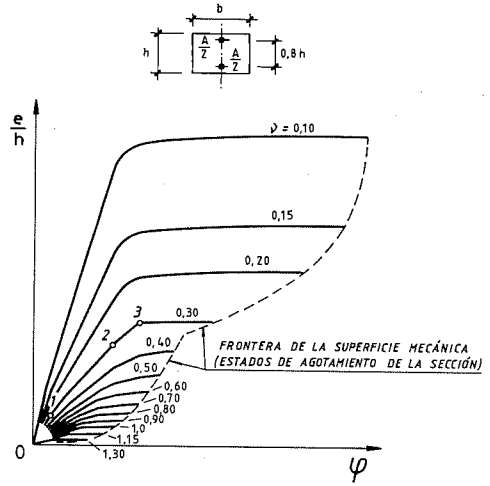


Figura 17-2

Un diagrama típico como el 2 de la figura 17-1 puede ser esquematizado para un primer análisis, por otro bilineal como el del trazo continuo de la figura 17-3.

Tal diagrama está formado por un tramo *OA*, que representa un comportamiento lineal elástico, y por otro AB, perfectamente plástico.

De acuerdo con este diagrama, al crecer en una sección determinada de la pieza el momento flector *M* aplicado, la curvatura crecerá proporcionalmente al momento. Alcanzado en la sección el valor M_A, la curvatura crece ya sin incremento del momento aplicado, constituyendo lo que se denomina una rótula plástica.

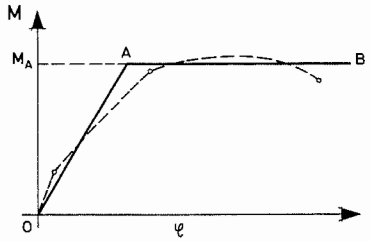


Figura 17-3

17.2 REDISTRIBUCIÓN DE MOMENTOS CON FORMACIÓN DE RÓTULAS PLÁSTICAS

Consideremos una viga continua de dos vanos, sometida a carga uniforme p sobre toda la luz (Fig. 17-4a) y supongamos que la ley Momentos-Curvatura es del tipo *OAB* de la figura 17-3, es decir, se trata de una rótula perfecta.

Para niveles de carga moderados, el comportamiento de la estructura estará, aproximadamente, de acuerdo con el cálculo lineal y la distribución de momentos flectores será la indicada en la figura 17-4b). Si seguimos incrementando el nivel de carga, alcanzaremos en alguna sección el límite elástico de la armadura. Supongamos que eso ocurre para una carga p_y, en la sección sobre el apoyo B, a la que corresponde el máximo momento negativo.

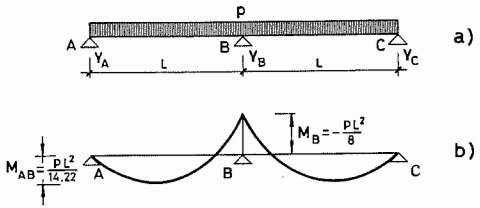


Figura 17-4

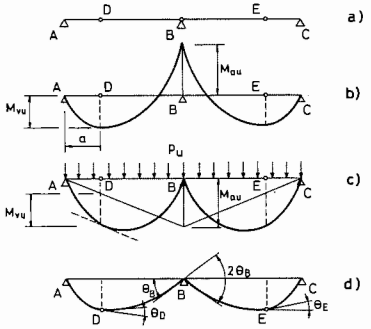


Figura 17-5

A partir de ese momento, si la sección B tiene ductilidad suficiente, la estructura, en contra de lo que supone el cálculo lineal, aceptará nuevos incrementos de carga. Si la sección es escasamente dúctil, puede efectivamente producirse el fallo para una carga p_y igual a la prevista por el cálculo lineal.

Si la ductilidad en B es suficiente, la carga sobrepasará el valor p_y y crecerá hasta que se formen nuevas rótulas plásticas, por ejemplo para los máximos momentos de vano[1] en las secciones D y E. A partir de este nivel de carga p_u, la viga ha alcanzado un mecanismo de colapso y no puede ya resistir cargas mayores[2]. (Fig. 17-5a).

Con el proceso expuesto (Fig. 17-5b), si el momento de agotamiento en el apoyo B es M_{au} y el de los vanos es M_{vu}, la pieza se habrá agotado bajo una carga p_u, tal que se alcancen ambos. Como ya hemos dicho, esto exige una ductilidad suficiente para permitir que se produzca, realmente, la redistribución de momentos.

En lo anterior, hemos supuesto que se formaba primeramente la rótula plástica en B. Como hasta el momento de aparición de esa rótula el comportamiento de la estructura es lineal, quiere decir que, cuando se inicia la plastificación en B, el momento en D y E es

$$M_D = M_E = \frac{\frac{1}{14,22}}{-\frac{1}{8}} M_B = -0,56\, M_B \qquad [17.3]$$

Para que sea cierta la hipótesis de plastificación de la sección B, deberá cumplirse

$$M_{vu} \geq 0,56\, |M_{au}| \qquad [17.4]$$

pues, de otra forma, la plastificación se iniciaría en las secciones D y E, continuando aún la B en régimen lineal.

La distribución final de momentos se representa en la figura 17-5b). Considerando la presentación equivalente de la figura 17-5c), podemos escribir

$$M_{vu} + \frac{a}{L} M_{au} \leq \frac{1}{8} p_u L^2 \qquad [17.5]$$

o bien

$$p_u \geq \frac{8}{L^2}\left(M_{vu} + \frac{a}{L} M_{au} \right) \qquad [17.6]$$

1 Los puntos de posible rotulación plástica dependen, por supuesto, de la distribución de armaduras a lo largo de la pieza.

2 Se supone, como es habitual, que en la viga continua todos los apoyos son deslizantes, menos uno que es una rótula.

Es inmediato demostrar que

$$\frac{a}{L}=\frac{1}{2}-\frac{M_{au}}{p_u L^2} \qquad [17.7]$$

pero no tiene interés, para nuestros propósitos ahora, sustituir [17.7] en [17.6] y despejar p_u, bastando observar que, de acuerdo con la figura 17-5c), para un valor constante de M_{au}, al crecer M_{vu}, crece $\frac{a}{L}$ y, según [17.6], aumenta p_u.

Por tanto, de acuerdo con [17.6], la viga puede alcanzar, mediante la redistribución de momentos indicada, cargas p_u de agotamiento notablemente mayores que el valor p_y dado por el cálculo lineal, siempre que la ductilidad en apoyo y vanos sea suficiente.

Mientras el valor de p no rebase el límite p_y obtenido como carga de agotamiento en el cálculo lineal, es decir mientras no se haya producido plastificación, la deformada de la directriz de la pieza carece de puntos angulosos y, por tanto, su derivada primera es continua. Tan pronto se produce la redistribución de momentos por plastificación, se producen en B giros θ sin aumento de momento y en definitiva se producirán en la deformada un punto singular cuyas tangentes forman un ángulo $2\,\theta_B$, que es el giro plástico ocurrido en B, y otros puntos singulares en las rótulas D y E cuyas tangentes forman ángulos θ_D y θ_E.

Conocidos M_{au} y M_{vu}, el cálculo de θ_B, θ_D, θ_E es inmediato.

Consideremos, por ejemplo, el caso particular en que se reduce el momento de apoyo hasta igualarlo al de vano, con lo que $|M_{au}|=|M_{vu}|$. Es inmediato deducir que, en ese caso, $|M_{au}|=|M_{vu}|=\frac{p_u L^2}{11,6}$ y $\frac{a}{L}=0,41$ Esto supone adoptar un relación de $\frac{M_{vu}}{M_{au}}=-1$, en lugar de la correspondiente al cálculo lineal:

$$\frac{M_{vu}}{M_{au}}=\frac{\frac{1}{14,22}pL^2}{-\frac{1}{8}pL^2}=-0,56$$

Si $M_{au}=-\frac{p_u L^2}{11,6}$ $\qquad p_u=11,6\,\frac{|M_{au}|}{L^2}$

En cambio, el cálculo lineal conduce a

$$M_{au}=\frac{-p_y L^2}{8} \text{ de donde } \quad p_y=8\,\frac{|M_{au}|}{L^2}$$

y, por tanto

$$\frac{p_u}{p_y}=\frac{11,6}{8}=1,45$$

Es decir, el cálculo no lineal ha permitido alcanzar una carga última superior en un 45% a la obtenible con el cálculo lineal.

Obsérvese que, a medida que aumenta el valor de la carga p, la posición de los puntos D y E de momento máximo es constante hasta que se forma la rótula en B. A partir de ese momento, la posición de dichos puntos varía al incrementarse la carga.

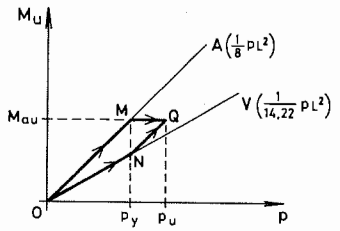


Figura 17-6

La redistribución de momentos se representa muy bien mediante el gráfico de la figura 17-6, de relación Momentos-Cargas.

El cálculo lineal corresponde al valor p_y, con el punto M correspondiente al momento de apoyo y N al de vano. La redistribución de momentos conduce a un punto Q, con valor $p_u = 1,45\,p_y$ y con momentos iguales a $|M_{au}|$ en apoyo y vano. El tramo MQ corresponde al giro de la rótula plástica en el apoyo sin incremento de momento, pero permitiendo incrementar el de vano.

Frecuentemente, se identifica "redistribución de momentos" con "reducción de momentos negativos". Comúnmente es así, pero el significado de la redistribución es el de variación de momentos, tanto aumentando como disminuyendo. Como ejemplo, veamos ahora el caso de una viga armada de forma que incrementamos el momento negativo y reducimos los de vano hasta obtener la relación $\frac{M_{vu}}{M_{au}}=-0,38$, en lugar del valor de cálculo lineal para el que, como vimos, $\frac{M_{vu}}{M_{au}}=-0,56$.

Alcanzado el valor de carga $p = p_y$ (Fig. 17-7), se formarán rótulas en D y E, con un valor de momento en vano $M_{vu}=\frac{1}{14,22}p_y L^2$ y un valor $\frac{a}{L}=0,375$, con lo que, $p_y = 14.22\,\frac{M_{vu}}{L^2}$ todo ello en régimen lineal.

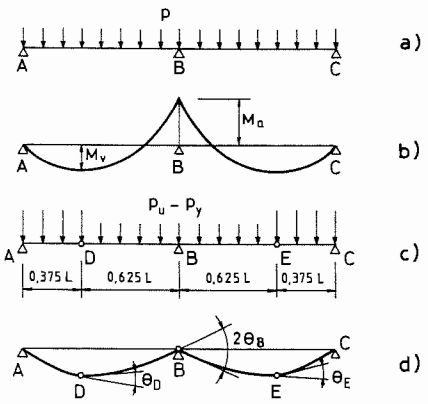


Figura 17-7

Si seguimos aumentando la carga, alcanzaremos un valor p_u tal que el momento de apoyo en B alcance el valor $M_{au} = -\frac{M_{vu}}{0{,}38}$. (Se supone ductilidad suficiente para ello en los vanos).

El momento en B se puede descomponer en dos sumandos, uno debido a la carga p_y, que forma las rótulas en vano, y otro debido a la carga $p_u - p_y$ actuando sobre la estructura isostática reflejada en la figura 17-7c).

$$M_{au} = -\frac{1}{8} p_y L^2 - (p_u - p_y)\frac{0{,}625^2 L^2}{2} - (p_u - p_y)\frac{0{,}375\ L}{2} 0{,}625\ L$$

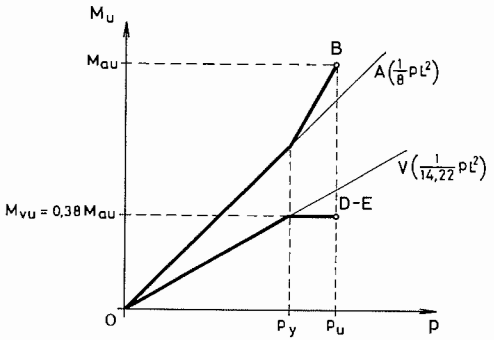


Figura 17-8

$$M_{au} = -\frac{1}{8} \cdot 14{,}22\, M_{vu} - 0{,}312\,(p_u - p_y)\, L^2$$

y con $M_{au} = -\frac{1}{0{,}38} M_{vu}$ y $p_y = 14{,}22 \frac{M_{vu}}{L^2}$

$$p_u = 16{,}94 \frac{M_{vu}}{L^2}$$

luego

$$\frac{p_u}{p_y} = \frac{16{,}94}{14{,}22} = 1{,}19$$

es decir, el cálculo no lineal ha permitido alcanzar un incremento de carga última del 19% respecto a la alcanzable con el cálculo lineal.

Análogamente al caso anterior, podemos representar la redistribución ocurrida mediante un diagrama Momentos-Cargas tal como el indicado en la figura 17-8.

Obsérvese que en este caso, a diferencia del anterior, la posición de los puntos de momento máximo en vano y, por tanto, de las rótulas de vano, ha permanecido fija hasta la formación de éstas.

Naturalmente, los procesos de redistribución, al variar los momentos, modifican también los esfuerzos cortantes y los axiles de las piezas, de acuerdo con lo expuesto en capítulos anteriores.

17.3 DEFORMACIONES ELÁSTICAS Y PLÁSTICAS. CURVATURAS Y ROTACIONES

En lo anterior, hemos partido de la formación de rótulas plásticas, tal como fueron definidas en 17.1, es decir, como rótulas plásticas perfectas.

La situación real es más compleja, pues la relación Momentos-Curvatura corresponde a curvas del tipo *OBCDE* de la figura 17-1 más que a curvas de tipo *OAB* de la figura 17-3.

Consideremos primeramente una viga simplemente apoyada sometida a carga uniformemente repartida sobre toda su luz (Fig. 17-9).

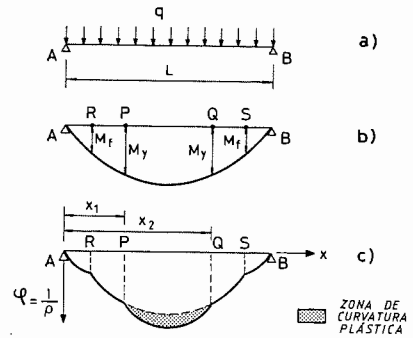


Figura 17-9

Supongamos que la viga se arma con armadura constante a lo largo de su luz, para un momento de agotamiento M_u y que la relación Momentos-Curvaturas es la indicada en la figura 17-10.

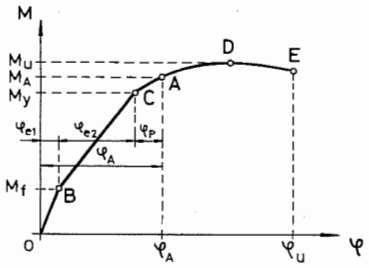


Figura 17-10

En ella M_f es el momento de fisuración y M_y el relativo a una deformación de la armadura de tracción igual a la correspondiente al límite elástico.

La curvatura, para un momento correspondiente a un punto genérico A, es φ_A, que a su vez se descompone en tres sumandos, φ_{e1} es la parte de curvatura elástica correspondiente al estado lineal y no fisurado de la pieza. φ_{e2} es la correspondiente al estado lineal pero fisurado de la pieza. $\varphi_e = \varphi_{e1} + \varphi_{e2}$ es por tanto la curvatura elástica. Finalmente, φ_p es la componente plástica de la curvatura[1]

El diagrama de momentos de la pieza es el indicado en la figura 17-9b). Para un valor de carga p tal que el momento flector máximo supere el valor M_y, habrá una cierta zona PQ en la cual se han producido deformaciones plásticas. En el diagrama de la figura 17-9c) se representan las curvaturas. Para valores de M inferiores al M_f de la figura 17-1, la relación Momentos-Curvatura viene dada por la expresión lineal.

$$\varphi = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{E_c I_h} \qquad [17.8]$$

donde I_h corresponde al valor del momento de inercia de la sección sin fisurar y homogeneizada, es decir teniendo en cuenta las armaduras[2] .

Para valores de M superiores a M_f pero no superiores a M_y, la relación, todavía lineal, será

$$\varphi = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{E_c I_e} \qquad [17.9]$$

1 Por sencillez, en este Capítulo se manejan solamente diagramas Momentos-Curvatura y Momentos-Rotaciones correspondientes a flexión simple. En el Anejo nº1 del Tomo II se proporciona información para el caso general de flexión compuesta mediante leyes Axil-Momento- Rotación para el caso de flexión compuesta.

2 Por razones que expondremos en profundidad más adelante, existe una acusada incertidumbre en el valor a tomar para el módulo de deformación del hormigón E_c.

donde I_e es la inercia media equivalente que tiene en cuenta la influencia de la fisuración a lo largo de la pieza.

Finalmente, a partir de $M = M_y$, la relación deja de ser lineal y viene dada por la curva, del tipo de la figura 17-10, que resulte apropiada para la sección considerada[1] .

Para momentos superiores a M_y, la curvatura φ, se descompone de acuerdo con la expresión

$$\varphi = \varphi_e + \varphi_p = \varphi_{e1} + \varphi_{e2} + \varphi_p \qquad [17.10]$$

suma de dos componentes elásticas o lineales y de una componente plástica, tal como se indica en las figuras 17-9c) y 17.10.

Frecuentemente haremos uso del concepto de rotación θ, entre dos secciones de la pieza, de abscisas X y X', y que por definición es la integral de la curvatura

$$\theta_{X,X'} = \int_X^{X'} \varphi \, d\, x \qquad [17.11]$$

Es importante el concepto de rotación plástica, entendiendo por tal la debida a las curvaturas plásticas θ_p. Por tanto

$$\theta_{p(X,X')} = \int_X^{X'} \varphi_p \, d\, x \qquad [17.12]$$

Es de especial interés el cálculo de la rotación plástica entre las secciones extremas de la zona PQ (Fig. 17-9c) correspondiente a la zona donde se han producido deformaciones plásticas

$$\theta_{p(X_1,X_2)} = \int_{X_1}^{X_2} \varphi_p \, d\, x \qquad [17.13]$$

Como veremos, con frecuencia, la zona plástica se sustituye por una rótula puntual situada en el punto de momento máximo, que para cada valor del momento gira el valor θ correspondiente al giro entre secciones extremas de la zona plástica.

Análogamente al diagrama Momentos-curvatura correspondiente a una sección cuya forma general se refleja en las figuras 17-1 y 17-10, puede definirse un diagrama Momentos-Rotaciones para una zona plastificada, que resulta del tipo indicado en la figura 17-11.

Análogamente a lo visto en el caso de las curvaturas, la rotación correspondiente a un momento $M_A > M_y$ puede descomponerse de acuerdo con la fórmula

$$\theta_A = \theta_{e1} + \theta_{e2} + \theta_p \qquad [17.14]$$

1 El Anejo nº1 del Tomo II contiene información detallada sobre leyes Momentos-Curvatura.

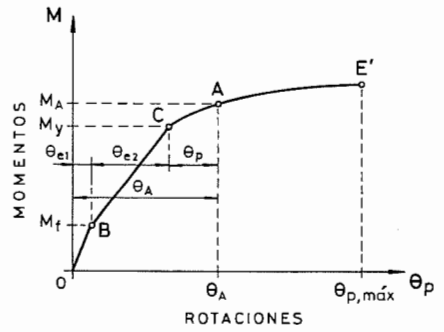


Figura 17-11

siendo el primer sumando la rotación elástica correspondiente al estado lineal no fisurado, el segundo la correspondiente al estado lineal fisurado y el tercero a la rotación plástica.

Es importante destacar que, mientras el *diagrama Momentos-Curvatura corresponde a una sección, el diagrama Momentos-Rotaciones corresponde a una longitud determinada de directriz de la pieza y a un determinado estado de carga sobre la estructura.*

17.4 REDISTRIBUCIÓN DE MOMENTOS CON FORMACIÓN DE ZONAS PLASTIFICADAS

17.4.1 MODELOS GENERALES

En el apartado 17.1 se definió la rótula perfecta y en el 17.2 se analizó la redistribución de momentos aceptando la formación de rótulas perfectas.

Una vez expuesta en 17.3 la realidad, más compleja, de la plastificación de zonas, analicemos de acuerdo con ello la forma más general de redistribución.

Consideremos el caso de un dintel interior de un entramado de gran número de vanos, sometido a una carga p uniformemente repartida.

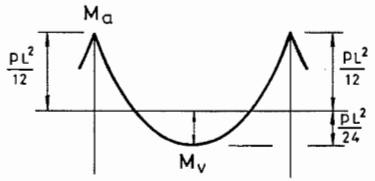


Figura 17-12

La distribución de momentos según el cálculo lineal es la indicada en la figura 17-12. En el caso más general, y dependiendo de la forma de armado del dintel, las secciones de momentos máximos de vano y apoyo tendrán diagramas Momentos-Curvatura del tipo indicado en la figura 17-10 y, en fase de prerrotura, en forma análoga al caso de la viga que analizamos en 17.3 la distribución de curvaturas será como la indicada en la figura 17-13.

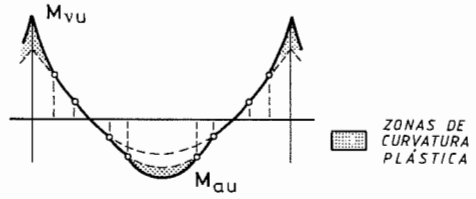


Figura 17-13

El que se plastifiquen o no ambas zonas, de vano y apoyo, depende de cómo se arme la pieza y pueden presentarse los casos que exponemos a continuación:

a) Supongamos, en primer lugar, que la pieza se arma con el esquema simplificado indicado de trazos en la figura 17-14a), con valores $M_{au} > M_{vu}$ y $M_{fa} < M_{fv}$ [1] En la figura 17-14b) se ha dibujado el diagrama Momentos-Cargas, que generaliza los utilizados para el caso de rótulas perfectas en 17.2 (Figs. 17-6 y 17-8). Como puede verse, iniciada la fisuración en los apoyos para una carga p_1, al perder esas zonas rigidez, la rapidez con que se incrementa el momento de apoyo se reduce al aumentar la carga, aumentando correlativamente el de vano, pues en todo el proceso de carga la suma de momentos de vano y apoyo tiene que ser igual al momento isostático correspondiente a la carga aplicada.

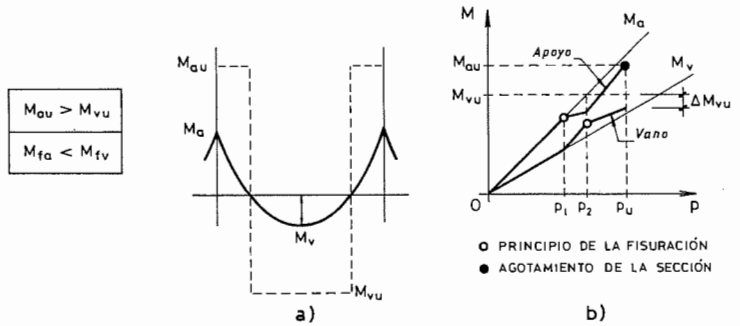


Figura 17-14

1 Con la condición $M_{fa} < M_{fv}$, se quiere expresar, de una manera simple, que la seguridad a fisuración será menor en vano que en apoyo, aunque la armadura de vano sea mayor que la del apoyo.

Al seguir incrementando la carga, se alcanzará un valor p_2 para el que se inicia la fisuración en el centro de vano, reduciéndose por tanto la rigidez de la pieza en esa zona, lo que motiva, para cargas superiores a p_2, un incremento más lento de momentos de vano y más rápido de los momentos de apoyo. Para una carga p_u se alcanza el agotamiento en las secciones de apoyo. Como puede verse en este ejemplo, el comportamiento indicado no se aleja excesivamente del lineal y una fracción ΔM_{vu} de la capacidad resistente del vano fue desaprovechada.

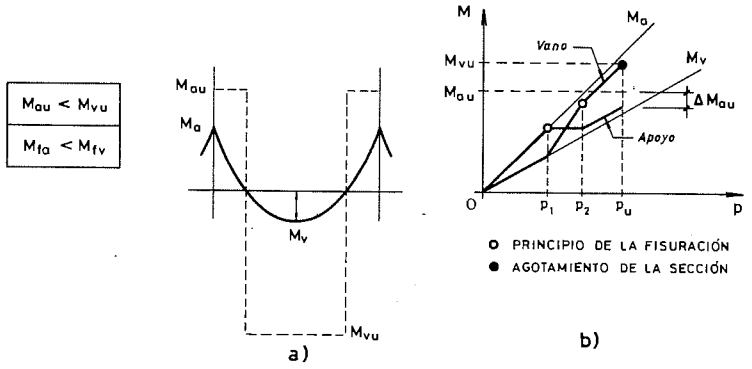


Figura 17-15

b) Supongamos ahora que la pieza se arma con el esquema simplificado de la figura 17-15a). La fisuración se inicia en los apoyos, con reducción muy acusada de su rigidez, lo que motiva una casi estabilización de los momentos de apoyo y, por tanto, un fuerte incremento del momento de vano, que supera al de apoyo. Para una carga p_2 se inicia la fisuración en vano y finalmente el agotamiento se produce en el vano para una carga p_u, quedando una reserva resistente en el apoyo, ΔM_{au}, sin utilizar.

c) En este caso, la distribución de armadura sigue el esquema simplificado de la figura 17-16.

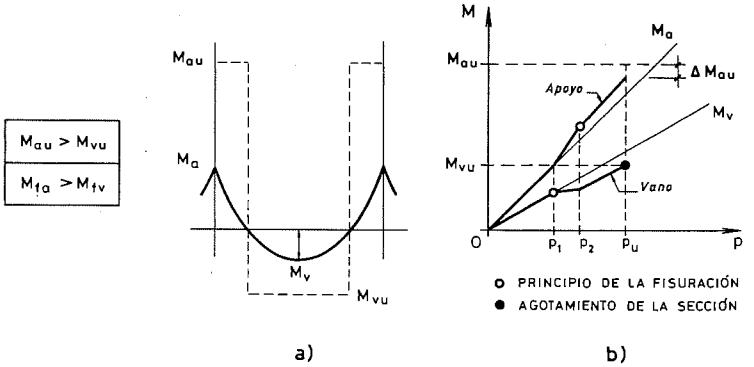


Figura 17-16

Como puede verse, se fisura primero el vano, con lo cual sus momentos, a partir de la carga p_1, son ya menores que los previstos por el cálculo lineal y los del apoyo, correlativamente mayores, produciéndose la rotura en vano, con una reserva resistente en apoyo ΔM_{au}.

d) En este caso, la distribución de armadura sigue el esquema simplificado de la figura 17-17.

En la figura 17-18 puede apreciarse el ensayo de una losa continua de dos vanos. En los apoyos se han dispuesto células de presión de forma que en todo el proceso de carga se conocen las reacciones de apoyo y por tanto puede calcularse con gran exactitud la distribución de momentos y obtenerse gráficos análogos a los de las figuras 17-14b), 17-15b), 17-16b) y 17-17b).

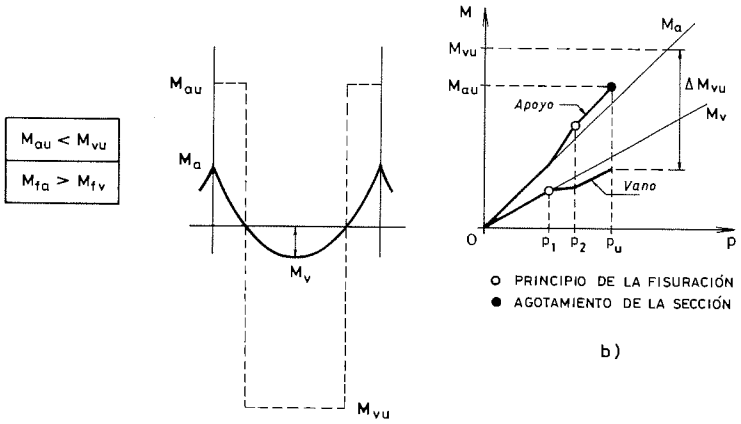
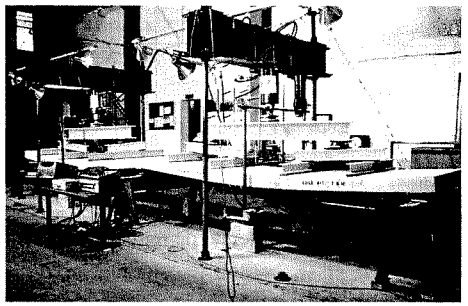


Figura 17-17



Ensayo a Rotura de losas continuas de dos vanos
(cortesía de INTEMAC)
Figura 17-18

17.4.2 GRADO DE REDISTRIBUCIÓN[1]

a) GRADO DE DISTRIBUCIÓN EN EL CÁLCULO TEÓRICO

No lo define ni EHE, ni EC-2, ni MC-90 y tampoco ACI 318-95.

Usualmente se entiende por ello el valor $K_d = \frac{\Delta M}{M}$ (Fig. 17-19), es decir la variación ΔM dividida por el valor según el cálculo lineal, pero no hay un acuerdo general sobre ello y en todo caso es una definición válida para una sección, pero no para una pieza.

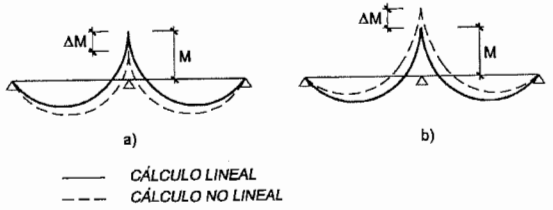


Figura 17-19

b) GRADO DE REDISTRIBUCIÓN EXPERIMENTAL

Consideremos el diagrama *M-P* de momentos-cargas en una sección, obtenido en ensayo (*P* es la carga uniformemente repartida por unidad de longitud). (Fig. 17-20).

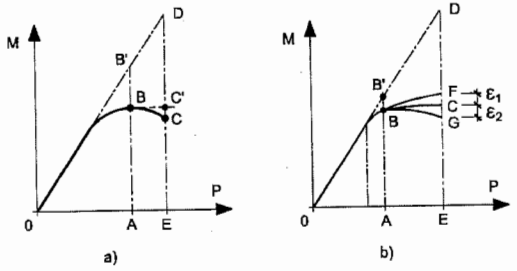


Figura 17-20

En sentido estricto, el grado experimental de redistribución obtenido en el ensayo es $K_t = \frac{CD}{ED}$

1 Lo que sigue procede de una "Nota Interior" de J.CALAVERA a la comisión VII del CEB. (Véase (17.2)).

Parece conveniente, en el grado actual de conocimiento y de posibilidades de medidas en el ensayo, definir como grado experimental de redistribución el valor

$$K_t = \frac{C'D}{ED}$$

Definir como K_t el valor $\frac{BB'}{AB'}$ no sería lógico ni posible en la práctica, porque considerando en la figura 17-20 los posibles diagramas de ensayo *OBG, OBC* y *OBF*, una desviación infinitesimal del valor del momento último *M* (ligeras desviaciones en el equipo de ensayo o en el procedimiento de medida, por ejemplo) conduciría a valores $K_{tG} = \frac{GD}{ED}$, $K_{tc} = \frac{CD}{ED}$, $K_{tF} = \frac{FD}{ED}$, valores todos ellos sensiblemente coincidentes y sin embargo con la definición $K = \frac{BB'}{AB'}$ el valor obtenido sería mucho más bajo que todos ellos. (En el límite podría resultar $\frac{BB'}{AB'} = 0$).

17.5 MÉTODOS GENERALES DE CÁLCULO NO LINEAL

17.5.1. PLANTEAMIENTO GENERAL

Aunque los métodos generales de cálculo no lineal no han tenido aplicación práctica apreciable hasta una época relativamente reciente, los métodos generales de cálculo fueron establecidos hace mucho tiempo. En particular el CEB (Comité Euro-International du Béton) dedicó al tema dos boletines (17.3), (17.4) con aportaciones de diversas procedencias. La exposición que sigue se basa en los métodos expuestos en dichas publicaciones. En 17.5.2 se indican los métodos basados en el cálculo numérico.

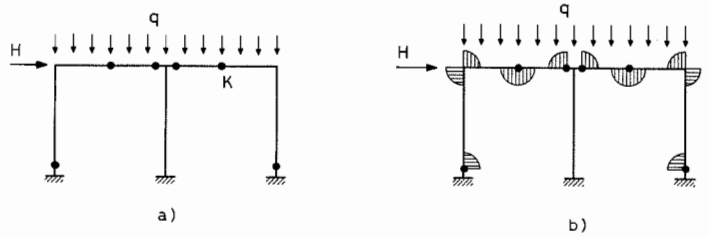


Figura 17-21

Consideremos, como ejemplo, el pórtico de la figura 17-21[1], sometido a dos sistemas de acciones horizontales y verticales (Fig. 17-21a). Si la estructura tiene

1 Seguimos el método expuesto por Baker en las referencias (17.3) y (17.4). Véase en particular (17.5). Un excelente resumen del método general y de los de BAKER y MACHI, que siguen, puede verse en TICHY y RAKOSNIK (17.6).

grado de hiperestatismo n, se puede transformar en isostática suprimiendo n coacciones. En nuestro caso, la estructura presenta 9 reacciones y, por tanto, su grado de hiperestatismo es 9 - 3 = 6. Podemos, por tanto, transformarla en isostática si introducimos seis rótulas, tal como se indica en la figura 17-21a. Designemos para una estructura general, con n rótulas, cada rótula por un número i (i = 1,2, ..., k, ..., n) y designemos en cada rótula, por ejemplo en la i, por M_i a un par de momentos iguales y de signo contrario aplicados en la rótula, cada uno al extremo de una de las piezas que concurren en la rótula y de valor tal que anulen la rotación ocurrida en ella por efecto de las acciones aplicadas a la estructura.

Bajo el efecto de los valores últimos de las acciones aplicadas, incluidos los pares de valores M_i, se plastificarán determinadas zonas de la estructura. Las secciones de posible plastificación se suelen denominar *secciones críticas* con independencia de que en ellas se formen realmente rótulas o no. El número de secciones críticas de una estructura, en general, es superior a su grado de hiperestatismo. Las zonas plastificadas, en nuestro caso, pueden pertenecer a dos grupos distintos. El primero es el de aquéllas correspondientes a las rótulas. El segundo a zonas no rotuladas. En la figura 17-21b, para visualizar el proceso, el bloque correspondiente a la zona plastificada se ha dibujado del lado de la cara traccionada de la pieza.

A partir de la experiencia general de los métodos lineales, es necesario determinar las zonas de posible plastificación y, dentro de ellas, situar las n rótulas plásticas.

Una vez transformada la estructura en isostática y considerando aplicadas todas las acciones, incluido los pares de momento M_i en cada rótula, apliquemos el teorema de los trabajos virtuales a cada rótula i. Llamando θ_i al giro de la rótula i ocasionado por todas las acciones, incluido el par de momentos M_i y a la ley de momentos flectores $M_{Mi,i}$ producidos en la estructura isostática por el par de momentos M_i aplicados en la rótula i, se tendrá:

$$M_i\ \theta_i = \int M_{Mi,i}\ \varphi\ d\ s \qquad [17.15]$$

siendo φ la ley de curvaturas debida a todas las acciones, incluso el par de momentos M_i.

Si el par de momentos M_i ha de anular el giro θ_i en la rótula i, la expresión [17.15] se transforma en

$$\int M_{Mi,i}\ \varphi\ d\ s = 0 \qquad [17.16]$$

Supongamos, como caso particular, que aplicamos en la rótula i un par de momentos unitarios $M_i = 1$. Este par de momentos ocasionará en la estructura isostática una ley de momento flectores $M_{1,i}$, debiendo cumplirse la proporcionalidad

$$M_{Mi,i} = M_i\ M_{1,i} \qquad [17.17]$$

con lo que [17.16] se puede escribir bajo la forma

$$\int M_{Mi,i}\ \varphi\ d\ s = M_i \int M_{1,i}\ \varphi\ d\ s = 0 \qquad [17.18]$$

y como $M_i \neq 0$, se obtiene la condición

$$\int M_{1,i}\ \varphi\ d\ s = 0 \qquad [17.19]$$

La curvatura φ, según [17.10] y llamando $\varphi_e = \varphi_{e1} + \varphi_{e2}$ a la componente lineal o elástica, puede escribirse

$$\varphi = \varphi_e + \varphi_p \qquad [17.20]$$

A su vez, para una rótula concreta k, φ_e puede ser descompuesta en

$$\varphi_e = \varphi_{ee} + \varphi_{eM_k} + \sum_{i=1}^{i=n\ (i\neq k)} \varphi_{eM_i} \qquad [17.21]$$

donde

φ_{ee} = curvatura elástica debida a las acciones exteriores actuando sobre la estructura isostática.

φ_{eM_k} = curvatura elástica debida al par de momentos M_k, aplicados en la rótula k, actuando sobre la estructura isostática.

$\sum_{i=1}^{i=n\ (i\neq k)} \varphi_{eM_i}$ = curvatura elástica debida a los pares de momentos M_i, aplicados en las n-1 rótulas distintas de la rótula k.

con lo que [17.19] puede expresarse para dicha rótula k en la forma

$$\int M_{1,k}\ \varphi_{ee}\ d\ s + \int M_{1,k}\ \varphi_{eM_k}\ d\ s + \int \sum_{i=1}^{i=n(i\neq k)} M_{1,k}\ \varphi_{eM_i}\ d\ s + \int M_{1,k}\ \varphi_p\ d\ s = 0 \qquad [17.22]$$

Adoptando inercias medias equivalentes para la zona de curvaturas elásticas, se tiene

$$\varphi_{ee} = \frac{M_e}{EI} \qquad [17.23]$$

siendo M_e la ley de momentos flectores debidos a las acciones exteriores actuando sobre la estructura isostática

$$\varphi_{eM_k} = \frac{M_{M_{k,k}}}{EI} \qquad [17.24]$$

$$\varphi_{eM_i} = \frac{M_{M_{i,i}}}{EI} \qquad [17.25]$$

y teniendo en cuenta [17.17]

$$\int \frac{M_{1k}\, M_e}{EI}\, d\,s + M_k \int \frac{M_{1,k}^2}{EI}\, d\,s + \sum_{i=1}^{i=n\ (i\neq k)} M_i \int \frac{M_{1,i}\, M_{1,k}}{EI}\, d\,s + \int M_{1,k}\, \varphi_p\, d\,s = 0 \qquad [17.26]$$

Conviene observar los dos aspectos siguientes:

- El sumando $\int M_{1,k}\, \varphi_p\, d\,s$ se extiende a todas las zonas con deformación plástica con independencia de que en ellas exista rótula o no.
- Si la estructura no presenta ninguna zona con deformación plástica, dicho sumando es nulo y [17.22] se transforma en el sistema correspondiente al cálculo lineal de las estructuras elásticas. (Método de MULLER-BRESLAU).

Al plantear [17.22] para cada una de las n rótulas, siendo n el grado de hiperestatismo de la estructura, se obtiene un sistema de n ecuaciones con n incógnitas M_1, M_2, ... M_n.

Como el término $\int M_{1,k}\, \varphi_p\, d\,s$, a través de φ_p depende de todos los valores M_1, M_2, ... M_n la complejidad matemática de la resolución del sistema es alta y, salvo para estructuras y estados de carga muy simples, la resolución resulta trabajosa incluso operando con ordenador.

El mismo BAKER (17.4) introdujo una simplificación interesante del sistema, basada en lo siguiente:

Si consideramos una zona plastificada (Fig. 17-22) distinta de la que contiene la rótula k, la distribución de Momentos $M_{1,k}$ será una lineal tal como la indicada en la figura 17-22a) y producirá una distribución de curvaturas tal como la indicada en la figura 17-22b), en la que se indican por separado las curvaturas elásticas y plásticas, siguiendo las elásticas una ley lineal y distribuyéndose las plásticas sobre una cierta longitud de plastificación L_p.

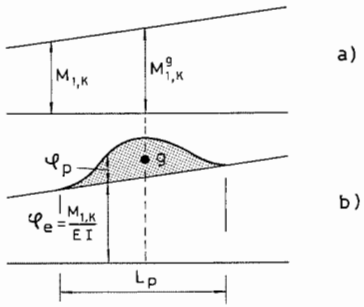


Figura 17-22

El último término de [17.22] puede escribirse en la forma

$$\int M_{1,k}\, \varphi_p\, d\,s = M_{1,k}^{g} \int \varphi_p\, d\,s \qquad [17.27]$$

El valor

$$M_{1,k}^{g} = \frac{\int M_{1,k}\, \varphi_p\, d\,s}{\int \varphi_p\, d\,s} \qquad [17.28]$$

es, por definición, la abscisa del centro de gravedad del área de curvaturas plásticas, que se indica con zona de puntos en la figura 17-22b).

El valor $\int \varphi_p\, d\,s$ es, por definición, la rotación de las secciones extremas de la longitud plastificada L_p, y podemos definirlo como

$$\psi_i = \int \varphi_p\, d\,s \qquad [17.29]$$

y [17.17] se transforma en

$$\int M_{1,k}\, \varphi_p\, d\,s = M_{1\,k}^{g}\, \psi_i \qquad [17.30]$$

Consideremos ahora la zona plastificada conteniendo la rótula k (Fig. 17-23).

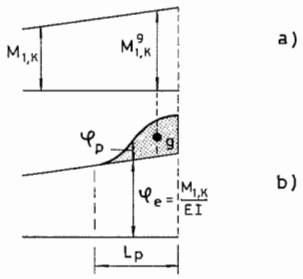


Figura 17-23

Análogamente, en este caso podemos escribir

$$\int M_{1,k}\, \varphi_p\, d\,s = 0_k \qquad [17.31]$$

y sustituyendo [17.25] y [17.28] en [17.22], se obtiene

$$\int \frac{M_{1k}\, M_e}{E\, I}\, d\, s + M_k \int \frac{M_{1,k}^2}{EI}\, d\, s + \sum_{i=1}^{i=n\ (i\neq k)} M_i \int \frac{M_{1,i}\, M_{1,k}}{EI}\, d\, s + \sum_{i=1}^{i=n\ (i=k)} M_{1,k}^{g}\, \psi_i + \theta_k = 0 \qquad [17.32]$$

(La sumatoria se extiende a todas las zonas plastificadas, tengan rótula o no, con excepción de la que contiene la rótula *k*).

El sistema [17.32], si se asocia a la simplificación adicional de suponer concentradas en un punto las rotaciones ocurridas a lo largo de la zona plástica L_p[1], permite una reducción considerable en la dificultad de resolución del sistema, aunque de todas formas, salvo para estructuras y casos de carga muy simples, sigue siendo imprescindible el ordenador.

17.5.1.1. Método de las rotaciones impuestas (Machi)

Una simplificación interesante a partir del Método General fue introducida por G. Machi en 1960 (17.7) y 1961 (17.8), bajo el nombre de "Método de las Rotaciones Impuestas"[2].

MACHI, a partir de la expresión del sistema general con las simplificaciones de BAKER, dada por [17.32], plantea por separado el sistema que proporciona los momentos debidos a las cargas exteriores

$$\int \frac{M_{1k}\, M_e}{EI}\, d\, s + M_k \int \frac{M_{1,k}^2}{EI}\, d\, s + \sum_{i=1}^{i=n\ (i\neq k)} M_i \int \frac{M_{1,i}\, M_{1,k}}{EI}\, d\, s + \int \frac{M_{1,i}\, M_{1,k}}{EI}\, d\, s = 0 \qquad [17.33]$$

y el que proporciona los momentos debidos a las rotaciones plásticas

$$M_k \int \frac{M_{1,k}^2}{EI}\, d\, s + \sum_{i=1}^{i=n\ (i\neq k)} M_i \int \frac{M_{1,i}\, M_{1,k}}{EI}\, d\, s + \sum_{i=1}^{i=n\ (1\neq k)} M_{1,k}^{s}\, \psi_i + \theta_k = 0 \qquad [17.34]$$

obteniendo por superposición los momentos totales.

El planteamiento se hace para cada rotación plástica, suponiendo nulas las demás. Recuérdese que, al aceptar que las rotaciones son plásticas, no producen momentos en la estructura transformada en isostática.

En definitiva, en el método se suponen nulas todas las rotaciones menos una, sucesivamente, y la no nula se comienza por suponerla igual a la unidad.

1 Este punto se expone en el Anejo nº1 del Tomo II.

2 El profesor G.MACHI ha realizado una labor muy extensa, tanto en la investigación como en la aplicación del cálculo no lineal. Una parte importante de este trabajo ha sido desarrollado en el seno del C.E.B.

En la práctica, resulta necesario proceder por iteración, de acuerdo con los pasos siguientes:

- Se acepta una distribución elástica de momentos (M_e) obtenida de acuerdo con el sistema [17.33].
- Para ese reparto se determinan los valores ψ, θ, de las rotaciones plásticas.
- Mediante [17.34] se obtiene el reparto de momentos debido a las rotaciones plásticas unitarias.
- Los nuevos valores de los momentos se obtienen a partir de

$$M = M_e + \sum_{i=1}^{i=n} \psi_i\, M_{\psi_i} + \sum_{i=1}^{i=n} \theta_i\, M_{\theta_i} \qquad [17.35]$$

- Con los nuevos valores de los momentos se procede por iteración.

El sistema ciertamente elimina muchas dificultades del método general, pero de nuevo, salvo para estructuras de muy escaso número de piezas, es muy trabajoso si no se emplea ordenador.

Una exposición completa del método ha sido hecha por el propio MACHI en la referencia (17.7) y en la (17.8)[1] que incluyen tablas para casos simples.

17.5.1.2. Método de las rotaciones últimas (BAKER)

El propio BAKER, además de su planteamiento general, propuso un método simplificado.(17.5).

Parte de adoptar las hipótesis siguientes:

- La capacidad portante de la estructura corresponde al caso en que se forma un número definido de rótulas perfectas y en una rótula se alcanza la rotación máxima θ_u.
- El diagrama Momentos-Curvatura es, por tanto, el de la figura 17-2.
- La estructura se arma de forma que las únicas zonas plásticas son las rótulas, es decir no hay zonas plásticas entre dos rótulas.

De acuerdo con lo anterior, en el sistema [17.32], se plantea la simplificación de que en las rótulas del sistema isostático no actúan las incógnitas M_i, sino los momentos M_{ui}, conocidos para cada rótula i. En definitiva en [17.32], para cada valor de *i*, $\psi_i = 0$.

El nuevo sistema, mucho más simple, es, por tanto

$$\int \frac{M_{1k}\, M_e}{EI}\, d\, s + M_k \int \frac{M_{1,k}^2}{EI}\, d\, s + \sum_{i=1}^{i=n\ (i\neq k)} M_i \int \frac{M_{1,i}\, M_{1,k}}{EI}\, d\, s + \theta_k = 0 \qquad [17.36]$$

con lo que la rotación plástica es la única incógnita de cada ecuación.

1 Ambas referencias corresponden al mismo texto.

Un inconveniente, en cambio, del sistema, es que para estructuras sometidas a sistemas diferentes de acciones independientes, caso frecuente, es necesario investigar el sistema de rótulas en cada caso, comprobando que *en ninguna rótula se ha rebasado el valor* θ_u, *pero que en todas* $\theta = 0$.

17.5.2. SOLUCIÓN MEDIANTE MÉTODOS DE CÁLCULO NUMÉRICO

Los métodos expuestos en 17.5.1 son, como ya dijimos, de muy trabajosa aplicación práctica, especialmente si la estructura presenta un número de piezas elevado. El cálculo numérico ofrece un camino que, con la ayuda del ordenador, resulta de más fácil aplicación.

Resumimos a continuación los aspectos esenciales. Véase para ampliación, por ejemplo, H. CORRES y J. LEON (17.9). El método parte de la discretización de la estructura (Fig. 17-24). Normalmente, cada pieza se discretiza en un número de elementos de 5 a 10, como máximo. Se parte de una definición completa de la estructura en geometría, materiales, armado y cargas; es decir, que se trata, de nuevo, de un método de comprobación y no de dimensionamiento. El arranque se hace a partir de unas rigideces estimadas, generalmente a partir del cálculo lineal.

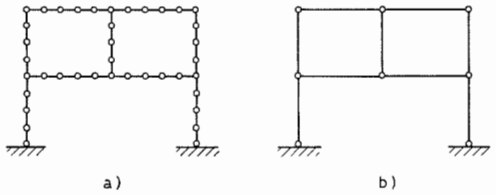


Figura 17-24

La figura 17-25 indica un diagrama de flujo de un método de este tipo (17.10) en el que se señala el proceso iterativo a seguir.

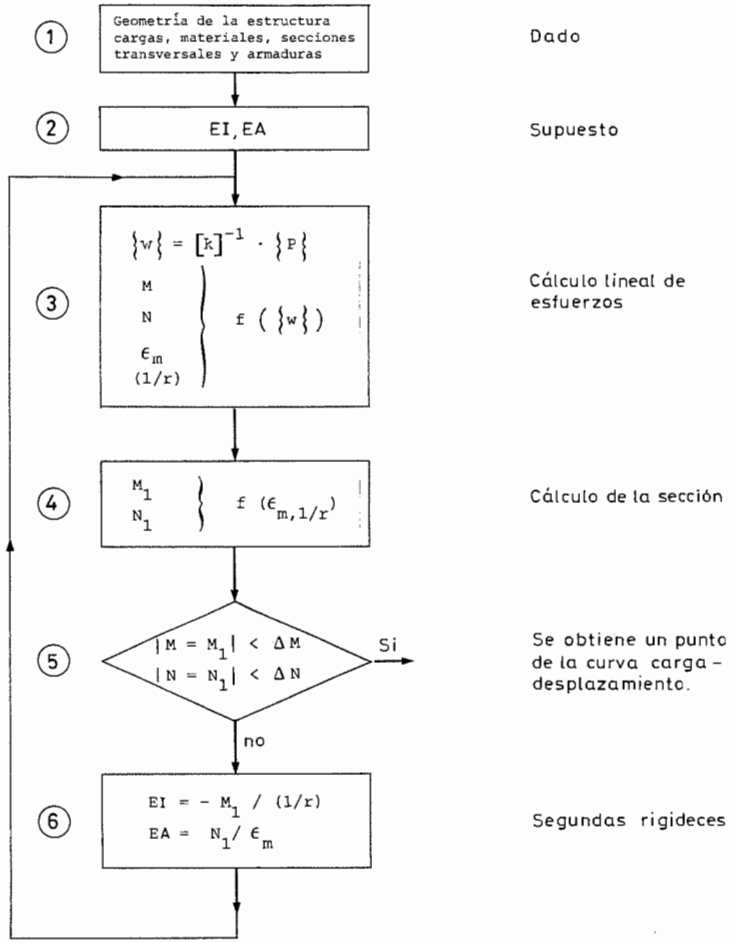


Figura 17-25

17.6 MÉTODOS BASADOS EN LA REDISTRIBUCIÓN A PARTIR DE LOS RESULTADOS DEL CÁLCULO LINEAL, PARA ELEMENTOS LINEALES DE HORMIGÓN ARMADO

Estos métodos están basados en la realización previa del cálculo lineal, permitiendo luego variar las leyes de momentos, manteniendo, por supuesto, el cumplimiento de las condiciones de equilibrio.

Existe un gran número de Normas Nacionales que, con variantes, a veces importantes, aceptan métodos de cálculo de este tipo. La razón es que tales métodos presentan por el momento la importante ventaja de disponer de sistemas de aplicación general para el cálculo de esfuerzos, tales como los que hemos visto en los Capítulos precedentes.

Por otra parte, un método de cálculo lineal, o próximo a él, asegura tensiones moderadas en el hormigón y el acero en las condiciones de servicio de la estructura y generalmente una fisuración reducida en condiciones de servicio.

17.6.1. MÉTODO DEL AMERICAN CONCRETE INSTITUTE (A.C.I.)

El Instituto Americano del Hormigón (17.11) permite que los momentos de dinteles continuos sobre sus soportes se aumenten o disminuyan en un tanto por ciento igual a

$$20\left(1 - \frac{\rho - \rho'}{\rho_c}\right) \qquad [17.37]$$

de su valor máximo, para cualquier combinación de carga.

En la fórmula [17.37], ρ es la cuantía geométrica de la armadura de tracción, ρ' la de compresión y ρ_c la cuantía crítica superior[1,2].

La variación permitida por [17.37] sólo puede ser utilizada si se cumple la condición

$$\frac{\rho - \rho'}{\rho_c} \leq 0{,}5 \qquad [17.38]$$

El método supone una posibilidad muy interesante de obtener estructuras más económicas y suficientemente seguras. Esto es así *no sólo por la reducción de momentos negativos que supone, sino porque también puede conducir a una reducción de los momentos máximos positivos en los vanos*. La economía obtenida es tanto más importante *cuanto más elevada es la relación de la sobrecarga a la carga permanente.*

Una segunda ventaja del método es que la reducción de los valores de los máximos momentos negativos de las vigas permite reducir armaduras precisamente en puntos que en las estructuras de edificación suelen presentar una gran densidad de armado.

Veamos a continuación, mediante un ejemplo concreto, algunas particularidades de aplicación del método.

Consideremos, a título de ejemplo, la viga continua de dos vanos de 6 m de luz que se indica en la figura 17-26. Supongamos que la carga permanente uniformemente repartida es de *10 kN/m* y la sobrecarga también uniformemente repartida de *10 kN/m*.

1 El concepto de cuantía crítica superior se explica en el Capítulo 35. Puede anticiparse ya que la pieza es tanto más dúctil cuanto más baja sea su cuantía.

2 Este método y, en general los métodos de redistribución, no deben aplicarse cuando los momentos se han obtenido por métodos aproximados.

En la figura se indican las distribuciones de momentos flectores correspondientes al cálculo lineal en las tres hipótesis de cargas que se señalan.

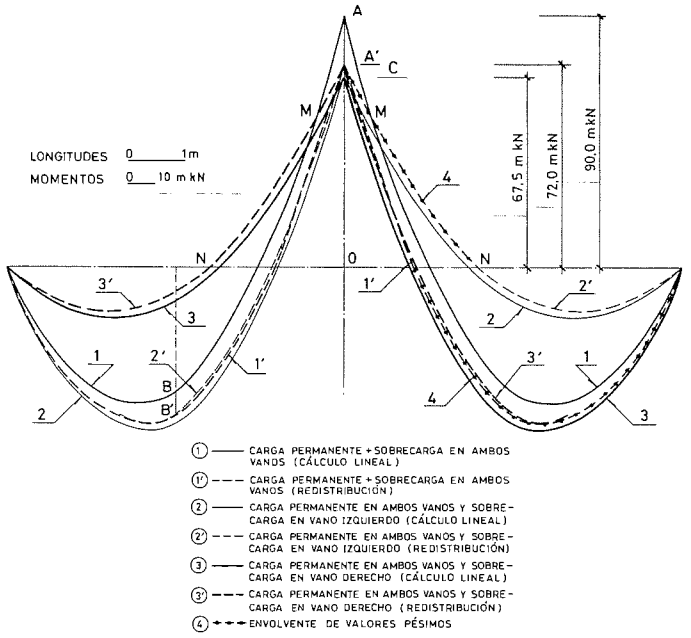


Figura 17-26

De acuerdo con ACI 318 podemos reducir, por ejemplo, el valor *OA* del máximo momento negativo en el apoyo intermedio. Supongamos, para simplificar, que la cuantía es despreciable, con lo cual [17.37] permite la reducción límite del 20%, que se ha indicado en la figura como curva 1' de trazo discontinuo. Es inmediato demostrar que en el punto medio de la luz, el momento positivo ha aumentado en una magnitud *BB'* igual a la mitad de *AA'*, es decir igual al 10% del máximo momento negativo.

Si no hiciéramos ninguna otra redistribución, habríamos conseguido una importante reducción del momento negativo, pero las curvas pésimas de momentos positivos seguirían siendo la 2, en el vano izquierdo, y la 3 en el vano derecho. Sin embargo, podemos obtener también una reducción en los momentos de vano, si, para las hipótesis de carga 2 y 3, *incrementamos* el valor del momento negativo.

De acuerdo con ACI 318, este incremento puede llegar hasta el 20% de su valor *OC*, correspondiente al cálculo lineal. Obsérvese que en nuestro caso un incremento tan alto no es económicamente interesante, ya que si bien levantaría mucho la ley de momentos positivos en los vanos, pasaría entonces a ser determinante la curva 1', es decir reduciríamos muy poco el momento en vano y aumentaríamos mucho, sobre el valor *OA'*, el momento en apoyo.

En nuestro caso la mejor solución se consigue con un incremento de *OC* tal que el momento en vano pase a ser sensiblemente el de la curva 1' y esto se consigue muy aproximadamente con un incremento igual a *CA'*, es decir del

$$\frac{0{,}8 \times 90 - 67{,}5}{67{,}5} \times 100 = 6{,}7\ \%$$

Con ello, la curva redistribuida de 2 es la 2' de la figura, que coincide prácticamente con 1'. Análogamente, la redistribuida de 3 es la 3'. En la parte derecha de la figura, se ha dibujado la envolvente de todas las hipótesis, que sería en definitiva la ley de momentos para el armado.

Como puede apreciarse:

- Se ha conseguido una reducción del 20% en el momento negativo máximo.
- Los momentos positivos no sólo no han aumentado con ello, sino que se han reducido ligeramente.
- En contrapartida, la zona de momentos negativos se ha ampliado ligeramente y, en algunas zonas (entre *M* y *N* en la figura), los valores han aumentado aunque en pequeña cantidad.

Es claro que la gran libertad que el método permite ha de manejarse en cada caso particular de acuerdo con las necesidades, buscando la solución que se estime como más conveniente desde los puntos de vista técnico y económico. Por ejemplo, en el caso analizado en la figura 17-26, hemos partido de conseguir la máxima reducción posible del momento negativo. Una menor reducción de este momento permitiría una mayor reducción de los máximos momentos positivos en vano. Desde el punto de vista técnico, lo usual es reducir los máximos momentos negativos, puesto que esto evita la excesiva congestión de armaduras en los apoyos y/o conduce a menores escuadrías. Sin embargo, no puede afirmarse con carácter general que esta solución sea la más económica de todas las posibles.

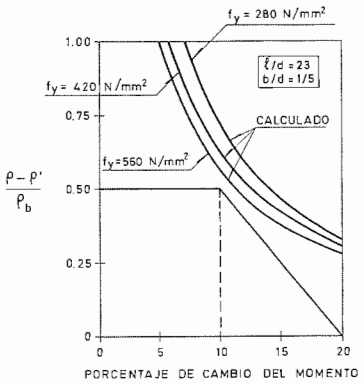


Figura 17-27

El propio Código ACI 318-95 en su comentario presenta la figura 17-27 en la que se pone en evidencia la prudencia de las limitaciones adoptadas por dicho Código, frente a los resultados de un cálculo más riguroso.

Debe en cambio llamarse la atención sobre el hecho de que, en general, los distintos métodos limitan la comprobación de ductilidad suficiente a la sección de momento máximo. *Esto debe considerarse con el necesario criterio, pues otras secciones de la pieza también sufren redistribuciones importantes y, por tanto, la disposición de armaduras, su corte y sus comprobaciones de adherencia y anclaje deben ser especialmente cuidadosas cuando se emplean estos métodos.*

17.6.2. MÉTODO DE LA INSTRUCCIÓN EHE

La citada Instrucción (17.12) trata el tema en su artículo 52.1, aceptando una redistribución máxima del 15% del máximo momento negativo en dinteles, imponiendo como condición de ductilidad suficiente

$$\frac{x}{d} \leq 0{,}45 \qquad [17.39]$$

donde los valores x y d corresponden a la profundidad de la fibra neutra y al canto útil (véase Capítulo 29) y se refieren a la sección de máximo momento flector negativo, **una vez redistribuido éste**.

Como puede apreciarse, las posibilidades de redistribución que permite la Instrucción EHE son reducidas.

17.6.3. MÉTODO DEL MODEL CODE CEB-FIP (MC-90)

Dicho documento (17.13) en su apartado 5.4.3 trata el tema bajo el epígrafe "Cálculo lineal seguido de redistribución limitada". El planteamiento es ligeramente distinto en su forma pero equivalente en el fondo al del A.C.I., pues también contempla exclusivamente la redistribución en vigas y permite "reducir los momentos en las secciones más solicitadas", lo que equivale a aumentar o disminuir los momentos negativos como hace el A.C.I.

Una primera diferencia importante surge en cambio en la expresión de la condición de ductilidad suficiente, ya que el MODEL CODE-90 la fija a través de la profundidad de la fibra neutra. Llamando δ al coeficiente reductor del momento en la sección más solicitada, se establecen las condiciones siguientes[1]:

En general, en vigas con directriz en un plano horizontal, se establecen las limitaciones siguientes:

Aceros tipos A y S de los indicados en 32.5.2.3

- Para hormigones H-12 a H-35

1 El MODEL CODE-90 impone, además de estas condiciones, otras respecto a rotaciones máximas (ver Anejo nº1) en función de la clasificación de aceros según su ductilidad. (Ver 32.5.2.3.).

$$\delta \geq 0{,}44 + 1{,}25\frac{x}{d} \qquad [17.40]$$

- Para hormigones H-40 a H-60

$$\delta \geq 0{,}56 + 1{,}25\frac{x}{d} \qquad [17.41]$$

(x es la profundidad de la fibra neutra en estado límite último después de redistribuido el momento y d el canto útil. Véanse los Capítulos 36 y 37).

Además debe cumplirse:

En vigas continuas y en pórticos intraslacionales

$$0{,}75 \leq \delta \leq 1 \qquad [17.42]$$

En pórticos traslacionales

$$0{,}90 \leq \delta \leq 1 \qquad [17.43]$$

Aceros tipo B de los indicados en 32.5.2.3

- Para hormigones H-12 a H-60

$$\delta \geq 0{,}75 + 1{,}25\frac{x}{d}$$

$$0{,}90 \leq \delta \leq 1{,}20$$

En el caso de pórticos traslacionales no puede admitirse redistribución si la esbeltez equivalente de los pilares supera el valor de 15 [1].

Una segunda diferencia, también importante, surge considerando las fórmulas [17.37] y [17.40], ya que para profundidades reducidas de fibra neutra (lo que equivale a cuantías ρ - ρ' bajas en el método del A.C.I.), el MODEL CODE permite reducir los momentos hasta un 30%. Es decir, el métodos del MODEL CODE, para los casos de vigas y pórticos intraslacionales, permite redistribuciones más acentuadas que el método del A.C.I.

1 El MC -90 define como esbeltez equivalente el $\lambda = \frac{\sqrt{\nu}}{1 + 15\,\rho}\,\lambda$ *donde:*

$\lambda = \frac{l}{i}$ es la esbeltez mecánica.

ρ = Cuantía geométrica de la armadura longitudinal

v =Esfuerzo axil relativo $\nu = \frac{N_d}{A_c}$ (Véase Capítulo 45)

Piezas pretensadas.El MODEL CODE-90 permite la redistribución en piezas pretensadas. Vale para ello lo dicho anteriormente considerando que, en el caso de las armaduras postesas, el acero se asimila al tipo *A* y en el de armaduras pretesas al tipo *B*.

17.6.4 MÉTODO DEL EUROCÓDIGO EC-2 (17.14)

Presenta algunas diferencias con el MC-90.

Para vigas continuas con relación de luces contiguas inferior a dos, dinteles de entramados intraslacionales y piezas sometidas predominantemente a flexión, permite redistribución sin comprobar la capacidad de rotación, si se cumple lo siguiente:

a) Para hormigones no superiores a H-35

$$\delta \geq 0{,}44 + 1{,}25\frac{x}{d} \qquad [17.44]$$

- Para hormigones superiores a H-35

$$\delta \geq 0{,}56 + 1{,}25\frac{x}{d} \qquad [17.45]$$

b) Para aceros de alta ductilidad[1]

$$\delta \geq 0{,}7 \qquad [17.46]$$

- Para aceros de ductilidad normal

$$\delta \geq 0{,}85 \qquad [17.47]$$

En lo anterior, δ, *x y d* tienen los mismos significados que en 17.6.3.

c) En general no se permite redistribución en entramados traslacionales.

Para la capacidad de redistribución, en particular en relación con el tipo de acero, véase la Tesis Doctoral de H. ORTEGA (17.20).

17.7 PROGRAMAS DE ORDENADOR PARA CÁLCULO NO LINEAL

No existen prácticamente programas comerciales de carácter general para el cálculo no lineal. Existen programas desarrollados por centros de investigación y organismos análogos, que cubren campos especiales. A título de ejemplo, la referencia (17.21) de CALAVERA y otros contiene un anejo de H. CORRES y J. LEON correspondiente a un programa de este tipo, utilizado en la Escuela Técnica Superior

1 Para la clasificación de aceros según el Eurocódigo EC-2, véase 32.5.2.3.

de Ingenieros de Caminos de Madrid para el programa de investigación de cálculo no lineal de forjados correspondiente a la referencia (17.21). A. MARI (17.26) ha desarrollado también programas de este tipo.

17.8 SITUACIÓN ACTUAL DE LA APLICABILIDAD PRÁCTICA DEL CÁLCULO NO LINEAL

Al enfocar este tema, deben considerarse con cuidado varios aspectos.

En primer lugar, los conceptos básicos del cálculo no lineal y, en general, del comportamiento plástico de las estructuras de hormigón y en especial de los procesos de redistribución de momentos, son de conocimiento esencial para quien haya de tratar con estas estructuras, con independencia de que aplique cálculo lineal o no lineal.

En segundo lugar, deben reconocerse las dificultades muy considerables que se presentan al abordar la realización práctica del cálculo no lineal. Enumeramos solamente algunas:

a) Nuestro conocimiento de los diagramas Axil-Momentos-Curvatura y Axil-Momentos-Rotaciones es todavía insuficiente, especialmente en zonas de las piezas cuyas fisuras no son ortogonales a la directriz de la pieza. La influencia del esfuerzo axil y del cortante acentúan esta insuficiencia de conocimiento.

b) El planteamiento general para estructuras con elevado número de piezas presenta grandes dificultades para su tratamiento informático. Aún con la simplificación de concentrar las rotaciones, las dificultades son considerables.

c) Los métodos habitualmente en uso, suponen que, dado un sistema de acciones actuando sobre la estructura, éstas crecen homotéticamente hacia el agotamiento, a través de un proceso generalizado de plastificación. Esto puede no ser así en la realidad, e incluso puede concebirse que una estructura se agote por un defecto local en una zona, que se plastificará, pero estando todo el resto de la estructura en régimen lineal.

d) Una cosa es el desarrollo de programas para la comprobación de una estructura de *pequeño número de piezas*, como es, por ejemplo, el caso de los estudios de patología, y otra el de programas para cálculo de estructuras en general.

e) Un aspecto esencial es la detallada consideración de los procesos de cálculo lineal y no lineal:

   - En el caso del cálculo lineal, a partir de las acciones, se realiza *un predimensionamiento de escuadrías* (véase el Capítulo 16) y con base en él se calculan los esfuerzos y, a partir de ellos, las armaduras.

   - El problema es muy diferente en el caso del cálculo no lineal, pues el predimensionamiento ha de abarcar no sólo las escuadrías de las piezas, sino incluir el armado de la estructura. Si los esfuerzos finales no se corresponden con las secciones y armaduras adoptadas, es necesario repetir el cálculo de nuevo[1].

1 Es notable el hecho de que siendo enorme el número de estudios publicados sobre el cálculo no lineal, sea en cambio reducidísimo el número de estudios sobre métodos de predimensionamiento para este tipo de cálculo.

   - Puede estimarse que el tiempo de ordenador necesario para el cálculo no lineal es, por lo menos, de cincuenta a cien veces superior al del cálculo lineal.

f) Están en cambio plenamente disponibles los métodos expuestos de redistribución limitada a partir del cálculo lineal, cuya aplicación es simple.

g) Indiscutiblemente, los avances de la propia investigación en hormigón armado, junto a los avances informáticos, permitirán que la aplicación práctica del cálculo no lineal vaya generalizándose de manera más efectiva en la práctica profesional, lo cual representará un mejor estudio de la seguridad, una mayor economía de la construcción y una apreciable simplificación constructiva. En España deben destacarse los trabajos de AGUADO DE CEA (17.22), CALAVERA, CORRES, FERNÁNDEZ GÓMEZ Y LEON (17.21), CAROL (17.23), CORRES (17.24), GONZÁLEZ VIDOSA (17.25), MARÍ (17.26) y (17.27), MURCIA (17.28), y SOSA y FERNÁNDEZ PRADA (17.29). Un estudio interesante sobre la comparación de los métodos de redistribución ha sido realizado en Francia por THONIER (17.30). Véase también FUENTES (17.31).

BIBLIOGRAFÍA

(17.1) ARENAS DE PABLO, J.J. "Cálculo de soportes de hormigón armado en teoría de segundo orden". Editores Técnicos Asociados. Barcelona, 1980.

(17.2) CALAVERA, J. "Nota interna sobre grado de redistribución". Distribuida en la Comisión VII "Reinforcement, technology and quality control". C.E.B., Palma de Mallorca, Septiembre 1992.

(17.3) COMITE EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON (C.E.B.). Bulletin d'Information nº 21. Enero 1960. Commission "Hyperestatique". París, 1960.

(17.4) COMITE EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON (C.E.B.). Bulletin d'Information nº 30. Enero 1961. Commission "Hyperestatique". París, 1961.

(17.5) BAKER, A.L.L. " Note for Discussion at Monaco". Bulletin d'Information du C.E.B. nº 30. Enero 1961, pp. 1 a 20.

(17.6) TICHY, M.; RAKOSNIK, J. "Calcul Plastique des Ossatures en Béton". Eyrolles. París, 1975.

(17.7) MACHI, G. "Calcul des Structures Hyperestatiques par la Méthode des Rotations Imposées". Annexes aux Recommandations Internationales pour le Calcul et l'Execution des Ouvrages en Béton. Tomo 3. C.E.B. 1972.

(17.8) MACHI, G. "Méthode des rotations imposées. Exposé de la méthode et example de calcul". C.E.B. International Course on Structural Concrete. Lisboa, Portugal, 1973.

(17.9) CORRES, H.; LEON, J. "Non linear analysis of reinforced concrete structures". Proceeding of the Second International Conference on Civil and Structural Engineering Computing. London, 1985.

(17.10) "CEB-FIP Manual of Buckling and Instability". The Construction Press, 1978.

(17.11) BUILDING CODE REQUIREMENTS FOR REINFORCED CONCRETE (ACI 318-95). American Concrete Institute. Detroit, 1995.

(17.12) "INSTRUCCIÓN DE HORMIGÓN ESTRUCTURAL, EHE". Ministerio de Fomento. Madrid, 1998.

(17.13) CEB-FIP MODEL CODE 1990. C.E.B. Bulletins d'Information Nos. 195 y 196. Marzo, 1990.

(17.14) EUROCÓDIGO Nº 2 "Design of Concrete Structures, Part 1: General Rules and Rules for Buildings". Commission of the European Committees. Diciembre 1989.

(17.15) BAKER, A.L.L. "The Ultimate-Load Theory Applied to the Design of Reinforced and Prestressed Concrete Frames". Concrete Publications Ltd. Londres, 1956.

(17.16) BAKER, A.L.L. "Ultimate Load Design of Reinforced and Prestressed Concrete Frames". Proceedings of a Symposium on the Strength of Concrete Structures. C.A.C.A. Londres, 1956.

(17.17) MASSONNET, C.; SAVE, N. "Calcul plastique des constructions". 3ª Edición. Editions Nelissen. Lieja.

(17.18) MATTOCK, A.H. "Redistributions of Design Bending Moments in Reinforced Concrete Continuous Beams". Proceedings of the Institution of Civil Engineers, 1959.

(17.19) MOY, S.S.J. "Plastic methods for steel and concrete structures". The McMillan Press Ltd. Hong-Kong, 1981.

(17.20) ORTEGA VALENCIA, H. "Estudio experimental de la influencia del tipo de acero en la capacidad de redistribución en losas de hormigón armado". Tesis Doctoral en la Escuela de Ingenieros de Caminos de Madrid, bajo la dirección de J. CALAVERA. Madrid, 1998.

(17.21) CALAVERA, J.; CORRES, H.; FERNÁNDEZ GÓMEZ, J.A.; LEON, J. "Comportamiento hasta rotura de forjados isostáticos e hiperestáticos". Instituto de la Construcción y del Cemento "Eduardo Torroja". Monografía nº 396. Abril 1989.

(17.22) AGUADO DE CEA, A. "Estudio del análisis no lineal de estructuras de hormigón mediante superposición de problemas lineales de deformaciones". Informes de la Construcción nº 338. Marzo 1982.

(17.23) CARRASCO ORTIZ, S.; MARÍ BERNAT, A.; CAROL VILARASAU, I. "Análisis no lineal en el tiempo de estructuras de hormigón armado y pretensado formadas por barras rectas o curvas en el espacio". Jornadas sobre Estructuras y Materiales, Volumen III. Mayo 1988.

(17.24) CORRES, H.; MORAN, F. "Design of slender reinforced concrete colums". IABSE Proceedings P-59/83.

(17.25) GONZALEZ VIDOSA, F.; KOTSOVOS, M.D.; PAULOVIC, M.N. "Symmetrical punching of reinforced concrete slabs: an analytical investigation based on nonlinear finite element modeling". ACI Structural Journal. Vol. 85. May-Jun. 1988.

(17.26) MARÍ, A. "Ductilidad seccional y redistribución de esfuerzos en estructuras hiperestáticas de hormigón armado y pretensado". Hormigón y Acero nº 163. 2º trimestre 1987.

(17.27) MARÍ, A. "Cuantías de armadura y redistribución de esfuerzos en elementos a flexión de hormigón armado y pretensado". E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Universidad Politécnica de Catalunya. Enero 1987.

(17.28) MURCIA, J. "Reflexiones sobre las bases del análisis de estructuras". Revista de Obras Públicas. Febrero-Marzo, 1980.

(17.29) SOSA, P.M.; FERNÁNDEZ PRADA, M.A. "Un modelo por el M.E.F. con fisuración discreta para el análisis de estructuras de hormigón". Hormigón y Acero nº 167. 2º trimestre, 1988.

(17.30) THONIER, H. "La redistribution des moments d'une poutre continue en béton armé". Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics. Annales nº 402. Fevrier 1982.

(17.31) FUENTES, A. "Comportement post-élastique des structures en béton armé". Eyrolles. París, 1988.

(17.32) CEB BULLETIN Nº 134 "Non linear analysis of concrete structures". Abril 1979.

(17.33) CEB BULLETIN Nº 153 "Structural Analysis". Abril 1982.

CAPÍTULO 18

CÁLCULO DE ESFUERZOS EN FORJADOS UNIDIRECCIONALES[1]

18.1 GENERALIDADES

Básicamente los métodos de cálculo de esfuerzos en forjados pueden clasificarse en dos grupos:

a) Métodos basados en el cálculo lineal. (A veces llamados métodos clásicos o métodos elásticos).

b) Métodos basados en el cálculo no lineal.

A continuación se exponen ambos métodos, aunque debemos señalar de antemano que en general los métodos del tipo b) resultan preferibles tanto por la mayor sencillez de los cálculos como por su mayor concordancia con la realidad estructural de los forjados en la mayoría de los casos.

18.2 COMBINACIONES DE ACCIONES

En general, el cálculo de un forjado requiere considerar tres hipótesis cuando las desigualdades de luces y la relación q/g de sobrecarga de uso a carga permanente son importantes[2]. (Fig. 18-1).

---

1 El contenido de este Capítulo es un resumen de los aspectos esenciales de mi libro "Cálculo, Construcción y Patología de Forjados de Edificación" (18.1)

2 Para los métodos basados en el cálculo lineal es igual operar con las cargas reales o con cargas unidad en vanos pares y en vanos impares (dos cálculos solamente)operando luego por suma y proporcionalidad para tener las tres hipótesis.Para los métodos basados en el cálculo no lineal de la Instruccón BAEL-83 (18.2) las hipótesis tienen que ser fisicamente existentes, o sea, las a) b) y c) de la figura 18.1 (tres cálculos)

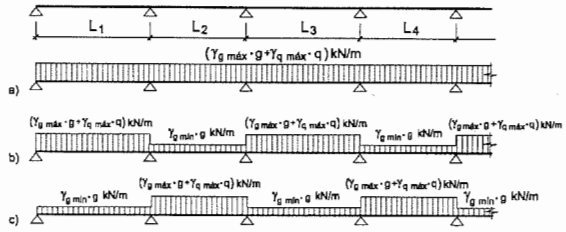


Figura 18-1

18.3 MÉTODOS BASADOS EN EL CÁLCULO LINEAL

El problema puede ser resuelto por cualquiera de los métodos clásicos. (Cross, ecuación de los tres momentos, etc.).

18.3.1 CASO DE VANOS DE LUCES IGUALES

Las tablas GT-5 a GT-8 resuelven directamente todos los casos para cualquier relación $\frac{q}{g}$ [1] (18.5).

18.3.2 MÉTODO DE CROSS PARA FORJADOS DE SECCIÓN CONSTANTE CON EXTREMOS EXTERIORES SIMPLEMENTE APOYADOS[2]

En ocasiones se usan macizados en los apoyos que hacen que la sección no sea constante. El método general de cálculo es idéntico al correspondiente a 18.3.2 con las dos variaciones siguientes:

a) Las rigideces se obtienen en los gráficos GT-9 y GT-10. Los factores de transmisión en GT-11 y los momentos de empotramiento en GT-12 y GT-13 (18.6).

b) No puede utilizarse ahora la simplificación de tomar en vanos extremos rigidez $\frac{3}{4}$ de la real, sino la que resulte de los gráficos. Los nudos extremos se incluyen en el cálculo, disponiendo la casilla correspondiente y adoptando como coeficiente de reparto $\frac{k}{\Sigma k} = 1$, con lo que se van anulando siempre los momentos como corresponde a simple apoyo.

1 Para momentos extremos véase 18.3.4, como solución alternativa.

2 Respecto a apoyos extremos cuando no son simplemente apoyados, véase 18.3.4

c) En los ciclos de transmisión, no se transmite ya la mitad del momento, sino el producto de éste por β_{df} ó β_{fd} según se trate de transmisión del dorsal al frontal o viceversa. Los valores de β_{df} ó β_{fd} se obtienen del gráfico GT-11.

En los cálculos anteriores se han supuesto dos cuestiones:

a) Que los apoyos interiores constituyen apoyos continuos perfectos. En la práctica, los forjados se construyen solidarios con las vigas y la rigidez a torsión de éstas ofrece una cierta resistencia al giro. La ignorancia en este caso de la rigidez a torsión está del lado de la seguridad.

b) Que los apoyos extremos son simples apoyos. Salvo en casos en que realmente se materialice un simple apoyo, casi siempre los forjados se construyen unidos monolíticamente a vigas de borde.

Las tres hipótesis de cálculo son:

a) Carga permanente mayorada por $\gamma_{g,máx}$ más sobrecarga mayorada por $\gamma_{q,máx}$ en todos los vanos.

b) Carga permanente mayorada por $\gamma_{g,máx}$ más sobrecarga en vanos impares mayorada por $\gamma_{q,máx}$ y carga permanente mayorada por $\gamma_{g,mín}$ en vanos pares.

c) Carga permanente mayorada por $\gamma_{g,máx}$ más sobrecarga mayorada por $\gamma_{q,máx}$ en vanos pares y carga permanente mayorada por $\gamma_{g,mín}$ en vanos impares.

Con estos tres cálculos se obtienen las hipótesis pésimas:

a) Proporciona los máximos momentos en apoyos.

b) Proporciona los máximos momentos de vano en vanos impares.

c) Proporciona los máximos momentos de vano en vanos pares.

Obsérvese que se da por supuesto que los vanos se han de cargar o descargar completamente. En España en estos momentos no existe una normalización específica que autorice esto, pero es una práctica común y suficientemente segura[1].

En la práctica es posible mediante tablas simplificar considerablemente el cálculo, como veremos en los puntos siguientes.

En lo anterior se ha supuesto que los apoyos extremos son articulaciones o apoyos deslizantes. En la práctica el forjado suele ser solidario con la viga o elemento de borde. Por lo tanto, la rigidez a torsión de la viga producirá un momento de empotramiento en el forjado. El análisis teórico de tal momento es al mismo tiempo complejo (varía a lo largo de la luz de la viga de borde) y altamente discutible dado el estado actual de conocimientos sobre deformaciones por flexión y sobre todo por torsión, del hormigón.

Las Instrucciones EHE y EF han adoptado un criterio práctico simplificado que consiste en calcular el forjado suponiendo que el apoyo es un simple apoyo, y después dimensionar el forjado para un momento negativo de apoyo igual en valor absoluto al

1 Por ejemplo, en una sección de una pieza simplemente apoyada, el esfuerzo cortante pésimo se produce cuando se aplica la carga desde la seción considerada hasta el apoyo más alejado, y no cuando se aplica la carga a todo el vano. Véase el Capítulo 9.

25% del positivo de vano obtenido en la hipótesis de simple apoyo. El método es suficientemente seguro y parte naturalmente de consideraciones de readaptación plástica.

18.3.3 MÉTODO SIMPLIFICADO DEL AMERICAN CONCRETE INSTITUTE (ACI) PARA FORJADOS CONTINUOS CUYAS LUCES NO DIFIEREN EN MÁS DEL 20%

El ACI (18.7) incluye en su Norma el siguiente método para el cálculo de esfuerzo de vigas o losas continuas:

- El método es válido para forjados con dos vanos como mínimo.
- De cada dos luces adyacentes la mayor no excede a la menor en más del 20%.
- Las cargas son uniformemente distribuidas.
- La sobrecarga viva es inferior a tres veces la carga permanente.

Cumplidas las anteriores condiciones, los momentos flectores se indican en la figura 18-2.

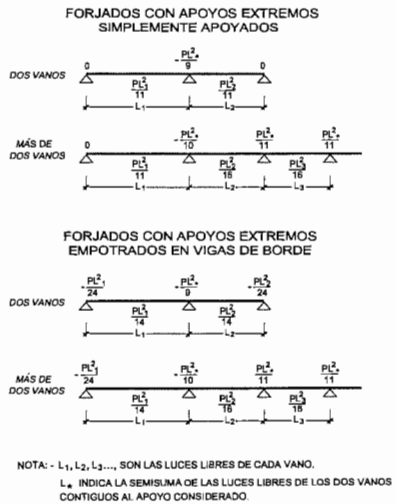


Figura 18-2

NOTA. L_1, L_2, L_3 ..., son las luces libres de cada vano.

L_* indica la semisuma de las luces libres de los dos vanos contiguos al apoyo considerado.

Para los esfuerzos cortantes se adoptarán los isostáticos excepto en el apoyo interior de los vanos extremos en los que se tomará 1,15 veces el isostático.

18.4 MÉTODOS BASADOS EN LA READAPTACIÓN PLÁSTICA

Los esfuerzos en las distintas secciones de forjados continuos, por las propias características reológicas del hormigón y por la influencia de la fisuración, se distribuyen de forma notablemente distinta de la obtenida por los métodos de cálculo vistos en 18.3, de acuerdo con lo discutido en el Capítulo 17.

En definitiva, en forjados hiperestáticos, los diagramas de esfuerzos a cubrir mediante la capacidad resistente aportada por el conjunto hormigón-armadura, pueden ser muy diferentes, siendo todos resistentemente y funcionalmente válidos, si la fisuración que aparece para la distribución de esfuerzos elegida no es perjudicial para la durabilidad del forjado ni para el comportamiento de los revestimientos.

En el caso particular de los forjados, la Instrucción EF permite una redistribución mayor, consistente en reducir, como máximo, el valor del momento de apoyo hasta igualarlo al de vano. La Instrucción francesa BAEL-83 trata también el asunto, con mayor amplitud. Todo ello se resume a continuación. Comenzaremos por el método previsto en BAEL-83.

18.4.1 MÉTODO DE LA INSTRUCCIÓN BAEL-83 PARA FORJADOS CON SOBRECARGA MODERADA Y LUCES DE VANOS CONSECUTIVOS COMPRENDIDAS ENTRE 0,80 Y 1,25 VECES LA DEL VANO CONSIDERADO

La Instrucción francesa BAEL-83 desarrolla un método simplificado de cálculo, aplicable a los forjados en los que se cumplen las condiciones siguientes:

a) Las sobrecargas no son superiores a dos veces la carga permanente ni a 5 kN/m^2. Esta condición la cumplen todos los forjados de viviendas, la gran mayoría de los de oficinas y edificios públicos y muchos forjados de edificios industriales.

b) Las cargas localizadas aplicadas a un elemento cualquiera del forjado y generalmente asimiladas a cargas repartidas, no deben ser superiores ni a 2 kN ni al cuarto de la sobrecarga total aplicable al elemento.

c) Los momentos de inercia de las secciones transversales son los mismos en todos los vanos.

d) Las luces consecutivas están en una relación comprendida entre 0,80 y 1,25.

e) La fisuración no se considera como perjudicial ni para el comportamiento del hormigón ni para el de sus revestimientos.

El cálculo es muy simple y acepta que, con las condiciones impuestas, no es necesario considerar cargas y descargas de vano. Se desarrolla de acuerdo con lo que sigue:

Momentos flectores. El cálculo de los momentos flectores a lo largo de cada vano se basa en elegir a voluntad, dentro de unos valores límites que expondremos a continuación, los momentos flectores en apoyos y vanos de forma que cumplan la relación (Fig. 18-3) $MN + CD = (1+0{,}30\alpha)\, M_o$, o sea

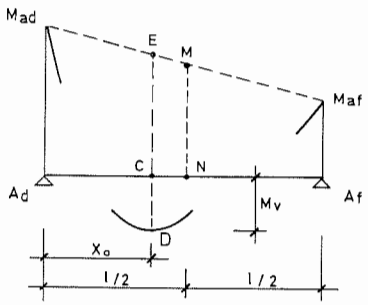


Figura 18-3

$$M_V + \frac{|M_{ad}| + |M_{af}|}{2} \geq (1+0{,}3\alpha)\, M_o \geq 1{,}05\, M_o \qquad [18.1]$$

donde:

M_{ad} = Momento flector en el apoyo dorsal.

M_{af} = Momento flector en el apoyo frontal.

M_v = Momento flector máximo de vano, que se considera producido en la abscisa x_o correspondiente al máximo momento de vano de la ley de momentos correspondiente a la línea de cierre debida a los momentos M_{ad}, M_{af}.[1]

M_o = Máximo momento flector producido por las cargas sobre el vano considerado como isostático.

α = Relación del valor de la sobrecarga al de la carga total.

Llamando K_{ad}, K_{af}, K_v los coeficientes que multiplicados por M_o, nos dan los momentos flectores, la expresión [18.1] expresada como igualdad se transforma en

$$K_v - \frac{K_{ad} + K_{af}}{2} = (1+0{,}3\alpha) \qquad [18.2]$$

La expresión [18.2] está tabulada, para diversos valores de la relación en los gráficos GT-14 a GT-18.

Los valores de los momentos en apoyo (en valor absoluto) no han de ser menores que:

0,60 M_o en el apoyo central de forjados de dos vanos.

0,50 M_o en el apoyo siguiente al extremo de forjados de más de dos vanos.

0,40 M_o en los apoyos internos (ni extremos, ni contiguos a ellos) de forjados de más de dos vanos.

1 Obsérvese que M_{ad}, M_{af} y M_v no son momentos correspondientes a una misma ley debida a un estado real de carga, sino que el valor M_v está incrementado respecto al real.La Norma BAEL-83 no especifica exactamente que el valor M_v ocurre en la abcisa x_o. Su antecedente, la Norma BA-68 e incluso la BA-60 eran más claras a este respecto.

En los apoyos extremos, salvo que se materialice realmente una articulación en cuyo caso el momento sería nulo, se cubrirá como mínimo un momento igual a 0,15 M_o, calculando, sin embargo, el de vano como si el apoyo extremo fuera articulación.

Los valores de los momentos en vano no han de ser menores que:

$$\frac{1{,}2 + 0{,}3\alpha}{2}\, M_0 \quad \text{en vanos extremos}$$

$$\frac{1 + 0{,}3\alpha}{2}\, M_0 \quad \text{en vanos interiores}$$

Esfuerzos cortantes. Los esfuerzos cortantes se calculan teniendo en cuenta el efecto hiperestático.

Proceso de cálculo mediante las tablas GT-14 a GT-18. Lo expuesto permite el cálculo directo e inmediato de cualquier forjado, mediante las tablas. Éstas proporcionan, para cualquier tipo de vano (extremo o interior), los tres coeficientes K_{ad}, K_v y K_{af} que, multiplicados por $M_0 = \frac{1}{8}(g+q)\ell^2$, proporcionan los valores M_{ad}, M_v, M_{af} de los momentos en apoyos y máximo en vano (fig. 18-3).

La tabla contiene valores de K_{ad} (apoyo que puede ser extremo o interior, mientras que el K_{af} es siempre interior) que van de 0 a 1, variando de 0,05 en 0,05.

El cálculo se realiza de la siguiente forma considerando el forjado de izquierda o derecha:

- Se fija el valor del momento en el apoyo extremo en función de las características de rigidez del elemento de borde. Se pueden dar dos situaciones:
  - Que realmente se materialice una articulación, en cuyo caso $K_{ad} = 0$.
  - Que se trate de un empotramiento elástico en elemento de borde. En este caso recomendamos tomar como valor de K_{ad} el de 0,15[1].
- A continuación y en el vano extremo, se fija el valor de K_{af} para el apoyo siguiente al extremo entre las distintas posibilidades existentes para el valor adoptado de K_{ad}. La elección debe hacerse en cada caso a la vista del grado de plastificación que se desee y sobre todo de las respectivas capacidades a flexión del forjado para momentos positivos y negativos[2].

Recuérdese que el valor adoptado para K_{af} no debe ser inferior a 0,60 si se trata de un forjado de dos vanos y a 0,50 si es de tres o más vanos.

1 BAEL-83 no indica nada a este respecto.

2 En general, para la mayoría de los forjados la capacidad a flexión para momentos de vano es mucho mayor que para momentos de apoyo, por lo que suele interesar reducir al máximo los momentos de apoyo.

- En el segundo vano[1] se eligen los valores K_{ad}, K_{af}, de acuerdo con las consideraciones de grado de plastificación y características del forjado que se adopten, recordando que K_{ad} no puede ser inferior a 0,5 ni K_{af} inferior a 0,4.
- Para los vanos interiores, se eligen análogamente los valores K_{ad}, K_{af}, de acuerdo con las consideraciones anteriormente expuestas, recordando que K_{ad} y K_{af} no pueden ser inferiores a 0,40.
- Para los momentos de vano se toman los valores de K en los apoyos extremos y en el caso de apoyo interior el mayor de los dos valores K_{ad}, K_{af}, correspondientes a los dos vanos contiguos a ese apoyo. En este caso si el momento en ese apoyo considerado como el vano adyacente es mayor que el correspondiente al vano considerado, se halla el coeficiente ficticio K' que, aplicado al valor M_o del vano que se esté considerando, iguale al momento de empotramiento correspondiente al vano adyacente. Con los valores de K ó (K') en los extremos, las tablas GT-14 a GT-18 nos proporcionan el valor de

  K_v que, de todas formas, no deberá ser inferior a $\frac{1,2 + 0,3\alpha}{2}$ en vano extremo ni a $\frac{1 + 0,3\alpha}{2}$ en vano interior. (Esto ya está considerado en las tablas)
- En el caso particular de existir voladizos, el método expuesto puede no ser válido y, por tanto, debe aplicarse el que se expone más adelante.

Es importante, para completar el método, poder calcular los puntos de momentos nulos y los de corte de barras. Para ello consideremos la figura 18-4.

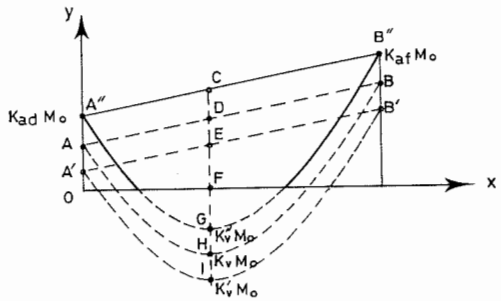


Figura 18-4

Consideremos la ley de momentos debida a la ley isostática $M_0 = \frac{1}{8} p\ell^2$ con los momentos de empotramiento $-K_{ad}\ M_0$ y $K_{af} M_0$.[2] (Curva A"GB" de la figura).

1 Empleamos la denominación de vano extremo, para el primero a partir del apoyo extremo, segundo vano para el siguiente y vano interior para los que no están en ninguna de las dos situaciones anteriores.

2 En el extremo dorsal, el momento de empotramiento (acción del nudo sobre el extremo de la pieza) es el signo contrario al flector, mientras que en el frontal ambos coinciden en valor y signo.

$$M = \frac{pl}{2}x - \frac{px^2}{2} + K_{ad}\frac{1}{8}p\ell^2\left(\frac{\ell - x}{\ell}\right) + K_{af}\frac{1}{8}p\ell^2\frac{x}{\ell}$$

y haciendo $\frac{dM}{dx} = 0$

$$\frac{x_m}{\ell} = \frac{1}{2} + \frac{K_{af} - K_{ad}}{8} \qquad [18.3]$$

El valor de K_v, elegidos los de K_{ad} y K_{af}, viene proporcionado por la fórmula [18.2] o por los gráficos GT-14 a GT-18.

Debe tenerse en cuenta, sin embargo, que de acuerdo con lo explicado, si el valor de K_v, resulta inferior a $K'_v = \frac{1,2 + 0,3\alpha}{2}$ en vano extremo o $K'_v = \frac{1 + 0,3\alpha}{2}$ en vano interior, se tomarán estos valores como correspondientes a K_v, con lo cual (fig. 18-4), el valor del momento en vano sería $K'_v M_0$.

Si rige K_v, la curva de momentos en vano es la *AHB*, siendo:

$$DH = CG = \left[1 - \frac{(K_{af} - K_{ad})^2}{16}\right] M_0 \ ^1$$

y

$$GH = K_v M_0 + FC - CG = \left[0,3\alpha - \frac{(K_{af} - K_{ad})^2}{16}\right] M_0 = \lambda M_0 \qquad [18.4]$$

La curva de momentos de vano es, por tanto, la trasladada verticalmente $-\lambda M_0$ a partir de *A"GB"*, donde

$$\lambda = 0,3\alpha - \frac{(K_{af} - K_{ad})^2}{16} \qquad [18.5]$$

Si rigen los valores mínimos en vano, K'_v, la curva de momentos de vano es la *A'IB'*, obtenida a partir de la *A"GB"* mediante una traslación vertical.

$$-\delta M_0 = -(K'_v - K_v + \lambda) M_0 \qquad [18.6]$$

1 Esta expresión es de obtención inmediata a partir del valor de $\frac{x_m}{\ell}$ dado por [18.3], sustituyendo en la ecuación de momentos para hallar *FG* y añadiendo el valor absoluto de *CF*, calculado a partir de $K_{ad} M_0$ y $K_{af} M_0$.

Si no rige el momento de vano correspondiente a K'_v, resulta $\delta = \lambda$, es decir las curvas *AHB* y *A'IB'* coinciden.

Para el caso de vano extremo, deberemos trasladar la curva, de acuerdo con [18.5] ó [18.6], una magnitud $-\lambda M_0$ ó $-\delta M_0$, según corresponda. Esto conduciría a adoptar, para ley de momentos en vano, un momento positivo dorsal *m* de valor $-\lambda M_0$ ó $-\delta M_0$, si el empotramiento en ese apoyo es nulo, lo cual conduce a la curva *BGD* de la figura 18-5, que es evidentemente muy pesimista. En lo que sigue, adoptaremos como curva de momentos para corte de barras y efectos análogos, la correspondiente a una traslación $-\lambda M_0$ ó $-\delta M_0$ *pero si esta traslación resulta en el apoyo extremo superior al valor del momento, es decir superior a 0,15* M_0, *consideraremos en dicho apoyo* $K_{ad} = 0$, adoptando en definitiva en ese caso la curva *AFD* para los momentos de vano[1].

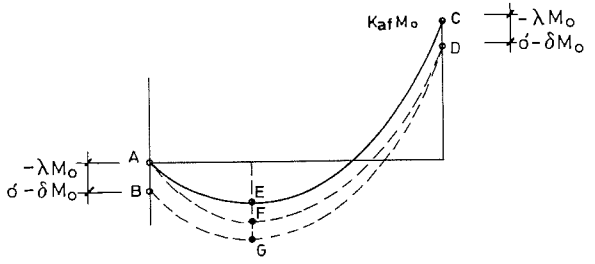
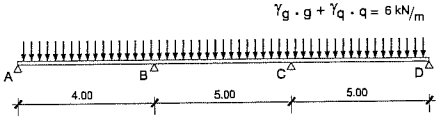


Figura 18-5

18.4.1.1 Caso en que no existen voladizos

A continuación se realiza un ejemplo que se indica en la figura 18-6. Se supone viga de borde en los apoyos extremos y suponemos también que se desea reducir tanto como sea posible los momentos de apoyo. La relación $\alpha = \frac{g}{p}$ vale 0,5.



MOMENTOS ISOSTÁTICOS		12,00			18,75			18,75		
VALORES PRIMARIOS	K	0	0,90	-0,50	-0,50	0,65	-0,50	-0,50	0,90	0
	M_d	0	10,80	-6,00	-9,38	12,18	-9,38	-9,38	18,88	0
VALORES DEFINITIVOS DE CÁLCULO	K	-0,15	0,78	-0,78	-0,50	0,65	-0,50	-0,50	0,90	-0,15
	M_d	1,80	9,36	-9,38	-9,38	12,18	-9,38	-9,38	16,88	-4,36
COMBINACIONES DE K PARA CORTE DE BARRAS	MOMENTOS DE APOYO	-0,15	—	-0,78	-0,50	0,65	-0,50	-0,50	—	-0,15
	MOMENTOS DE VANO	0	—	-0,59	-0,35	0,65	-0,35	-0,33	—	0

Figura 18-6

1 Recuérdese que, de todas formas, el momento a considerar para el dimensionamiento de la pieza es el correspondiente al punto *G* de la figura 18-5.

Los momentos primarios son:

Vano *AB*:
$$M_0 = \frac{1}{8} 4^2 \cdot 6 = 12{,}00\ m\ kN$$
$$M_{ad} = 0$$
$$M_{af} = -0{,}50 \cdot 12{,}00 = -6{,}00\ m\ kN$$
$$M_v = 0{,}90 \cdot 12{,}00 = 10{,}80\ m\ kN$$

Vano *BC*:
$$M_0 = \frac{1}{8} 5^2 \cdot 6 = 18{,}75\ m\ kN$$
$$M_{ad} = -0{,}50 \cdot 18{,}75 = -9{,}38\ m\ kN$$
$$M_{af} = -0{,}50 \cdot 18{,}75 = -9{,}38\ m\ kN$$
$$M_v = 0{,}65 \cdot 18{,}75 = 12{,}18\ m\ kN$$

Vano *CD*:
$$M_0 = \frac{1}{8} 5^2 \cdot 6{,}00 = 18{,}75\ m\ kN$$
$$M_{ad} = -0{,}5 \cdot 18{,}75 = -9{,}38\ m\ k\ N$$
$$M_{af} = 0$$
$$M_v = 0{,}90 \cdot 18{,}75 = 16{,}88\ m\ kN$$

Todos estos valores se anotan como se indica en la figura 18-6. Como puede verse, en el apoyo *B* el momento del vano *BC* es mayor que el correspondiente a *AB*, y por tanto, es necesario calcular el valor:

$$K'_{af}\ 12{,}00 = -0{,}5 \cdot 18{,}75 = -9{,}38$$
$$K'_{af} = -0{,}78$$

y entrando en la tabla para el vano *AB* con $K_{ad} = 0$, $K_{af} = -0{,}78$, el valor más desfavorable es $K_v = 0{,}78$, correspondiente a $K_{ad} = 0$, $K_{af} = -0{,}75$,[1] luego $M_0 K_v = 0{,}78 \cdot 12{,}00 = 9{,}36\ m\ kN$. Los resultados se indican en la figura 18-6. Se ha tomado como momento en el extremo *0,15* M_0 en los vanos extremos. Con todo ello, se anotan los valores de *K* y *M* definitivos en las casillas correspondientes.

Como dijimos, con el fin de poder calcular de una manera rápida los puntos de corte de barras, conviene rellenar las casillas de valores de K_{ad} y K_{af} que han dado lugar a los momentos de apoyo y a los de vano. Cuando se trata de vano extremo, los valores *K* correspondientes a momentos negativos son los de cálculo. Para los momentos de vano, *K* del apoyo exterior se toma igual a *0* y para el interior el de cálculo disminuido en el valor λ, que en nuestro caso vale $\lambda = 0{,}15 + \frac{0{,}78^2}{16} = 0{,}19$.

1 Dada la precisión del método no se interpola, sino que se toma el valor más desfavorable.

Para vano interior, los valores de K correspondientes a momentos negativos son los de cálculo y debe calcularse el K_v de acuerdo con las tablas.

Los valores de K_{ad}, K_{af} en los vanos interiores para la fila de momentos de vano son los correspondientes de la fila de momentos de apoyo disminuidos en

$$K'_v - K_v + \lambda$$

donde K'_v es el coeficiente de la fila de momentos de vano y K_v el de la fila de momentos de apoyo. Como en nuestro caso $K'_v = K_v = 0{,}65$, la reducción resulta de 0,15, pues $K_{ad} = K_{af}$ y, por tanto, $\lambda = 0{,}15$.

Los cortantes resultan:

Vano AB: $$V_d = 2 \cdot 6{,}00 - \frac{9{,}38 - 1{,}80}{4} = 10{,}10\ kN$$

$$V_f = 2 \cdot 6{,}00 + \frac{9{,}38 - 1{,}80}{4} = 13{,}90\ kN$$

Vano BC: $$V_d = V_f = 2{,}5 \cdot 6{,}00 = 15{,}00\ kN$$

Vano CD: $$V_d = 2{,}5 \cdot 6{,}00 + \frac{9{,}38 - 4{,}36}{5} = 16{,}00\ kN$$

$$V_f = 2{,}5 \cdot 6{,}00 - \frac{9{,}38 - 4{,}36}{5} = 14{,}00\ kN$$

18.4.1.2 Caso en que existen voladizos

Si el forjado tiene voladizos en cualquier extremo, conviene distinguir dos casos.

- Si en una cierta hipótesis de carga, el momento en el arranque del voladizo es igual o mayor que 0,5 veces el isostático del primer vano en esa misma hipótesis, éste será tratado como vano segundo y no como vano extremo. En este caso, en nuestra opinión debe realizarse carga y descarga de vanos[1].

El momento en el apoyo siguiente al extremo bastará que sea por tanto $\geq 0{,}4\ M_0$ (y no 0,5 ó 0,6 como vimos anteriormente) y el del vano $\frac{1+0{,}3\alpha}{2}$ (y no $\frac{1{,}2+0{,}3\alpha}{2}$)[2]

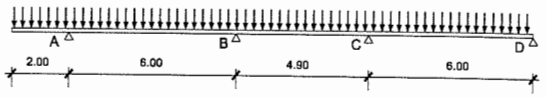
- Si el momento es menor de $0{,}5\ M_0$, los valores mínimos de los momentos de vanos y apoyos serán los correspondientes al caso sin voladizos y no es necesario considerar carga y descarga de vanos.

1 BAEL-83 no menciona el caso de voladizos.

2 Salvo que su situación respecto al extremo derecho del forjado conduzca a una situación más desfavorable, por ejemplo, si se trata de voladizo en extremo izquierdo y dos vanos con voladizo de valor M mayor que $0{,}5\ M_0$ del primer vano, el momento en el apoyo central sería el mayor que se obtuviera bien aplicando $K_{ad} = 0{,}6$ al vano derecho o bien $K_{af} = 0{,}5$ al vano izquierdo.

CARGA MÁS SOBRECARGA EN VOLADIZO Y TODOS LOS VANOS

$\gamma_g \cdot g + \gamma_q \cdot q = 6{,}48$ kN/m



MOMENTOS ISOSTÁTICOS		12,96	29,16			19,45			29,16		
VALORES PRIMARIOS	K	—	0 (1)	0,90	-0,50	-0,50	0,65	-0,50	-0,50	0,90	0
	M_d	—	0	26,24	-14,58	-9,73	12,64	-9,73	-14,58	26,24	0
VALORES DEFINITIVOS DE CÁLCULO	K	—	-0,44 (2)	0,68	-0,50	-0,75	0,58 (3)	-0,75	-0,50	0,90 (4)	-0,15
	M_d	-12,96	-12,96	19,83	-14,58	-14,58	11,28	-14,58	-14,58	26,24	-4,37 (5)
COMBINACIONES DE K PARA CORTE DE BARRAS	MOMENTOS DE APOYO	—	-0,44	—	-0,50	-0,80	—	-0,80	-0,50	—	0,15
	MOMENTOS DE VANO	—	-0,29 (7)	—	-0,35 (7)	0,42 (6)	—	0,42 (6)	-0,33	—	0 (8)

(1) Como $12{,}96 < 0{,}5 \cdot 29{,}16$, en esta hipótesis, para los valores primarios de K el vano se considera como extremo. No se hacen cargas y descargas de vanos.

(2) Este valor corresponde a $K'_{ad} = \frac{12{,}96}{29{,}16} = 0{,}44$. (Este valor debe ser siempre superior a 0,15). Con $K'_{ad} = 0{,}44$ y $K_{af} = 0{,}50$, se toma en la tabla $K_v = 0{,}68$. (Corresponde a $K'_{ad} = 0{,}45$).

(3) Con $K_{ad} = K_{af} = 0{,}75$, la tabla da $K_v = 0{,}58$. (Rige el valor mínimo de K_v).

(4) Valor de vano para $K_{ad} = 0{,}50$, $K_{af} = 0$.

(5) 0,15 del valor M_0 del vano.

(6) Obtenido restando a 0,80 el valor $0{,}58 - 0{,}35 + 0{,}15$, de acuerdo con [18.6].

(7) Obtenido restando de la fila de momentos de apoyo el valor $0{,}68 - 0{,}68 + 0{,}15 + \frac{(-0{,}50 + 0{,}44)^2}{16} = 0{,}15$, de acuerdo con [18.6].

(8) Este valor corresponde a la hipótesis de articulación en apoyo extremo, puesto que es más desfavorable para el corte de barras en vano.

Figura 18-7

A continuación se realiza un ejemplo que se recoge en la figura 18-7. El forjado tiene una carga total de 648 m kN (carga permanente más sobrecarga). Los extremos están elásticamente empotrados en vigas de fachada y se desea dimensionarlos de acuerdo con BAEL-83. Se adopta el criterio de reducir tanto como sea posible los momentos en apoyos.

El cálculo se indica con detalle en la figura. De nuevo, y por lo que más adelante veremos, se consignan los valores de K concomitantes con los máximos momentos de apoyo y de vano para el corte de armaduras.

18.4.2 MÉTODO DE LA INSTRUCCIÓN EF[1]

La Instrucción citada admite para forjados que el grado de plastificación llegue hasta igualar los momentos de vano y de apoyo[2].

El cálculo en los vanos extremos ha de hacerse suponiendo articulación en los apoyos extremos y de todas formas ha de cubrirse en ellos un momento no menor de 0,25 veces el obtenido para el vano, en la hipótesis de extremo articulado.

Para el vano extremo (fig. 18-8), suponiendo articulación en *A*, la condición de igualar los momentos de vano y apoyo es de deducción inmediata y conduce en el caso de carga uniforme a:

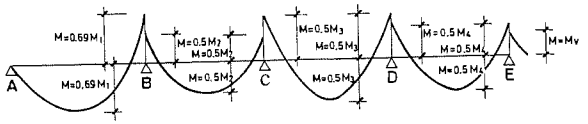


Figura 18-8

$$M_a = -\left[\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right] P\ell^2 = -0{,}086\ P\ell^2 \approx -\frac{P\ell^2}{11{,}6}$$

$$M_v = \left[\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right] P\ell^2 = 0{,}086\ P\ell^2 \approx \frac{P\ell^2}{11{,}6}$$

valores que, referidos al isostático $M_0 = \frac{1}{8} P\ell^2$ del vano conducen a $K_v = 0{,}69$,

$K_{af} = -0{,}69$ y:

$$M_a = -0{,}69\ M_0$$

$$M_v = 0{,}69\ M_0$$

En vanos interiores resulta directamente $K_{ad} = -0{,}5$, $K_{af} = -0{,}5$ y $K_v = 0{,}5$ y

1 Este método está basado en los estudios de J. LAHUERTA, Profesor de la Escuela de Arquitectura de la Universidad de Navarra (18.8)

2 La Instrucción citada prescinde del incremento de $0{,}3\alpha$ adoptado por las normas francesas BAEL-83.

$$M_{ad} = M_{af} = -\frac{P\ell^2}{16} = -0{,}50\ M_0$$

$$M_v = \frac{P\ell^2}{16} = 0{,}50\ M_0$$

El cálculo es por tanto directo e inmediato tal como se indica en la figura 18-8, incluso para el caso de voladizos. En el caso particular de voladizos, si en una hipótesis de carga determinada el momento de éste es igual o superior a $0{,}5\ M_o$ del vano, éste se considera como interior. (En este método los segundos vanos y los interiores se tratan de forma idéntica).En tal caso,$M_v = 0{,}5\ M_o$, $M_{af} = -0{,}5\ M_o$, en lugar de $0{,}69\ M_o$ y $-0{,}69\ M_o$ que le corresponderían como vano extremo. Por supuesto, en cada apoyo interior se toma como momento el mayor de los resultantes para los dos vanos adyacentes. Si $M_v < 0{,}5\ M_o$, el vano se considera como extremo.

La figura 18-9 contiene la resolución de un ejemplo completo que aclara el empleo del método. Como en el caso de la Instrucción BAEL-83, conviene anotar los valores K_{ad} y K_{af} correspondientes a los momentos de apoyo y a los de vano, para poder calcular los puntos de corte de barras como indicaremos más adelante.

Análogamente, se calcularía la hipótesis c) correspondiente a carga permanente en voladizo y todos los vanos y sobrecarga en voladizo y vano *BC*

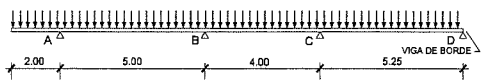
OBSERVACIÓN. Es evidente la gran sencillez y rapidez del método, que maneja sólo los coeficientes 0,69 y 0,50 para valores de *K*, es decir, que no se necesitan tablas ningunas[1].

Es claro también que el método puede refinarse. Por ejemplo en la hipótesis b) de la figura 18-9 b), el coeficiente de vano *0,69* para el vano *AB*, deducido considerándolo como extremo con $K_{ad} = 0$ al no superar el momento del voladizo la mitad del isostático de vano, podría reducirse considerando el valor $K_{ad} = 0{,}36$. Para ello podría disponerse unas tablas análogas a las construidas para el método de la Norma Francesa BAEL-83 (ahora sin el incremento de $0{,}3\alpha$). Sin embargo, creemos que estos refinamientos, que afectan fundamentalmente sólo a los casos de voladizos tienen escasa importancia y quitan rapidez y sencillez al método.

1 Debe observarse que el método de las Instrucciones Españolas no es un caso particular del método de BAEL-83, aunque, a primera vista, pudiera parecerlo.Ver referencia (18.8).

HIPÓTESIS a) CARGA PERMANENTE MÁS SOBRECARGA EN VOLADIZOS Y TODOS LOS VANOS

$\gamma_g \cdot g = 3{,}68\ kN/m$ $\gamma_q \cdot q = 2{,}80\ kN/m$ $\gamma_g \cdot g + \gamma_q \cdot q = 8{,}48\ kN/m$



MOMENTOS ISOSTÁTICOS		12,96	20,25			12,96			22,33		
VALORES PRIMARIOS	K	—	-0,50 (1)	0,50	-0,50	-0,50	0,50	-0,50	-0,69	0,69	0
	M_d	-12,96	-10,12	10,12	-10,12	-6,48	6,48	-6,48	-15,41	15,41	0
VALORES DEFINITIVOS DE CÁLCULO	K	—	-0,64	0,50	-0,50	-0,78	0,50	-1,19 (2)	-0,69	0,69	-0,17 (3)
	M_d	-12,96	-12,96	10,12	-10,12	-10,12	6,48	-15,41	-15,41	15,41	-3,80 (4)
COMBINACIONES MÁS PARA CORTE DE BARRAS	MOMENTOS DE APOYO	—	-0,64	—	-0,50	-0,78	—	-1,19	-0,69	—	-0,17
	MOMENTOS DE VANO	—	0,50 (5)	—	0,50 (5)	0,50	—	0,50	0,69	—	0 (6)

(1) Se considera *AB* vano interior, pues $12{,}96 > 0{,}5 \cdot 20{,}25$.

(2) $K'_{af} = \dfrac{15{,}41}{12{,}96} = -1{,}19$

(3) Corresponde a $0{,}25 \cdot 0{,}69 = 0{,}17$ que es el valor de K_{af}.

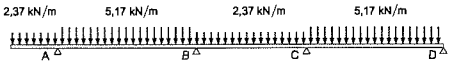
(4) Corresponde a $-0{,}17 \cdot 22{,}33 = -3{,}80$

(5) Los valores $K_{ad} = K_{af} = -0{,}50$ son concomitantes con el valor $K_v = 0{,}50$.

(6) Se toma $K_{af} = 0$ que es la hipótesis más desfavorable para el corte de barras en vano.

Figura 18-9 a)

HIPÓTESIS b) CARGA PERMANENTE EN TODOS LOS VANOS Y SOBRECARGA EN VANOS AB y CD.



MOMENTOS ISOSTÁTICOS		7,36	16,16			4,74			17,81		
VALORES PRIMARIOS	K	—	0 (1)	0,69	-0,69	-0,50	0,50	-0,50	-0,69	0,69	0
	M_d	4,74	0	11,15	-11,15	-2,37	2,37	-2,37	-12,29	12,29	0
VALORES DEFINITIVOS DE CÁLCULO	K	—	-0,29 (2)	0,69	-0,69	-2,35 (3)	0,50	-2,59 (4)	-0,69	0,69	-0,17
	M_d	-4,74	-4,74	11,15	-11,15	-11,15	2,37	-12,29	-12,29	12,29	-3,07
COMBINACIONES MÁS PARA CORTE DE BARRAS	MOMENTOS DE APOYO	—	-0,36	—	-0,69	-2,35	—	-2,59	-0,69	—	0,17
	MOMENTOS DE VANO	—	0	—	-0,69	-0,50	—	-0,50	-0,69	—	0

(1) Como el momento del voladizo es inferior a $0{,}5\ M_0$ del vano *AB*, éste se considera como extremo.

(2) Corresponde a $K_{ad} = -\dfrac{4{,}74}{16{,}16} = -0{,}29$

(3) Corresponde a $K_{ad} = -\dfrac{11{,}15}{4{,}74} = -2{,}35$

(4) Corresponde a $K_{af} = \dfrac{-12{,}29}{4{,}74} = -2{,}59$

Figura 18-9 b)

18.5 PUNTOS DE CORTE DE LAS BARRAS DE LA ARMADURA

En todos los casos vistos, es necesario poder realizar el despiece de barras y para ello es necesario poder calcular sus puntos de corte de acuerdo con las curvas de momentos flectores correspondientes a las distintas hipótesis de carga.

18.5.1 MÉTODOS BASADOS EN LA CONTINUIDAD TEÓRICA

Sean $K_{ad}\ M_o$ y $K_{af}\ M_o$ los momentos flectores en apoyos (M_o es el momento isostático de vano). De acuerdo con la figura 18-10:

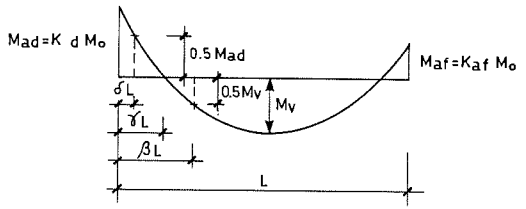


Figura 18-10

El gráfico GT-19 proporciona en función de K_{ad} y K_{af} el valor de γ correspondiente. Análogamente, el gráfico GT-20 nos da el de δ y el GT-21 el de β.

Obsérvese que los ábacos están referidos a los puntos de corte de la zona dorsal (izquierda). Para la zona frontal (derecha) deben invertirse las notaciones, es decir, considerar K_{af} como K_{ad} y viceversa para entrar en los gráficos y contar β, γ, δ desde el apoyo derecho.

A continuación se expone un ejemplo en la figura 18-11.

Se supone $M_0 = 56{,}00\ m \cdot kN$, por tanto:

$$K_{ad} = -\frac{35{,}00}{56{,}00} = -0{,}63 \quad ; \quad K_{af} = -\frac{28{,}00}{56{,}00} = -0{,}50$$

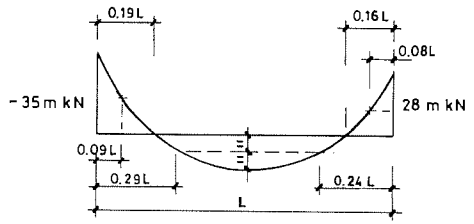


Figura 18-11

Entrando en los gráficos, se obtiene:

Lado dorsal (izquierdo): $K_{ad} = -0{,}63$; $K_{af} = -0{,}50$

Gráfico GT-19 $\gamma = 0{,}19$

Gráfico GT-20 $\delta = 0{,}09$

Gráfico GT-21 $\beta = 0{,}29$

Lado frontal (derecho): $K_{ad} = -0{,}50$; $K_{af} = -0{,}63$

Gráfico GT-19 $\gamma = 0{,}16$

Gráfico GT-20 $\delta = 0{,}08$

Gráfico GT-21 $\beta = 0{,}24$ [1]

Los resultados se indican en la figura 18-11.

18.5.2 MÉTODOS BASADOS EN LA READAPTACIÓN PLÁSTICA

a) VANO EXTREMO CON APOYO SIMPLE EN BORDE Y MOMENTOS IGUALES EN VANO Y APOYO

La figura 18-12 indica los datos correspondientes:

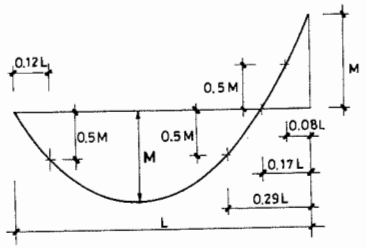


Figura 18-12

b) VANO INTERMEDIO CON IGUALDAD DE MOMENTOS EN VANO Y APOYOS

La figura 18-13 indica los datos correspondientes:

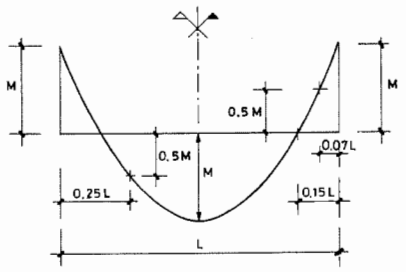


Figura 18-13

1 Recuérdese que, a partir de los puntos definidos por los valores β, ∂, γ hay que llevar longitudes adicionales que serán expuestas en los Capítulos siguientes.

c) VANO CUALQUIERA CON MOMENTOS CUALESQUIERA

En este caso el método es el explicado en 18.5.1 mediante el uso de los gráficos GT-19 a GT-21.

En los ejemplos recogidos en las figuras 18-6 , 18-7 y 18-9 se ordenaron en las casillas correspondientes los pares de valores K_{ad}, K_{af} correspondientes a los momentos negativos y los correspondientes al momento adoptado para el vano. Con ellos se tienen los datos necesarios para calcular las longitudes β, δ, γ en cada vano.

18.6 CONSIDERACIÓN GENERAL DE LOS MÉTODOS EXPUESTOS BASADOS EN LA READAPTACIÓN PLÁSTICA

Aunque las experiencias, tanto francesa como española, sobre la aplicación de estos métodos, son satisfactorias a lo largo de un período de tiempo de más de veinte años, estos métodos no cumplen las condiciones que para la redistribución de momentos se exponen en el resto de este libro. Algunas investigaciones en marcha permitirán analizar su validez para el caso de forjados nervados o forjados de vigueta y bovedilla.

18.7 CASO DE FORJADOS DE UN SÓLO VANO O DE FORJADOS DE VARIOS VANOS CALCULADOS COMO ISOSTÁTICOS

Al no existir posibilidades de readaptación plástica, ambos métodos coinciden. Si el vano está realmente en situación de simplemente apoyado, el momento es naturalmente el isostático. Debe cuidarse de la existencia de empotramientos imprevistos, como por ejemplo el indicado en la figura 18-14, que pueden producir un momento negativo capaz de provocar la aparición de fisuras que reducen de forma importante la resistencia a corte del forjado.

En el caso de forjados de un sólo vano con vigas de borde o muros construidos monolíticamente con el forjado, puede tomarse como momento de vano $0{,}9\ M_o$, siendo M_o el isostático y como momento de empotramiento $-0{,}25\ M_o$ (fig. 18-15).

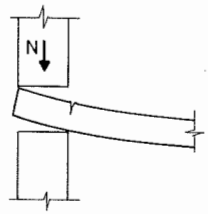


Figura 18-14

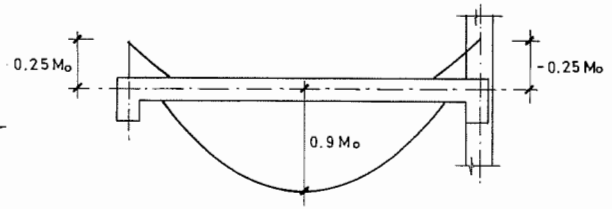


Figura 18-15

Existe naturalmente la posibilidad de calcular forjados de varios vanos sin considerar la continuidad teórica, es decir suponiendo vanos consecutivos simplemente apoyados. Estrictamente de acuerdo con BAEL-83, el vano debe calcularse con el valor isostático M_o en vano, y cubrir $0{,}15\ M_o$ en los apoyos. De

acuerdo con EF, el momento en vano debe ser M_o, y debe cubrirse en apoyos $0{,}25\ M_o$. En este segundo caso, creemos que el valor en vano puede reducirse también a $0{,}9\ M_o$. (Fig. 18-16 a)). Debe en cambio recalcarse la conveniencia de disponer siempre una cierta armadura en momentos negativos para controlar en ellos la fisuración y evitar daños en el solado.

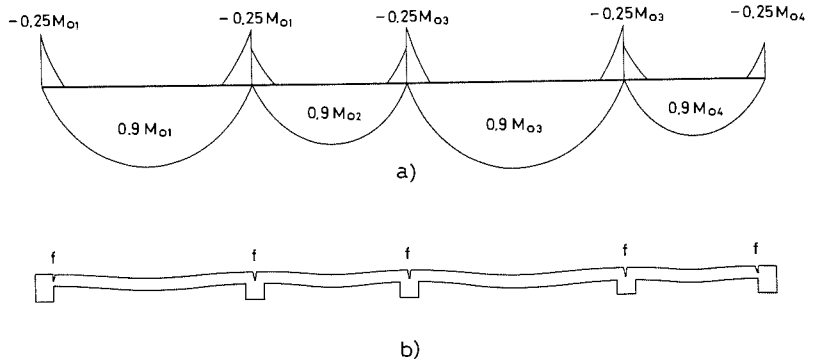


Figura 18-16

Debe recordarse que la necesidad de cubrir un momento mínimo en el empotramiento del forjado en vigas, **no se refiere solamente a los vanos extremos en vigas de borde**, sino a cualquier enlace monolítico a vigas, incluidas las interiores.

La ignorancia de esto, puede conducir a que aun dimensionando todos los vanos para el momento isostático (por ej. $\frac{1}{8}(\gamma_{fg} \cdot g + \gamma_{fq} \cdot q)L^2$), si no se dispone una cierta armadura de momentos negativos, el forjado se fisure como se indica en la figura 18-16 b). Las fisuras *f* no sólo presentan problemas estructurales sino que originan problemas en el solado.

BIBLIOGRAFÍA

(18.1) CALAVERA, J.: "Cálculo, Construcción y Patología de Forjados de Edificación". 6ª Edición. INTEMAC. Madrid. 1999.

(18.2) RÈGLES TECHNIQUES DE CONCEPTION ET DE CALCUL, DES OUVRAGES ET CONSTRUCTIONS EN BÉTON ARMÉ SUIVANT LA MÉTHODE DES ÉTATS-LIMITES. RÈGLES BAEL-83. Eyrolles. París. 1983.

(18.3) INSTRUCCIÓN EF: "Instrucción para el proyecto y la ejecución de forjados unidireccionales de hormigón armado y pretensado". Ministerio de Fomento. Madrid. 1999.

(18.4) INSTRUCCIÓN EHE: "Instrucción para el proyecto y la ejecución de obras de hormigón estructural". Ministerio de Fomento. Madrid. 1998.

(18.5) LOSER, B.: "Hormigón armado". El Ateneo. Buenos Aires. 1958.

(18.6) GERE, J.M.: "Moment Distribution". Van Nostrand Co. Inc. Nueva York. 1963.

(18.7) ACI 318-95 "Building Code Requirements for Structural Concrete". American Concrete Institute. 1995.

(18.8) LAHUERTA, J.: "Cálculo de los forjados por el método de las rótulas plásticas". Colegio Oficial de Arquitectos Vasco-Navarro. 1967.

CAPÍTULO 19

CÁLCULO DE ESFUERZOS EN FORJADOS SIN VIGAS [1]

19.1 GENERALIDADES

Entendemos por forjado sin vigas una placa de hormigón, maciza o nervada, que transmite la carga que recibe, directamente a los pilares, sin intermedio de vigas. El tipo general se indicó en el Capítulo 1. Como excepción, este tipo de forjados puede llevar vigas en los bordes extremos de la placa [2]. La Instrucción EHE emplea la denominación de placas sobre apoyos aislados, pero hemos preferido mantener la de forjados sin vigas por ser de uso más habitual.

Actualmente, es muy común el caso de forjados sin vigas aligerados mediante bovedillas y también mediante el empleo de moldes recuperables metálicos o de plástico. La solución de placa maciza es también interesante y es previsible que, en un futuro próximo, el aumento en el uso del hormigón bombeado y la racionalización de los encofrados y armaduras aumenten la tendencia hacia esta otra solución.

El origen del sistema es difícil de precisar, pero es posiblemente norteamericano, ya que, en el primer cuarto de nuestro siglo, se construyeron forjados de este tipo en los Estados Unidos. Por supuesto, estas realizaciones iniciales fueron totalmente empíricas, pero muy rápidamente se iniciaron los estudios teóricos sobre el tema y deben destacarse los trabajos de NICHOLS (19.1), basados en los previos de WESTERGAARD (19.2).La Norma Norteamericana ACI 318, en sucesivas ediciones,

1 Se incluyen aquí todos los aspectos del cálculo estructural. Los detalles de armado se exponen en los Capítulos 53 y 54.

2 EHE no considera el caso de vigas. Lo incluimos porque su uso no reduce prácticamente la ventaja del techo plano que este tipo estructural representa, y encierra múltiples ventajas, entre otras el permitir reducir la escuadría de pilares de fachada y esquina.

ha dedicado una gran atención a este tipo de estructura, modificando su método de cálculo de acuerdo con la experiencia de uso y las investigaciones teóricas y experimentales desarrolladas. En su versión actual (19.3), la Norma ACI 318-95 incluye dos métodos: uno, simplificado, y otro, general para el cálculo de esfuerzos. La Instrucción EHE, basada en la Norma Norteamericana en lo referente a este tipo estructural, recoge sólo el método general. Hemos incluido también el método simplificado por estimarlo de gran interés.

En lo que sigue, hemos desarrollado el tema de acuerdo con ACI 318-95 y con los comentarios a dicha Norma, aunque en algunos detalles la hemos complementado con la versión de EHE y algunas adiciones de tipo vario. El método que se desarrolla es de aplicación más amplia que el expuesto en EHE. Este método corresponde a soluciones de hormigón armado. El cálculo de las soluciones en hormigón pretensado se expone en el Capítulo 54.

No debe dejarse de considerar que el conocimiento actual sobre este tipo estructural viene de tres fuentes distintas:

- La experiencia práctica de uso.
- Los ensayos en modelos y las pruebas de carga en estructuras reales.
- Los análisis teóricos.

Todo ello hace que, para muchos aspectos, se adopten criterios evidentemente convencionales, que no resultarían de aplicación fuera del campo propio de este tipo estructural.

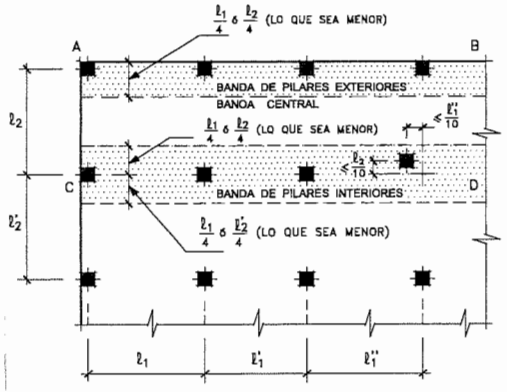


Figura 19-1

Para lo que sigue, entendemos que el forjado apoya en pilares que forman en planta una malla rectangular. Como única excepción, se admite que cualquier pilar se aleje de su posición teórica como máximo el 10% de la luz de recuadro en el sentido que se indica en la figura 19-1.

19.2 TERMINOLOGÍA

Emplearemos la siguiente:

Capitel. Ensanchamiento del extremo superior de un pilar que enlaza éste a la placa. Su uso es frecuente en edificios industriales y raro en edificios de viviendas y oficinas.

Ábaco. Zona de la placa situada alrededor de un pilar o de su capitel, que se resalta en las placas macizas y en las placas aligeradas de maciza con o sin resalto. El ábaco es obligatorio en placas aligeradas.

Recuadro interior. El correspondiente a cuatro pilares, ninguno de los cuales está en borde de placa.

Recuadro de borde. Aquél que tiene dos pilares en borde de placa.

Recuadro de esquina. Aquél que tiene dos pilares en borde de placa y uno en esquina.

Banda de pilares. Es la correspondiente a un ancho a cada lado de la fila de pilares igual a lo indicado en la figura 19-1. Existen, por tanto, bandas de pilares exteriores (*AB* en la figura 19-1) y bandas de pilares interiores (*CD* en la figura 19-1).

Banda central. Es la correspondiente al resto del recuadro, es decir, la situada entre dos bandas de pilares.

Pórtico virtual. Está constituido por una fila de pilares y la zona de placa limitada lateral y paralelamente a la fila de pilares considerada, por las líneas medias de los recuadros adyacentes.

19.3 REQUISITOS DIMENSIONALES

Se recomiendan, con carácter general, los siguientes:

Pilares. La dimensión transversal mínima será de 25 cm.

Placas. La relación canto/luz cumplirá los siguientes valores mínimos indicados en la tabla T-19.1.

TABLA T-19.1
CANTOS MÍNIMOS DE FORJADOS SIN VIGAS EJECUTADOS EN HORMIGÓN ARMADO

TIPO DE ACERO	PLACAS MACIZAS SIN ÁBACOS			PLACAS ALIGERADAS		
	RECUADRO DE BORDE O ESQUINA		RECUADRO INTERIOR	RECUADRO DE BORDE O ESQUINA		RECUADRO INTERIOR
	SIN VIGA DE BORDE	CON VIGA DE BORDE		SIN VIGA DE BORDE	CON VIGA DE BORDE	
B 400S	$\ell_n/30$	$\ell_n/33$	$\ell_n/33$	$\ell_n/28$	$\ell_n/31$	$\ell_n/31$
B 500S	$\ell_n/28$	$\ell_n/31$	$\ell_n/31$	$\ell_n/26$	$\ell_n/29$	$\ell_n/29$

(*) ℓ_n es la luz libre entre caras de pilares.

Las placas macizas tendrán un canto mínimo de 12 cm, en general. Si se disponen ábacos cuya dimensión no sea inferior, en la dirección de cada vano, al tercio de su luz, podrá rebajarse el espesor a 10 cm, pero el ábaco resaltará como mínimo el cuarto del espesor de la placa. Las placas aligeradas tendrán un canto mínimo de 15 cm.

En el caso de las placas aligeradas, el espesor de la losa superior es recomendable que no sea inferior a 4 cm, si se emplean bovedillas y a 5 cm si se emplean moldes recuperables[1].

En caso de emplear moldes recuperables, además de cumplirse la condición anterior, el espesor de la losa superior no será inferior al décimo de la luz libre de la capa de compresión. (Esta condición es de la antigua Instrucción EH-91. La Instrucción EHE no dice nada sobre el tema. Quizá un doceavo sea más razonable).

El ancho de los nervios no será inferior a 7 cm, ni a la cuarta parte de la altura del nervio, sin contar la losa superior. La separación entre nervios no superará el metro y en cada recuadro habrá, por lo menos, seis nervios en cada dirección. (De nuevo esta condición de EH-91 parece excesivamente exigente. Un mínimo de cinco parece suficiente. EHE no dice nada al respecto).

Capiteles. Los paramentos del capitel no formarán, con el eje del pilar, un ángulo superior a 45º. Si se rebasa este límite, toda la zona exterior a él no será considerada a efectos de cálculo.

El ancho del capitel, en cada una de las direcciones de los recuadros, no será superior al 30% de la menor de las dos luces contiguas al pilar considerado.

Ábaco. Es obligatorio únicamente en las placas aligeradas, bien resaltando o constituyendo solamente un macizado. En este tipo de placas, la distancia del eje del pilar al borde del ábaco no será inferior al sexto de la luz entre ejes de pilares en la dirección considerada del recuadro.

Vigas. Si hay viga asociada a la placa, para los cálculos se considera un ancho de viga asociada a la placa de acuerdo con lo indicado en la figura 19-5 b).

Los requisitos mencionados en este apartado pueden ser obviados si se realiza un cálculo específico que lo justifique adecuadamente.

19.4 CÁLCULO DE ESFUERZOS

Una característica importante que debe destacarse en los forjados sin vigas es su alto grado de hiperestatismo. Para quienes se inicien en este tipo estructural, debe señalarse su diferencia con los forjados o placas con vigas (figura 19-2 a)).

En éstas, los momentos flectores mayores de la placa se originan en la dirección de la luz más corta y los menores, en la más larga, repartiéndose las cargas entre ambas series de vigas para ir a parar a los pilares. Las vigas más largas se encuentran sometidas, en cambio, a mayores momentos. Cualquier carga, tal como P_1, es transmitida por la placa, parte en el sentido *OX* a las vigas cortas y parte en el sentido

1 Con el espesor de 4 cm, si el molde es recuperable, es imposible disponer la armadura de retracción y temperatura en la losa superior con los recubrimientos adecuados. 5 cm parece más razonable. (El problema es sensiblemente análogo en cualquier tipo de forjado).

OY, a las vigas largas. En cambio, en los forjados sin vigas, como veremos, las flexiones mayores se producen en el sentido de la luz mayor y la característica esencial es que en este tipo de forjados la carga **debe ser transmitida íntegramente por la placa en ambas direcciones.**

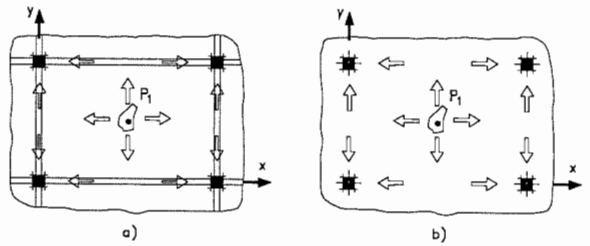


Figura 19-2

19.4.1 MÉTODO SIMPLIFICADO

Este método es aplicable solamente para el cálculo de esfuerzos debidos a cargas verticales y presupone el cumplimiento de las condiciones siguientes:

- Existe un mínimo de tres vanos en cada dirección.
- No existen voladizos.
- Los recuadros son rectángulos cuyo lado mayor no es superior al doble del menor. Como única excepción se admite que un soporte se desvíe de la línea de soportes a la que pertenece, el 10% de la luz del recuadro en sentido transversal.
- Dos luces consecutivas en cualquier dirección no difieren en más de 1/3 de la mayor.
- Las cargas son uniformemente distribuidas y la sobrecarga no superará el doble de la carga permanente.
- Todas las cargas y sobrecargas son verticales.

19.4.1.1 Cálculo a flexión de la placa

a) Momento isostático total

Se define como momento isostático total, para un pórtico virtual, el valor

$$M_{od} = \frac{(\gamma_{fg} \cdot g + \gamma_{fq}\, q)\, \ell_2\, \ell_{1n}^2}{8} \qquad [19.1]$$

donde ℓ_2 es la luz de los recuadros entre ejes de pilares en sentido perpendicular a la dirección considerada y ℓ_{1n}, la luz libre en esta dirección (luz entre caras de pilares, si no hay capiteles, o luz entre bordes de capiteles, si

éstos existen) [1]. Si la luz ℓ_2 varía en las dos filas de recuadros adyacentes a la fila de pilares considerada, ℓ_2 es la semisuma de ambas luces. En ningún caso ℓ_{ln} se tomará inferior a 0,65 ℓ_l en [19.1] [2] (ℓ_l es la luz entre ejes de pilares en la dirección considerada).

En la figura 19-3 se indica la luz ℓ_2 correspondiente al pórtico virtual interior *AB*. Para un pórtico virtual exterior, el valor ℓ_2 a introducir en [19.1] es el valor ℓ_3 indicado en la figura 19-3 para la fila *CD*.

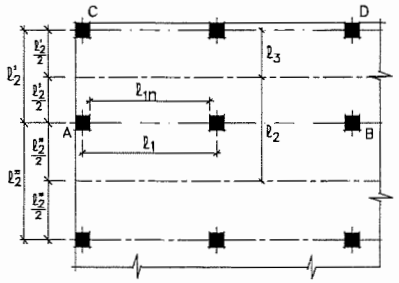


Figura 19-3

b) Distribución del momento isostático total en vano y apoyo

Los momentos negativos totales que se indican a continuación se entiende que corresponden a la cara de los pilares o capiteles si son rectangulares. Si son de sección circular o poligonal regular, se sustituyen por los cuadrados de igual área.

b-1) Vanos interiores

En un vano interior de un pórtico virtual, el momento isostático total M_{od} se distribuye de acuerdo con lo siguiente (fig. 19-4):

Momento negativo total $-0{,}65\ M_{od}$

Momento positivo total $0{,}35\ M_{od}$

1 Si el apoyo (pilar o capitel) es un círculo o polígono regular cualquiera, se reemplaza a estos efectos por el cuadrado de área equivalente.

2 El valor [19.1] no corresponde estrictamente a lo que puede derivarse del cálculo por consideraciones de equilibrio. El cálculo, para un recuadro apoyado en cuatro pilares circulares conduce al valor

$$M_{do} = \frac{p\ell_l^2\ \ell_2}{8}\left(1 - \frac{2c}{3\ell_1}\right)^2$$

siendo c el diámetro del pilar. Este valor figuró en las primeras ediciones de ACI-318. En las últimas versiones, ha sido sustituido por el [19.1] para obtener un mejor ajuste con los resultados experimentales.

b-2) Vano extremo

b-2.1) Método general

A partir de la edición de 1983 de ACI-318, el cálculo de la distribución en vano extremo puede realizarse, de acuerdo con los coeficientes de la Tabla T-19.2, que da los coeficientes por los que ha de multiplicarse el valor M_{od}, dado por [19.1] para obtener los momentos en vano y apoyo.

TABLA T-19.2

	Apoyo exterior no coaccionado al giro (*)	Apoyo exterior en pilar (**)		Apoyo exterior completamente coaccionado al giro (***)
		Sin viga de borde	Con viga de borde	
Momento negativo en apoyo interior	0,75	0,70	0,70	0,65
Momento de vano	0,63	0,52	0,50	0,35
Momento negativo en apoyo exterior	0	0,26	0,30	0,65

(*) Por ejemplo, simple apoyo de borde en muro de ladrillo u hormigón.
(**) EHE unifica estos dos casos, tomando los valores pésimos de cada una de las dos columnas.
(***) Por ejemplo, empotramiento rígido en un muro de hormigón de gran rigidez.

b-2.2) Método de la rigidez del pilar equivalente

Este método ha figurado durante bastantes años en las ediciones correspondientes de ACI-318, en las últimas de ellas como alternativa al método expuesto en b-2.1). A partir de la edición de 1995, se ha mantenido únicamente este último.

Sin embargo desarrollamos a continuación el método de la rigidez del pilar equivalente, ya que posee un gran interés para la compresión de la flexibilidad real de los pilares en este tipo de forjado y además permite una exposición muy clara del trabajo de torsión en la transmisión de momentos entre placa y pilar.

En un vano extremo de un pórtico virtual, la distribución resulta (figura 19-4).

Momento negativo en apoyo exterior: $-\dfrac{0{,}65\ M_{od}}{1 + \dfrac{1}{\alpha_{eq}}}$

Momento de vano: $\left(0{,}63 - \frac{-0{,}28}{1+\frac{1}{\alpha_{eq}}}\right) M_{od}$

Momento negativo en apoyo interior $-\left(0{,}75 - \frac{0{,}1}{1+\frac{1}{\alpha_{eq}}}\right) M_{od}$

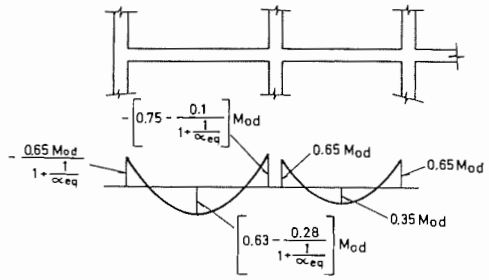


Figura 19-4

En las expresiones anteriores, α_{eq} viene dada por la expresión

$$\alpha_{eq} = \frac{K_{ce}}{K_{p\ell}} \qquad [19.2]$$

donde:

$K_{p\ell}$ = Rigidez de la placa (con ancho ℓ_2 ó ℓ_3, figura 19-3), correspondiente al vano del pórtico virtual en la dirección considerada. Si se trata de una fila de pilares de borde, $K_{p\ell}$ es la rigidez del conjunto de placa y viga de borde si existe.

K_{ce} = Rigidez del pilar equivalente, que viene dado por la fórmula

$$\frac{1}{K_{ce}} = \frac{1}{\Sigma K_s} + \frac{1}{K_t} \qquad [19.3]$$

[1]

1 En la fórmula se maneja el concepto de "flexibilidad" como inverso del de rigidez. Obsérvese que si K_t es pequeña (como sucede con frecuencia), la flexibilidad del pilar equivalente es mucho mayor que la correspondiente al pilar real. *Este hecho, intrínseco a este tipo de estructura debe ser siempre tenido presente al proyectar.*

donde ΣK_s es la suma de las rigideces de los pilares superior e inferior[1] y K_t es la rigidez torsional de una zona de losa de ancho igual al del pilar o al de la viga y losa, en el caso de pilar de borde o esquina, tal como se indica en la figura 19-5a) y b).

(En el caso de pilar inferior (figura 19-5 a)), el ancho b a considerar en el cálculo de K_t es el del pilar o el del capitel, si existe. Para viga de borde, se toma el ancho de la viga más un ancho de losa igual a la diferencia entre el canto de la viga y el de losa, sin que se considere una zona de losa superior a cuatro veces su canto).

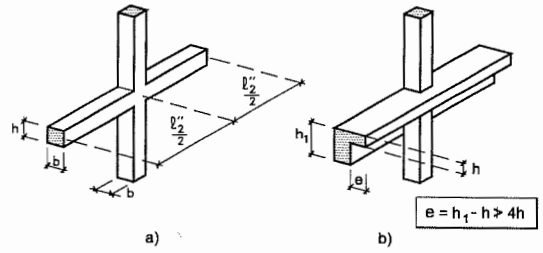


Figura 19-5

La razón de la toma en consideración de K_t en [19.3] se basa en el hecho de que la flexión de la placa no se transmite directamente toda al pilar por el trabajo de flexión, sino que una parte de ella se hace a través de la torsión de zonas de ancho estimado convencionalmente, tal como se recoge en la figura 19-5.

El cálculo de K_t se indica a continuación. Llamando ℓ_2 al ancho de banda asociado al pórtico virtual de la fila de pilares y c, al ancho de éstos, la distribución de torsiones unitarias se acepta como lineal y se indica en la figura 19-6 b). Si designamos por T la torsión total transmitida al pilar, la ley de torsiones a una distancia x viene dada por

$$T_x = \frac{2T}{\ell_2}\left(1 - \frac{2}{\ell_2}x\right)$$

y el momento torsor

$$M_{tx1} = \int_{x_1}^{\frac{\ell_2}{2}} \frac{2T}{\ell_2}\left(1 - \frac{2}{\ell_2}x\right) dx = T\left[2\left(\frac{x_1}{\ell_2}\right)^2 - 2\frac{x_1}{\ell_2} + \frac{1}{2}\right]$$

1 Las rigideces se calculan en todos los casos de este Capítulo a partir de las secciones de hormigón sin fisurar y sin considerar las armaduras, como es práctica habitual para el cálculo de esfuerzos en estructura en general.

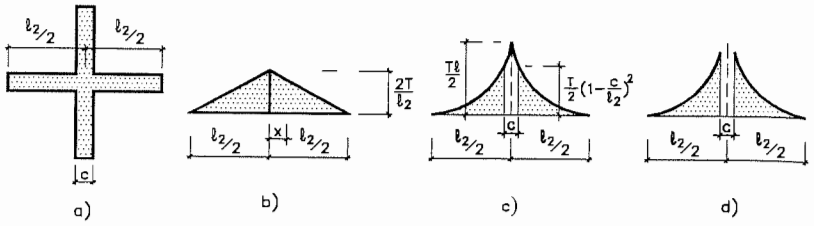


Figura 19-6

que para $x_1 = \frac{c}{2}$ vale

$$M_{t\frac{c}{2}} = \frac{T}{2}\left(1 - \frac{c}{\ell_2}\right)^2$$

El giro debido a la torsión entre $\frac{c}{2}$ y $\frac{\ell_2}{2}$ vale

$$\theta = \frac{T}{GC}\int_{\frac{c}{2}}^{\frac{\ell_2}{2}}\left[2\left(\frac{x}{\ell_2}\right)^2 - 2\frac{x}{\ell_2} + \frac{1}{2}\right]dx = \frac{T}{12}\,\frac{\ell_2\left(1-\frac{c}{\ell_2}\right)^3}{GC}$$

adoptando como módulo de deformación transversal $G = 0{,}5\ E_c$

$$\theta = \frac{T}{6}\cdot\frac{\ell_2\left(1-\frac{c}{\ell_2}\right)^3}{E_c\,C}$$

Los ensayos realizados conducen a un valor θ mucho menor (debido a diversas causas, como distribución real de torsiones, estimación de un valor medio, valor real de C muy ligado a la microfisuración de la pieza, etc.), por lo que la Norma ACI adopta un valor de θ igual a un tercio del teórico.

$$\theta = \frac{T}{18}\cdot\frac{\ell_2\left(1-\frac{c}{\ell_2}\right)^3}{E_c\,C}$$

y la rigidez a torsión que es el valor $K_t = \frac{T}{\theta}$ resulta:

$$K_t = \frac{18\ E_c\,C}{\ell_2\left(1-\frac{c}{\ell_2}\right)^3} \qquad [19.4]$$

[19.4] es válida si las dos luces transversales de los recuadros contiguos son iguales y de valor ℓ_2.

Si las dos luces de los recuadros contiguos son ℓ'_2 y ℓ''_2 (es decir, no son iguales ambas a ℓ_2), la expresión [19.4] se transforma en

$$K_t = \frac{9\ E_c\,C}{\ell'_2\left(1-\frac{c}{\ell'_2}\right)^3} + \frac{9\ E_c\,C}{\ell''_2\left(1-\frac{c}{\ell''_2}\right)^3} \qquad [19.5]$$

Si se trata de un pórtico virtual de pilares de fachada

$$K_t = \frac{9\ E_c\,C}{\ell_2\left(1-\frac{c}{\ell_2}\right)^3} \qquad [19.6]$$

donde ℓ_2 es la luz de la fila de recuadros en sentido transversal a aquél en que se calcula la flexión.

El valor C es una generalización, para secciones rectangulares, del concepto de momento polar de inercia respecto a la rigidez torsional de una sección circular el cual ha sido ampliamente contrastado experimentalmente y puede ser estimado mediante la expresión

$$C = \sum_1^n\left(1 - 0{,}63\,\frac{x}{y}\right)\frac{x^3 y}{3} \qquad [19.7]$$

donde la suma (figura 19-7) se extiende a los n rectángulos que componen la sección transversal de la zona considerada a torsión (figura 19-5). Como [19.7] para una figura compuesta de más de un rectángulo, proporciona un valor conservador, debe calcularse con aquella de las posibles divisiones en rectángulos que conduzcan al máximo valor de C a) y b) en el caso de la figura 19-7. En la fórmula [19.7], para cada rectángulo, x es el menor valor de los x, y, indicados en la figura 19-7 y no la abscisa en particular.

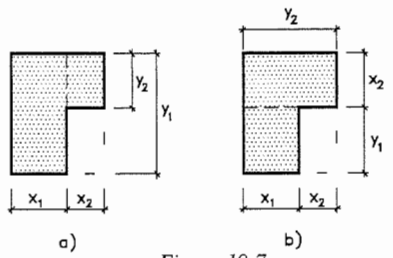


Figura 19-7

Conocido C, las expresiones [19.4], [19.5] ó [19.6] proporcionan el valor de K_t. Llamando K_{ss} a la rigidez del tramo del pilar superior y K_{si} a la del inferior, la fórmula [19.3] se transforma en

$$K_{ce} = \frac{K_t\,(K_{ss} + K_{si})}{K_t + K_{ss} + K_{si}} \qquad [19.8]$$

que nos da la rigidez del pilar equivalente [1].

En el caso particular de pórticos virtuales correspondientes a filas de pilares de fachada que tengan vigas de borde, el valor de K_t obtenido mediante las fórmulas anteriores, [19.4] a [19.6], deberá multiplicarse por la relación

$$\lambda = \frac{I_{vp}}{I_p} \qquad [19.9]$$

donde I_{vp} es el momento de inercia del conjunto de viga y placa, correspondiendo el ancho de placa al del pórtico virtual e I_p es el momento de inercia de la sección de la placa solamente, correspondiente al mismo ancho [2].

Calculando K_{ce}, la expresión [19.2] permite calcular los momentos en vano extremo. Si el apoyo extremo es un muro monolítico con la placa, en lugar de un pilar, en los valores de K_{ss}, K_{si} se considera la rigidez correspondiente. En este caso $\frac{1}{K_t}$ será prácticamente nula. Si el apoyo es un muro de ladrillo o bloques que no coaccione el giro, la rigidez equivalente sería $K_{ce} = 0$.

En el caso del momento en el pilar interior, se toma como valor el mayor de los correspondientes a los dos vanos contiguos al pilar considerado.

1 En sentido estricto, si los pilares tienen capitel, K_{ss} y K_{si} corresponden a las rigideces de los extremos de unión a la placa considerada..

2 El factor tiene en cuenta, de forma aproximada, el incremento de rigidez a torsión introducido por la existencia de la viga longitudinal.

c) *Reparto de los momentos totales de vano y apoyo en bandas de pilares, vigas y bandas centrales*

El reparto de momentos debe hacerse de acuerdo con lo siguiente:

Se define el valor $\alpha = \frac{K_v}{K_p}$ [19.10]

donde K_v es la rigidez de la viga en el sentido en que se calcula la flexión (si existe, caso de fila de pilares de borde); K_p, la rigidez de la placa en dicho sentido tomada con un ancho igual al del pórtico virtual. ($\alpha = 0$ para los pórticos virtuales de pilares interiores)[1]

Con el valor de α se calcula $\alpha \frac{\ell_2}{\ell_1}$ donde ℓ_1 es la luz entre ejes de pilares en el sentido en que se calcula la flexión y ℓ_2 el ancho del pórtico virtual correspondiente.

c-1) Banda de pilares

Momentos negativos

Los momentos negativos en apoyos interiores, expresados en porcentaje de los momentos negativos totales vistos en b), se indican en la Tabla T-19.3.

TABLA T-19.3

$\frac{\ell_2}{\ell_1}$	0,5	1,0	2,0
$\alpha \frac{\ell_2}{\ell_1} = 0$	75%	75%	75%
$\alpha \frac{\ell_2}{\ell_1} \geq 1$	90%	75%	45%

Nota: EHE adopta $\alpha = 0$ en todos los casos, es decir supone que no hay vigas. Para los valores intermedios de $\frac{\ell_2}{\ell_1}$ debe interpolarse linealmente.

Los momentos negativos en apoyos exteriores, expresados en porcentaje de los momentos negativos totales vistos en b) se indican en la Tabla T-19.4.

1 Se entiende por pilares exteriores los extremos de un pórtico. Por pilares interiores, los que soportan vanos a los dos lados. Atención, en cambio, a los términos «bandas de pilares exteriores» y «bandas de pilares interiores» (ver figura 19-1).

TABLA T-19.4

$\frac{\ell_2}{\ell_1}$		0,5	1,0	2,0
$\alpha \frac{\ell_2}{\ell_1} = 0$	$\beta_t = 0$	100%	100%	100%
	$\beta_t \geq 2{,}5$	75%	75%	75%
$\alpha \frac{\ell_2}{\ell_1} \geq 1$	$\beta_t = 0$	100%	100%	100%
	$\beta_t \geq 2{,}5$	90%	75%	45%

Nota: EHE adopta $\alpha = 0$ y $\beta_t = 0$ en todos los casos, es decir supone que no hay vigas.

En la tabla anterior, los valores intermedios deben interpolarse linealmente. El valor β_t viene dado por la expresión

$$\beta_t = \frac{E_{cp}}{E_{cs}} \cdot \frac{C}{I_p} \cdot \frac{G}{E_{cv}} \qquad [19.11]$$

que es la relación de la rigidez torsional de la viga de borde (ver fórmula [19.7]), si existe[1], y la rigidez de flexión de un ancho de placa igual a la luz entre ejes de pilares de la viga de borde. E_{cp}, E_{cs} y E_{cv} son, respectivamente, los valores de los módulos de deformación longitudinal de placa, pilar y viga. Si adoptamos $G = 0{,}5\ E_c$ y $E_{cp} = E_{cs} = E_{cv} = E_c$, como es habitual, [19.11] se transforma en

$$\beta_t = \frac{C}{2\ I_p} \qquad [19.12]$$

siendo I_p el momento de inercia de un ancho de placa igual a la luz entre ejes de apoyo de la viga de borde[2].

Si el apoyo exterior no es un pilar, sino un muro de ladrillo o bloque que no oponga coacción al giro, se tomará $\beta_t = 0$. Si el muro es de hormigón construido monolíticamente con la placa, debe tomarse $\beta_t = 2{,}5$.

En el caso particular de la banda de pilares de un pórtico virtual de pilares de fachada, en que los pilares se sustituyen por un muro corrido, el valor de M_{od} en [19.1] se calculará con la luz ℓ_{1n}, correspondiente a la fila paralela de pilares inmediata a la considerada y el valor α dado por [19.10] se obtendrá considerando el muro como una viga de rigidez infinita.

1 Se entiende la viga de borde, en el borde perpendicular a la dirección del pórtico analizado.

2 Si las luces de la viga de borde a cada lado del pilar exterior considerado no son iguales, se tomará el valor medio de ambas luces.

Si los pilares extremos son alargados, en sentido transversal a la dirección de flexión considerada, y su dimensión en dicha dirección es mayor que 3/4 del ancho del pórtico virtual, los momentos negativos se considerarán repartidos uniformemente sobre el ancho de placa comprendido entre las líneas medias de recuadros paralelas a la dirección de flexión.

Momentos positivos

Los momentos positivos en las bandas de pilares, expresados en porcentaje de los momentos positivos totales vistos en b), se indican en la Tabla T-19-5.

TABLA T-19.5

$\frac{\ell_2}{\ell_1}$	0,5	1,0	2,0
$\alpha \frac{\ell_2}{\ell_1} = 0$	60%	60%	60%
$\alpha \frac{\ell_2}{\ell_1} \geq 1{,}0$	90%	75%	45%

Nota: EHE adopta $\alpha = 0$, es decir supone que no hay vigas.

Si existen vigas entre pilares, la zona de placa de la banda de pilares debe resistir la parte del momento asignado a la banda que no sea resistido por la viga.

Vigas de borde

En las vigas o muros de borde, cuando la flexión se calcula en su misma dirección, se asignará a las vigas el 85% de los momentos de la banda de borde si $\alpha \frac{\ell_1}{\ell_2} \geq 1$. Si $\alpha \frac{\ell_1}{\ell_2} < 1$, se le asignará en la viga una fracción igual a $0{,}85\ \alpha \frac{\ell_1}{\ell_2}$ de los momentos de la banda. La fracción de momentos no asignada a las vigas de borde debe ser asignada a la semibanda de pilares correspondientes.

Independientemente de lo anterior, las vigas deben ser calculadas, además, para las cargas que actúen directamente sobre ellas.

c-2) Bandas centrales

El porcentaje de momentos positivos o negativos no asignado a las bandas de pilares debe ser asignado a las correspondientes semibandas centrales. Cada banda central será calculada para resistir el momento suma de los asignados a las dos semibandas.

En el caso de momentos negativos en el apoyo exterior de la banda, ésta se calculará para un momento flector mínimo en la banda central de $0{,}20\ M_{od}$.

En el caso particular de una banda central perteneciente a una fila de recuadros de borde, si el borde está apoyado en un muro, la banda central será calculada para unos momentos iguales al doble de los correspondientes a la semibanda central correspondiente a la banda de pilares interiores de la fila contigua a la de fachada.

Redistribución de momentos

Los momentos positivos y negativos totales pueden ser alterados hasta en un 10%, siempre que la suma de momentos para el pórtico virtual en la dirección considerada cumpla con [19.1].

19.4.1.2 Cálculo a punzonamiento

Este estado límite es con frecuencia crítico en este tipo de estructura, como comprobación en la zona inmediata a los pilares (fig. 19-8).

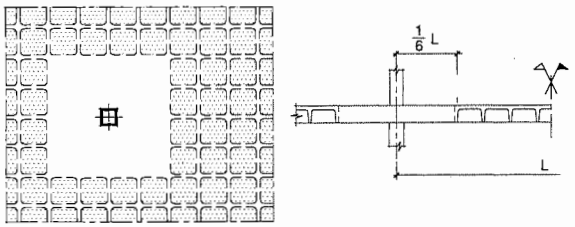


Figura 19-8

El detalle del cálculo se incluye en el Capítulo 41.

19.4.1.3 Cálculo a esfuerzo cortante

Se presentan dos situaciones diferentes:

a) **Comprobación de los nervios en la unión al ábaco.**- Un criterio suficientemente seguro es calcular el esfuerzo resultante total del esfuerzo cortante en todo el perímetro del capitel.

Su valor viene dado por la expresión

$$N'_d = N_d - (\gamma_{fg}\, g + \gamma_{fq}\, q)\, S_{abaco} \qquad [19.13]$$

donde

N_d es el valor de cálculo de la carga transmitida por la planta considerada al pilar. (Para su cálculo, véase el apartado siguiente).

S_{abaco} superficie en planta de la zona macizada de ábaco.

La comprobación se hace repartiendo por igual el valor de N'_d entre el número de nervios que arrancan del ábaco (20 en el caso de la figura 19-8); de acuerdo con lo expuesto en el Capítulo 39[1].

En el caso de pilares en el borde, los zunchos de borde (o vigas de borde si existen) transmiten cargas directas al pilar. Estas cargas y los esfuerzos cortantes que producen deben ser estudiados directamente. En particular los esfuerzos cortantes deben deducirse del valor N'_d y con el valor resultante, se comprobará el esfuerzo cortante en la unión de los nervios (11 en el caso de la fig. 19-9).

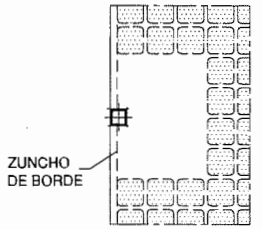


Figura 19-9

b) **Cálculo a esfuerzo cortante de las vigas de borde y de la placa.**- Cuando $\alpha \frac{\ell_2}{\ell_1} \geq 1$, las vigas se calcularán para el esfuerzo cortante resultante de considerar transmitidas a las vigas las cargas de las zonas correspondientes en planta a las líneas de división a 45° a partir de los vértices de los recuadros (figura 19-10). Si $\alpha \frac{\ell_2}{\ell_1} < 1$, los esfuerzos cortantes serán los correspondientes al caso anterior multiplicados por $\alpha \frac{\ell_2}{\ell_1}$. Además de lo anterior, deben sumarse los esfuerzos cortantes producidos por las cargas directamente actuantes sobre las vigas.

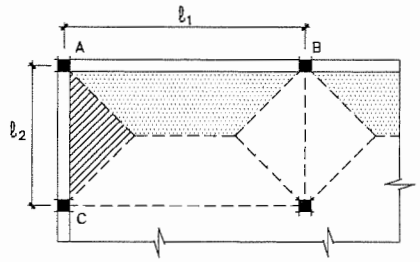


Figura 19-10

1 En INTEMAC, E. González Valle y R. Alvarez Cabal han realizado estudios mediante el Método de Elementos Finitos que indica que algunos nervios pueden presentar concentraciones de esfuerzo cortante que conduce a valores del orden del 15 al 25% del valor medio manejado en el texto.

La placa debe ser capaz de resistir a corte las cargas transmitidas a lo largo de sus bordes, tales como *AB* y *AC* de la figura 19-10 y, en general, los esfuerzos cortantes derivados de considerar el pórtico virtual como viga en cada una de las dos direcciones. Habitualmente, esta comprobación no resulta crítica, pues rige la de punzonamiento, que veremos más adelante. Sin embargo, en recuadros muy alargados, la comprobación a corte puede resultar más exigente que la de punzonamiento.

19.4.1.4 ESFUERZOS AXILES Y MOMENTOS EN PILARES

Los pilares inferiores y superiores, correspondientes a un apoyo interior, deben proyectarse para resistir los momentos

$$M_{dss} = \frac{K_{ss}}{K_{ss} + K_{si}} M_d \qquad [19.14]$$

$$M_{dsi} = \frac{K_{si}}{K_{ss} + K_{si}} M_d \qquad [19.15]$$

donde

M_{dss} = Momento del pilar superior.

M_{dsi} = Momento del pilar inferior.

K_{ss} = Rigidez del pilar superior.

K_{si} = Rigidez del pilar inferior.

M_d = Valor dado por la expresión.

$$M_d = 0{,}07 \left[\left(\gamma_{fg}\, g + \gamma_{fq} \cdot 0{,}5q \right) \ell_2 \ell^2_{1n} - \gamma_{fg}\, g' \left(\ell'_{1n}\right)^2 \right] \quad [1] \qquad [19.16]$$

Para el caso particular en que se use el procedimiento indicado en la figura 19-4, puede, también usarse el valor

$$M_d = \frac{0{,}08 \left[\left(\gamma_{fg}\, g + \gamma_{fq} \cdot 0{,}5q \right) \ell_2 \ell^2_{1n} - \gamma_{fg}\, g' \ell'_2 \left(\ell'_{1n}\right)^2 \right]}{1 \dfrac{1}{\alpha_{eq}}} \qquad [19.17]$$

donde

g y q = carga permanente y sobrecarga del vano más largo de los dos contiguos al pilar considerado.

g' = carga permanente del vano más corto de los dos contiguos al pilar considerado.

1 Como puede apreciarse, el método parte de un desequilibrio parcial, con un vano sin sobrecarga y el otro, con el 50% de su sobrecarga de cálculo.

$\ell_2\, \ell_{1n}$ = valores con el significado dado en la fórmula [19.1] correspondientes al vano más largo de los dos contiguos al pilar considerado.

$\ell'_2\, \ell'_{1n}$ = idem, para el vano más corto.

Para los pilares extremos, los momentos se obtienen a partir del momento negativo en el apoyo exterior de la placa, repartiéndolo en proporción a las rigideces respectivas del pilar superior e inferior. En el caso particular de emplearse el método indicado en la figura 19-4, se tiene:

$$M_{dss} = \frac{K_{ss}}{K_{ss} + K_{si}} \cdot \frac{0{,}65\, M_{od}}{1 + \dfrac{1}{\alpha_{eq}}} \qquad [19.18]$$

$$M_{dsi} = \frac{K_{si}}{K_{ss} + K_{si}} \cdot \frac{0{,}65\, M_{od}}{1 + \dfrac{1}{\alpha_{eq}}} \qquad [19.19]$$

donde α_{eq} viene dado por [19.2]

Las cargas transmitidas a los pilares se calculan mediante la fórmula

$$N_d = (\gamma_{fg}\, g + \gamma_{fq}\, q)\, \ell_1^*\, \ell_2^* + \sum \frac{\Delta M_{1d}}{\ell_1} + \sum \frac{M_{2d}}{\ell_2} \qquad [19.20]$$

donde

γ_{fg} = coeficiente de mayoración de acciones de las cargas permanentes.

γ_{fq} = coeficiente de mayoración de acciones de las sobrecargas.

g = valor de la carga permanente

q = valor de la sobrecarga

y $\ell_1^*\, \ell_2^*$ valen:

Para pilar interior (*A* en la figura 19-11)

$$\begin{cases} \ell_1^* = \dfrac{\ell_1 + \ell'_1}{2} \\ \ell_2^* = \dfrac{\ell_2 + \ell'_2}{2} \end{cases}$$

Para pilar de fachada (*B* en la figura 19-11)

$$\begin{cases} \ell_1^{\,*} = \dfrac{\ell_1 + a'}{2} \\ \ell_2^{\,*} = \dfrac{\ell_2 + \ell'_2}{2} \end{cases}$$

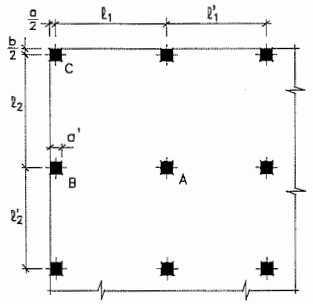


Figura 19-11

Para pilar de esquina (*C* en la figura 19-11)

$$\begin{cases} \ell_1^* = \dfrac{\ell_1 + a}{2} \\ \ell_2^* = \dfrac{\ell_2 + b}{2} \end{cases}$$

a, *a'* y *b* son las dimensiones de las secciones transversales de los pilares considerados en las direcciones de ℓ_1 y ℓ_2.

ΔM_{1d} = Diferencia de momentos negativos de cálculo en cada vano adyacente, considerado en la dirección ℓ_1.

ΔM_{2d} = Diferencia de momentos negativos de cálculo en cada vano adyacente, considerado en la dirección ℓ_2.

$\sum \dfrac{\Delta M_{1d}}{\ell_1}$ = Esfuerzo cortante hiperestático de cálculo del pórtico virtual en la dirección ℓ_2. (La suma se extiende a los vanos contiguos al pilar considerado).

$\sum \dfrac{\Delta M_{2d}}{\ell_2}$ = Esfuerzos cortantes hiperestáticos de cálculo del pórtico virtual en la dirección ℓ_2. (La suma se extiende a los vanos contiguos al pilar considerado).

c) Corrección para el caso en que la sobrecarga es superior a la mitad de la carga permanente

En este caso, la relación

$$\alpha_c = \frac{K_{ss} + K_{si}}{K_{p1} + K_{p2}} \qquad [19.21]$$

(donde K_{ss}, K_{si} tienen los significados de las fórmulas [19.14] y [19.15] y K_{p1} y K_{p2} los dados para α_{eq} en la fórmula [19.21][1] debe ser superior al valor $\alpha_{c,min}$ dado en la Tabla T-19.6.

Si la condición anterior no se cumple en algún pilar, los momentos positivos totales en los vanos del pórtico virtual contiguos a ese pilar deben multiplicarse por el coeficiente

$$\delta_s = 1 + \frac{2\lambda - 1}{4\lambda + 1}\left(1 - \frac{\alpha_c}{\alpha_{c,min}}\right) \qquad [19.22]$$

TABLA T-19.6

$\lambda \dfrac{\text{sobrecarga}}{\text{carga permanente}}$

λ	$\dfrac{\ell_2}{\ell_1}$	Valor de $\alpha = \dfrac{K_v}{K_p}$				
		0	0,5	1,0	2,0	4,0
0,5	0,5-2,0	0	0	0	0	0
1	0,5	0,6	0	0	0	0
	0,8	0,7	0	0	0	0
	1,0	0,7	0,1	0	0	0
	1,25	0,8	0,4	0	0	0
	2,0	1,2	0,5	0,2	0	0
2	0,5	1,3	0,3	0	0	0
	0,8	1,5	0,5	0,2	0	0
	1,0	1,6	0,6	0,2	0	0
	1,25	1,9	1,0	0,5	0	0
	2,0	4,9	1,6	0,8	0,3	0
3	0,5	1,8	0,5	0,1	0	0
	0,8	2,0	0,9	0,3	0	0
	1,0	2,3	0,9	0,4	0	0
	1,25	2,8	1,5	0,8	0,2	0
	2,0	13,0	2,6	1,2	0,5	0,3

19.4.2 MÉTODO GENERAL DE LOS PÓRTICOS VIRTUALES[2]

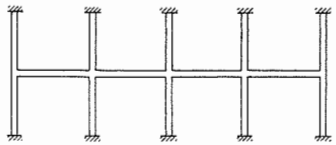
El pórtico virtual ya fue definido en 19.2, tanto para las filas de pilares interiores como para las de pilares de fachada.

1 Si se trata de pilar extremo $K_{p2} = 0$.

2 El método es aplicable a cualquier caso y, en particular, al de placas con voladizos.

19.4.2.1 Acciones verticales

El cálculo de esfuerzos, si no existen acciones horizontales, debe realizarse considerando los entramados virtuales en cada dirección en su conjunto, siendo únicamente aplicables las simplificaciones correspondientes del cálculo general de entramados. Si actúan solamente acciones verticales sobre la estructura, puede introducirse la simplificación para el cálculo de esfuerzos de cada dintel y sus pilares asociados, de suponer éstos empotrados en sus extremos más alejados de la placa considerada (fig. 19-12). Recuérdese que, en cualquier caso, las rigideces reales de los pilares deben sustituirse por las rigideces equivalentes. Debe llamarse la atención sobre dos aspectos relacionados con la rigidez de los pilares. Uno de ellos se refiere a la rigidez a considerar. El otro se tratará en el apartado siguiente.



SIMPLIFICACIÓN PARA EL CÁLCULO DE PÓRTICOS VIRTUALES EN EL CASO DE ACCIONES EXCLUSIVAMENTE VERTICALES

Figura 19-12

De acuerdo con [19.3] ó [19.8], se conoce la rigidez de un pilar equivalente a los dos reales (superior e inferior). Para el método simplificado, y para el general, si actúan sólo cargas verticales, esto es suficiente, pues, en el segundo caso puede hacerse uso de la simplificación de la figura 19-12. Sin embargo, si existen acciones horizontales, la Norma ACI resulta imprecisa, ya que no expresa el reparto de la rigidez equivalente entre los pilares reales, lo que resulta necesario para el cálculo general del entramado.

A nuestro juicio, un criterio válido es repartir la rigidez equivalente entre los pilares superior e inferior en proporción a sus rigideces reales. Aún así a un pilar le pueden corresponder rigideces equivalentes diferentes, al ser considerado como inferior respecto a una placa y como superior respecto a la placa inmediatamente inferior. Un criterio aceptable es tomar la semisuma de ambas como valor para el cálculo.

19.4.2.2 Acciones horizontales

La Norma ACI a partir de su edición de 1995 y la Instrucción EHE indican que, para acciones horizontales, la rigidez equivalente no es la misma que para acciones verticales, dada por [19.3] ó [19.8]. La razón es que, como ya hemos visto, la solución de forjado sin vigas es menos eficaz que otros tipos estructurales para transmitir, por flexión, momentos de las placas a los pilares y necesita realizar por torsión una parte importante de esa transmisión. Si esto es así, para cargas verticales, analizadas mediante el sistema expuesto de bandas cruzadas de pilares y centrales, es evidente que dicho sistema es menos adecuado para acciones horizontales, cuyo sistema de transmisión no es el mismo y, por lo tanto, el concepto de rigidez equivalente, utilizado para el caso de acciones verticales, no es directamente aplicable.

Este hecho ha sido obviado mediante reglas simplificadas, tales como considerar, en el método de los pórticos virtuales, anchos reducidos de placa, a juicio de cada proyectista (1/2 ó 1/3 del real, etc.). Un método más adecuado es el propuesto por PARME, que consiste en adoptar el concepto de rigidez equivalente de la placa para acciones horizontales, definida como

$$K_{ep} = \frac{K_{p1} + K_{p2}}{1 + \dfrac{K_{p1} + K_{p2}}{K_t}} \qquad [19.23]$$

donde

K_{p1}, K_{p2} = rigideces de las placas en los dos vanos contiguos, tal como se definieron en [19.16], es decir, incluyendo la viga de borde si existe[1]

K_t = rigidez a torsión, de acuerdo con [19.4], [19.5] o [19.6].

La expresión [19.23], para K_{ep}, corresponde al conjunto de las dos placas apoyando en el pilar. La de cada una de ellas vale, por tanto,

$$K_{ep1} = K_{ep} \frac{K_{p2}}{K_{p1} + K_{p2}} \qquad [19.24]$$

$$K_{ep2} = K_{ep} \frac{K_{p1}}{K_{p1} + K_{p2}} \qquad [19.25]$$

y con estos valores puede ya entrarse en el cálculo del entramado sometido a acciones horizontales, adoptando para las rigideces de pilares sus valores reales[2].

Una alternativa al método de PARME es proporcionada por los trabajos de DARWALL y ALLEN, basados en estudios mediante elementos finitos [19.4]. De acuerdo con sus resultados, el ancho eficaz equivalente para acciones horizontales viene dado por el valor $\mu\, \ell_2$, viniendo el valor μ proporcionado por la Tabla T-19.7.

1 Si se trata de vano extremo $K_{p2} = 0$..

2 Obsérvese que con las fórmulas [19.24] y [19.25] en general se obtienen dos rigideces, una para cada extremo de cada placa, que pueden ser diferentes. A falta de cálculos más refinados, puede adoptarse para cada vano el valor medio.

TABLA T-19.7

COEFICIENTES μ DE ANCHO EFICAZ EQUIVALENTE PARA ACCIONES HORIZONTALES

Valores c_1 / ℓ_1	Relación ℓ_1 / ℓ_2						
	0,50	0,67	0,80	1,00	1,25	1,50	2,00
0,03	0,19	0,25	0,30	0,38	0,46	0,54	0,66
0,04	0,20	0,27	0,33	0,40	0,49	0,57	0,70
0,05	0,22	0,29	0,34	0,43	0,52	0,60	0,73
0,06	0,23	0,30	0,36	0,45	0,54	0,63	0,75
0,07	0,23	0,31	0,37	0,46	0,56	0,65	0,77
0,08	0,24	0,32	0,39	0,48	0,58	0,66	0,79
0,09	0,25	0,33	0,40	0,49	0,59	0,68	0,80
0,10	0,26	0,34	0,41	0,50	0,61	0,69	0,82
0,11	0,26	0,26	0,42	0,51	0,62	0,71	0,83
0,12	0,27	0,36	0,43	0,53	0,64	0,72	0,84

- c_1 y ℓ_1 son, respectivamente, la dimensión del pilar y la luz en el sentido en que se estudia la flexión, ℓ_2 es la luz en sentido transversal.
- $\frac{c_1}{\ell_1}$ no debe ser superior a 0,12.
- Si el cálculo de esfuerzos ha sido hecho sin considerar el ancho c_1 del pilar, es decir suponiéndolo nulo, los valores de μ indicados en la tabla deben ser multiplicados por $\left(1 - \frac{c_1}{\ell_1}\right)^3$

La figura 19-13 contiene la comparación de valores de μ para un caso típico entre ambos métodos.

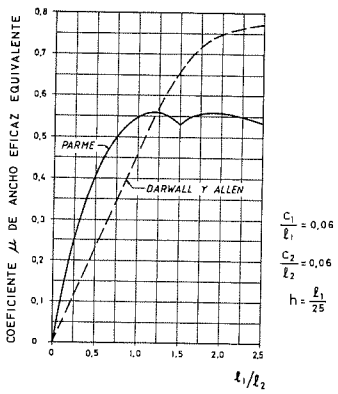
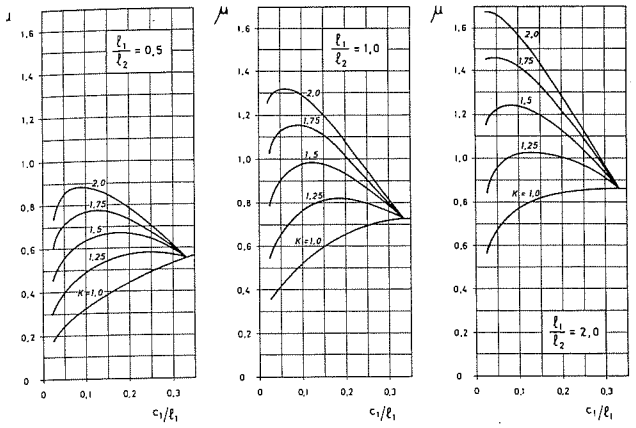


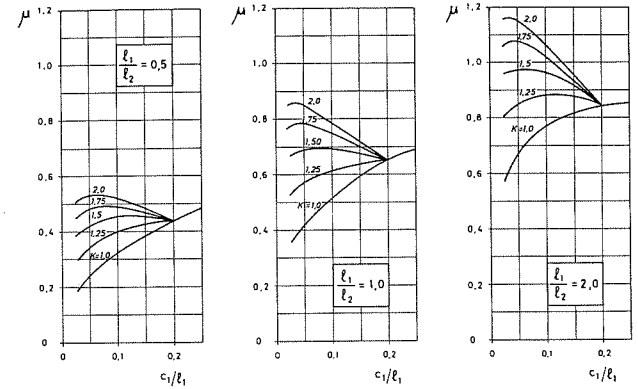
Figura 19-13

Para el caso de placas con ábacos[1], la figura 19-14 contiene ábacos que proporcionan el valor μ para diferentes tipos de ábacos.



$K = \sqrt{\frac{I_{ABACO}}{I_{PLACA}}}$ *(Inercias por unidad de ancho)*

ABACO CON ANCHO IGUAL AL TERCIO DE LA LUZ



$K = \sqrt{\frac{I_{ABACO}}{I_{PLACA}}}$ *(Inercias por unidad de ancho)*

ABACO CON ANCHO IGUAL AL CUARTO DE LA LUZ

Figura 19-14

Como puede apreciarse, comparando la Tabla T-19.6 y la figura 19-14, la solución de disponer ábacos es muy eficaz en cuanto a reducir la deformación horizontal de las estructuras de este tipo frente a acciones horizontales.

1 Caso usual cuando se emplean forjados aligerados con macizados alrededor de los pilares.

Si en el sentido transversal las luces a cada lado de una fila de pilares tienen valores desiguales ℓ_2, ℓ'_2, se toma su valor medio para calcular la relación $\frac{\ell_1}{\ell_2}$, tanto en la Tabla T-19.6 como en los gráficos de la figura 19-14.

Por supuesto el Método de Elementos Finitos permite hacer un cálculo general directo de la estructura, sometida a acciones tanto verticales como horizontales.

19.4.2.3 Alternancia de sobrecarga

Si la sobrecarga variable, no excede al 75% de la carga permanente o es de tal tipo que todos los recuadros se encuentran siempre simultáneamente sometidos a sobrecarga, no es necesario hacer hipótesis de carga y descarga. Si estas condiciones no se cumplen, los momentos máximos de vano puede aceptarse que ocurren para sobrecarga igual al 75% de la total en el vano que se considera y en los situados alternativamente a partir de él en ambos sentidos. Los máximos momentos en apoyo se pueden determinar bajo una sobrecarga igual al 75% de la total, situada en los vanos adyacentes al apoyo considerado. De todas formas, en ninguna sección se adoptará un momento inferior al resultante de aplicar a la estructura la totalidad de la sobrecarga simultáneamente en todos los recuadros[1].

19.4.2.4 Distribución de momentos

En los pilares interiores, se dimensionará el momento negativo con el valor en la cara del pilar (en bandas de pilares y centrales), pero no a más de $0{,}175\ell_1$ a partir del eje del pilar.

En los pilares exteriores con capitel, el momento negativo en dirección perpendicular al borde se dimensionará con el valor correspondiente al punto medio entre la cara del pilar y el límite del capitel.

En los dos casos anteriores, los pilares no cuadrados, circulares o poligonales, se sustituirán por los cuadrados de igual área.

La distribución de momentos positivos y negativos en bandas de pilar, vigas de borde y bandas centrales se hace como en el Método Simplificado visto en 19.4.1.

19.4.3 RIGIDECES, FACTORES DE TRANSMISIÓN Y MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO QUE DEBEN SER CONSIDERADOS EN AMBOS MÉTODOS

a) Caso de losa maciza sin ábacos. La tabla GT-30 proporciona los momentos de empotramiento, rigideces y factores de transmisión para este caso[2].

1 Las simplificaciones anteriores se basan en la consideración de que, simultáneamente, no se pueden presentar los máximos momentos de vano y apoyo y, por lo tanto, puede aceptarse una cierta reducción.

2 Tomado del comentario a la edición de 1983 del ACI-318.

b) Caso de losa maciza con ábacos y de losa aligerada con macizado. La tabla GT-31 proporciona los momentos de empotramiento, rigideces y factores de transmisión para este caso[1].
c) Caso de losa maciza con capiteles. La tabla GT-32 proporciona los momentos de empotramiento, rigideces y factores de transmisión para este caso[1].
d) Caso de losa maciza con ábaco o losa aligerada con macizado y pilares con capiteles. La tabla GT-33 proporciona los momentos de empotramiento, rigideces y factores de transmisión para ábacos o macizados, cuya distancia de eje de pilar a borde de ábaco o macizado es 1/6 de la luz, en los casos en que el espesor del ábaco es 1,25 ó 1,50 veces el canto de la placa[1].

19.4.4 TRANSMISIÓN DE MOMENTOS DE LAS PLACAS A LOS PILARES

Para el cálculo de momentos en pilares, debe considerase que, de acuerdo con lo dicho en 19.4.1 (figs. 19-5 y 19-6), del momento transmitido por la losa al pilar, una parte se transmite directamente por flexión y otra, por tensiones tangenciales. Veamos dos métodos para calcular esta distribución. El detalle y deducción de estas fórmulas se verán en el Capítulo 41, así como su extensión a pilares circulares.

19.4.4.1 Método del ACI

La fracción del momento M'_d transmitido a los pilares directamente por flexión puede ser estimada a partir del momento M_d total transmitido a los pilares (pilar inferior más pilar superior) por la expresión

$$M'_d = \lambda M_d \qquad [19.26]$$

donde λ se indica en la figura 19-15 con los subíndices 1 ó 2 para las flexiones en las direcciones de c_1 ó c_2 y correspondiente a los pilares interiores, de fachada y de esquina, respectivamente[2]. En cada caso, la línea de trazos en la figura representa el perímetro crítico a punzonamiento, que utilizaremos más adelante y que es el situado a d/2 del contorno del pilar. Si el pilar es circular o tiene como sección un polígono regular, se reemplaza la sección real por la cuadrada de área equivalente. Si existe capitel, el perímetro crítico se sitúa a d/2 del borde del capitel.

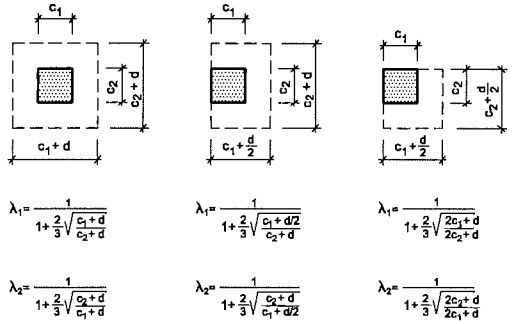


Figura 19-15

1 Tomado del comentario a la edición de 1983 del ACI-318.

2 Obsérvese que para un pilar interior de sección cuadrada $\lambda = 0{,}6$, es decir que es necesario transmitir por torsión el 40% del momento M_d.

Los gráficos de la figura 19-16, dan directamente los valores de λ correspondientes a los tres casos indicados en la figura 19-15.

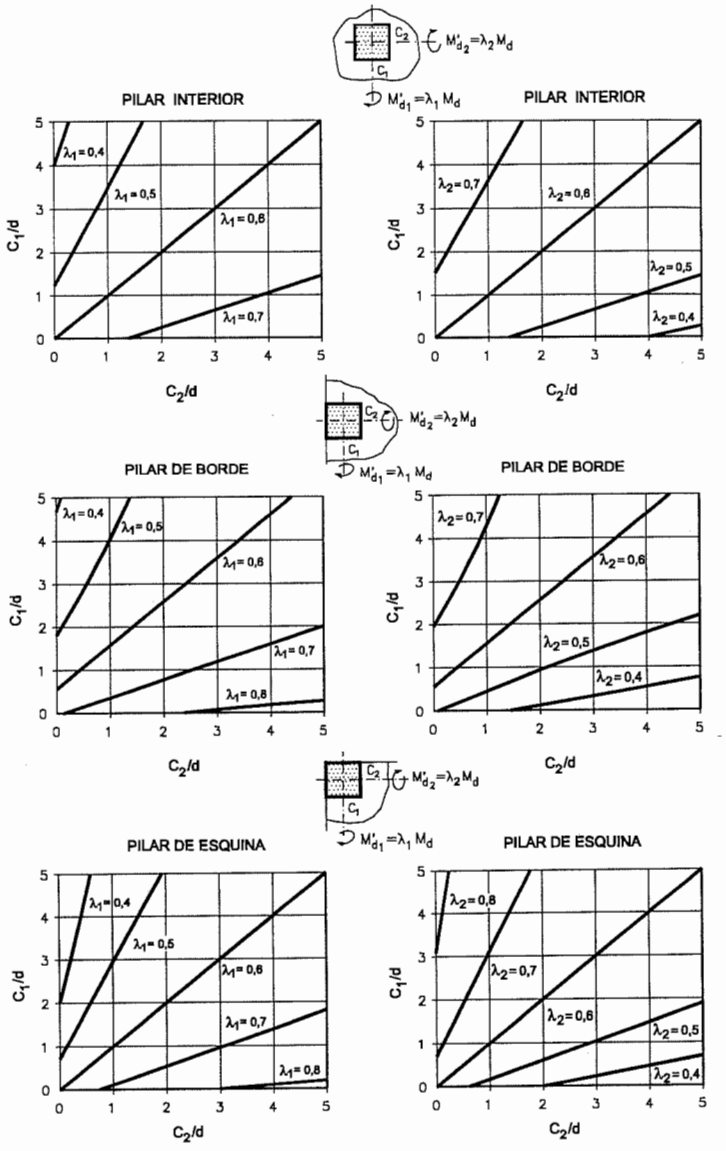


Figura 19-16

El valor λ_1, en el caso de pilar de borde, puede elevarse a 1, siempre que V_d no exceda 0,60 V_{cu} y los valores de λ_1 y λ_2, en el caso de pilares de esquina, pueden elevarse a 1 siempre que V_d no exceda 0,40 V_{cu}. Para el valor λ_2 de los pilares de borde y para los λ_1 y λ_2 de los pilares interiores, dichos valores pueden elevarse un 25% siempre que V_d no exceda 0,3 V_{cu}. V_{cu} en lo anterior es el valor del esfuerzo de punzonamiento que puede ser absorbido por el hormigón. Todos los incrementos anteriores sólo podrán aplicarse si la cuantía geométrica ρ de armadura, dentro de la faja de ancho igual al del pilar más 1,5 h a cada lado (siendo h el canto total del forjado) no supera la cuantía ρ_{cr}, que es la correspondiente al caso en que se alcanza simultáneamente la deformación última del hormigón y el límite elástico característico del acero.

$$\rho_{cr} = \frac{A_s f_{yd}}{f_{cd}\, bd} = 0{,}53 \quad ^{1}$$

19.4.4.2 Método EHE

Siguiendo al MODEL CODE 90, EHE, establece que el momento M_d existente en la unión de placa y pilar (Pilar superior más pilar inferior), se transmite al pilar por flexión y por tensiones tangenciales.

La parte transmitida directamente por flexión es

$$M'_d = \lambda M_d \qquad [19.27]$$

El coeficiente λ viene dado en la Tabla T-19.8

(El valor de M_d, es también aquí la suma de los momentos transmitidos al pilar inferior y al pilar superior).

TABLA T-19.8
VALORES DEL COEFICIENTE λ'

c_1/c'_2	0,5	1,0	2,0	3,0
λ	0,55	0,40	0,30	0,20

en la que:

c_1 Dimensión de la sección transversal del pilar paralela a la dirección de la excentricidad de la carga o a la dirección del pórtico analizado.

c'_2 Dimensión de la sección transversal del pilar perpendicular a la dirección de la excentricidad de la carga o a la dirección del pórtico analizado, en soportes interiores o de esquina y dos veces dicha dimensión si es de fachada[2].

1 La regla procede de ACI 318-95, que maneja valores más altos de V_{cu}, que EHE. Véase el Capítulo 41. La limitación de cuantía tiene como objeto controlar la necesaria ductilidad.

2 Es clara la diferencia de valores de λ entre el método del ACI y el de EHE, que procede del MODEL CODE 90. No debe olvidarse sin embargo que las dos normas establecen perímetros críticos a punzonamiento y valores de resistencia a punzonamiento del hormigón muy diferentes.

19.4.5 VOLADIZOS

Ni la Norma ACI ni la Instrucción EHE contemplan el caso particular de placas con voladizos, que es, sin embargo, de uso frecuente en el práctica.

El primer problema a considerar es el del cálculo y distribución de momentos en el voladizo. Con los momentos flectores totales negativos, resultantes del cálculo de esfuerzos, los momentos en la dirección del vuelo pueden repartirse entre bandas de pilares y centrales en la misma proporción que vimos para los momentos negativos en general (Tabla T-19.2). Como momento en dirección perpendicular al voladizo, se considerará el correspondiente a la banda de pilares en esa dirección.

El segundo problema se refiere a la transmisión de momentos de placa a pilar. Del simple examen de la figura 19-17, se observa que, si la luz del voladizo ℓ_v es pequeña, resulta arriesgado considerar el pilar como «interior». En general, un pilar de este tipo debe considerarse como un pilar de fachada.

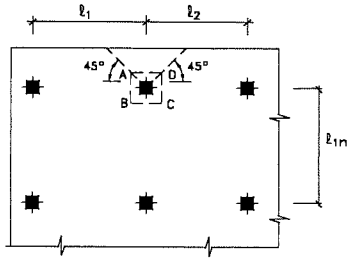


Figura 19-17

Si el momento del voladizo es importante, es claro que el pilar debe ser considerado como interior. Una opinión bastante generalizada es considerar como interior el pilar, a los efectos mencionados, si el momento total del voladizo no es inferior al correspondiente momento negativo total de un vano interior (no extremo) de luz 2/3 la del vano extremo contiguo al voladizo.

Si se aplica el método simplificado, el momento negativo en vano interior vimos que vale $-0{,}65\ M_{od}$ y, si suponemos que el voladizo no tiene cargas en punta y su carga uniforme es igual a la del resto de la placa, se tiene

$$0{,}65\ \frac{(\gamma_{fg}\, g + \gamma_{fq}\, q)\, \ell^2 \left(\frac{2}{3}\ell_{1n}\right)^2}{8} = \frac{(\gamma_{fg}\, g + \gamma_{fq}\, q)\, \ell_2\, \ell_v^2}{2}$$

lo que conduce a $\ell_v \approx 0{,}27\ l_{1n}$, o sea del orden del 25% de la luz entre ejes del vano extremo. Cuando en la realidad haya cargas en punta de voladizo, la luz necesaria será apreciablemente menor.

Debe prestarse atención a que la disposición de un voladizo de este tipo es adecuada desde el punto de vista resistente, pero debe contemplarse también el problema de la deformabilidad, especialmente las deformaciones diferidas.

19.4.6 TORSIONES. TORSIONES EN VIGAS Y ZUNCHOS DE BORDE

Como vimos en 19.4.4 y 19.4.5, la fracción del momento M_d transmitida por torsión a los pilares viene dada por

$$M''_d = (1 - \lambda)\, M_d \qquad [19.28]$$

Esto significa que, a cada uno de los dos elementos resistentes a torsión (ver 19.4.4.1) y, en especial, la figura 19-6, le corresponde un momento torsor[1].

$$M_{t1} = (1-\lambda)\, M_d\, \frac{\dfrac{1}{\ell'_2 \left(1 - \dfrac{c}{\ell'_2}\right)^3}}{\dfrac{1}{\ell'_2 \left(1 - \dfrac{c}{\ell'_2}\right)^3} + \dfrac{1}{\ell''_2 \left(1 - \dfrac{c}{\ell''_2}\right)^3}} \qquad [19.29]$$

$$M_{t2} = (1-\lambda)\, M_d\, \frac{\dfrac{1}{\ell''_2 \left(1 - \dfrac{c}{\ell''_2}\right)^3}}{\dfrac{1}{\ell'_2 \left(1 - \dfrac{c}{\ell'_2}\right)^3} + \dfrac{1}{\ell''_2 \left(1 - \dfrac{c}{\ell''_2}\right)^3}} \qquad [19.30]$$

ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR BIBLIOTECA UNIVERSIDAD DE ALICANTE

donde ℓ'_2 y ℓ''_2 son las luces de los dos recuadros contiguos al pilar considerado en dirección perpendicular a la flexión y c, el ancho del pilar en dicha dirección perpendicular.

Los momentos M_{t1}, M_{t2} no suelen ocasionar problemas en pilares interiores, pero puede ocasionarlos en pilares exteriores, ya que la resistencia a torsión del borde de la placa puede resultar insuficiente. El problema suele ser menos grave si se pueden disponer vigas de borde, pero resulta especialmente importante si no hay vigas de borde. En definitiva, el elemento de borde, sea viga o zuncho embebido en el canto del forjado, debe ser calculado para el momento torsor dado por [19.29] ó [19.30]. Véanse, como ampliación, las referencias (19.5) y (19.6). Préstese atención a lo que se indica en el Capítulo 42 sobre el máximo valor del momento torsor a considerar en el cálculo.

1 Se supone que la rigidez a torsión C de ambas piezas es la misma por serlo la sección transversal. En otro caso hay que afectar a cada tramo de su valor C correspondiente.

19.4.7 DEFORMACIONES

No existe un método general aplicable para el cálculo simple de deformaciones en este tipo de forjados, especialmente para flechas diferidas. Las referencias (19.7) y (19.8) contienen información al respecto. Otro método es el cálculo mediante asimilación a emparrillados, del que hablaremos a continuación. Para luces o cargas grandes, debe tenerse en cuenta que las limitaciones de canto expuestas en 19.3 pueden no ser suficientes para evitar la fisuración de tabiquerías por excesiva deformación del forjado.

19.4.7.1 Método simplificado de Scanlon y Murray

Un método simplificado para el cálculo de las flechas es el desarrollado por SCANLON y MURRAY (19.9), a partir de trabajos previos de NILSON y WALTERS. El método parte de que la flecha en el centro de un recuadro puede calcularse (figura 19-18a)), a partir de las flechas en sus puntos medios *E* y *F* de las bandas de pilares *AB* y *CD*, y posteriormente de la flecha en el punto medio *C* de la banda central *EF*, elásticamente apoyada en las de pilares *AB* y *CD*.

La flecha de cualquiera de dichas bandas, tanto de pilares como central, se calcula con la inercia de su ancho real, evaluada de acuerdo con las fórmulas correspondientes del Capítulo 48.

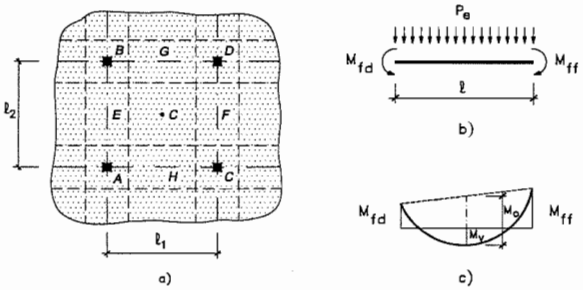


Figura 19-18

según sea el caso, y con una carga equivalente, P_e, por unidad de longitud, tal que

$$\frac{P_e\,\ell^2}{8} = \frac{M_{fd} + M_{ff}}{2} + M_v \qquad [19.31]$$

donde ℓ es la luz libre entre caras de pilares, o entre bordes de capiteles si existen, en la dirección considerada, M_{fd} y M_{ff} son los momentos flectores en los extremos de la banda y M_v, el momento de vano, obtenidos a partir del método simplificado o del de los pórticos virtuales (figura 19-18 b y c).

Conocido el valor de P_e, la flecha en el punto medio de la banda, sea de pilares o central, viene dada por

$$f = \frac{5}{384} \cdot \frac{P_e\,\ell^4}{E_c\,I_c} - \frac{(M_{ff} + M_{fd})\,\ell^2}{16 E_c\,I_e} \qquad [19.32]$$

La flecha en el centro del recuadro viene dada (figura 19-18 a)) por

$$f'_c = \frac{f_E + f_F}{2} + f_{c\,(EF)} \qquad [19.33]$$

donde

f_E = Flecha en el punto medio de la banda de pilares *AB*.

f_F = Flecha en el punto medio de la banda de pilares *CD*.

$f_{c\,(EF)}$ = Flecha en el punto medio *C* de la banda central *EF*.

Si el recuadro no es cuadrado pero tiene simetría de formas y cargas respecto a sus mediatrices *EF* y *GH*, debe calcularse

$$f''_c = \frac{f_G + f_H}{2} + f_{c\,(GH)}$$

y tomar como flecha definitiva en el centro

$$f_c = \frac{f'_c + f''_c}{2} \qquad [19.34]$$

En las bandas de pilares afectadas por ábacos o capiteles, la inercia variable a lo largo de la luz debe tenerse en cuenta. Véanse los GT-9 a 13 y GT-22 a 25.

Por supuesto, las flechas de las bandas deben calcularse teniendo en cuenta el efecto de la fisuración, de acuerdo con lo que se expone en el Capítulo 48.

19.4.7.2 Método de García Dutari y Calavera

Este método, está basado en el desarrollado por L. GARCÍA DUTARI a partir de una aplicación del Método de Elementos Finitos a los forjados sin vigas[1], con un cálculo no lineal de los esfuerzos, que evalúa las flechas teniendo en cuenta el proceso de aplicación de las cargas, las variaciones de edad, humedad y temperatura y la evolución de la fisuración, retracción y fluencia.

1 GARCÍA DUTARI, L.: "EVALUACIÓN DE LA APLICACIÓN DEL MÉTODO DE LOS PÓRTICOS VIRTUALES AL CÁLCULO DE FLECHAS INSTANTÁNEAS Y DIFERIDAS EN FORJADOS SIN VIGAS". Tesis desarrollada en la Cátedra de Edificación y Prefabricación de la Escuela de Ingenieros de Caminos de Madrid, bajo la dirección de J. CALAVERA (19.14).

Independientemente de su valor como método de cálculo no lineal para el cálculo de flechas, el estudio permitió sentar conclusiones. (Véase GARCÍA DUTARI, L; CALAVERA, J. "Evaluación de la aplicación del método de los pórticos virtuales al cálculo de la flecha instantánea y diferida en forjados sin vigas". Cuaderno nº 26 de INTEMAC (19.15)), que contiene un resumen amplio del trabajo y especialmente de la comparación de este método con el de SCANLON y MURRAY expuesto en 19.4.7.1). De acuerdo con ello pueden deducirse las flechas obtenidas por dicho método según lo siguiente:

a) El método de cálculo de flechas basado en las bandas de los pórticos virtuales expuesto en 19.4.7.1, supravalora el valor de las mismas cuando se comparan con las flechas calculadas por el Método de los Elementos Finitos.

b) Las flechas instantáneas y las flechas totales calculadas por medio del método de las bandas de los Pórticos Virtuales, expuesto en 19.4.7.1 pueden ser multiplicadas por el factor 0,67.

c) Las flechas activas calculadas por medio de dicho método pueden ser multiplicadas por 0,75.

19.4.7.3 Deformaciones en el caso de forjados pretensados con armaduras postesas

El cálculo de este tipo de forjados se expone en detalle en el Capítulo 54. El cálculo de deformaciones debe hacerse **sólo para la carga no equilibrada** por el pretensado. Por lo demás vale lo expuesto en 19.4.7.1 y 19.4.7.2 teniendo en cuenta las inercias correspondientes al grado de pretensado empleado.

19.5 ABERTURAS EN LA PLACA

Con independencia de los taladros en la zona de ábaco, tema que se trata en el Capítulo 41, con frecuencia es necesario disponer aberturas en la placa bien por razones de ejecución de la obra, o bien por necesidades de utilización de la construcción.

Salvo análisis más detallados, que pueden permitir ampliar los límites que a continuación se indican, las aberturas han de cumplir las siguientes condiciones:

a) Pueden disponerse aberturas de cualquier tamaño en el área común a dos bandas centrales ortogonales, siempre que el área total de armadura en cada dirección, correspondiente al ancho de la abertura, se disponga adecuadamente en los lados de la abertura y convenientemente ancladas.

b) En el área común de dos bandas ortogonales de pilares, la abertura no tendrá en cada dirección un ancho superior al octavo del ancho de la banda correspondiente. Análogamente al caso anterior un área de armadura igual a la cortada por la abertura debe disponerse en sus lados y anclarse convenientemente.

c) En el área común a dos bandas ortogonales, una de pilares y otra central, la abertura no será en ninguna de las dos direcciones superior al cuarto del ancho de la banda correspondiente y un área igual a la de la armadura cortada deberá disponerse en sus lados y anclarse convenientemente.

En todo lo anterior, se entiende que las aberturas distan lo suficiente de los pilares u otras cargas locales para que no resulte afectado el perímetro de punzonamiento, caso que se analiza en el Capítulo 41.

19.6 CÁLCULO FUERA DE LAS NORMAS

Tanto la Norma ACI-318 como la Instrucción EHE contemplan únicamente el caso de pilares que en planta formen una malla rectangular, con la desviación máxima permisible, ya mencionada, del 10% de la luz en cada sentido.

En la práctica, se presentan con frecuencia situaciones que obligan a adoptar una disposición de pilares muy distinta de la contemplada por las Normas. El proyectista tiene ante esta situación dos caminos:

a) Aceptar asimilaciones de la estructura real a otras que permitan la realización del cálculo. Se abandona, en este caso, el campo cubierto por las Normas, lo cual puede hacerse de acuerdo con el Artículo 1° de EHE, pero recordando que el proyectista lo hace «bajo su personal responsabilidad». Es importante destacar que tales asimilaciones deben ser coherentes, tanto desde el punto de vista del equilibrio estático como de la compatibilidad de deformaciones.

b) Realizar el cálculo mediante programas de ordenador que parten generalmente de la asimilación de la estructura continua a otra discreta (emparrillados, etc.), o bien mediante la aplicación del Método de Elementos Finitos. En relación con este tipo de cálculo, es conveniente puntualizar dos cosas:

   - Su interés es grande, pues permiten al proyectista una gran libertad en la disposición de la estructura. Sin embargo, no debe olvidarse que su precisión no puede nunca ser muy alta, pues la incertidumbre en los valores de los módulos de deformación del hormigón a flexión y torsión, la dificultad de encontrar una relación válida entre el estado de fisuración y la rigidez de las piezas, etc., son todavía muy grandes, incluso en el caso restringido del comportamiento lineal del hormigón armado. Los estudios en régimen no lineal están, desgraciadamente, en fase todavía atrasada. Un desarrollo interesante en el campo no lineales es el expuesto en (19.14).

   - El proyectista debe asegurarse de que la calidad del programa y, sobre todo, sus hipótesis y simplificaciones son adecuadas. El artículo 4.2.3 de EHE es muy rotundo y clarificador al respecto.

Como ejemplo la figura 19-19 corresponde a un programa de este tipo, que calcula los desplazamientos en los nudos y los esfuerzos en la estructura, con cualquier disposición de pilares en planta.

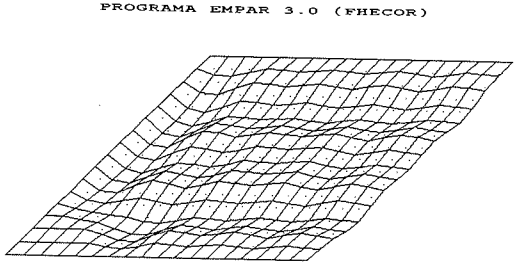


Figura 19-19

Cortesía de FHECOR, S.A.

Es importante observar que este programa, como es habitual, considera la rigidez a torsión de los nervios. Por razones que se explican en profundidad en el Capítulo 42 para cálculos simplificados encaminados a asegurar la seguridad estructural, dicha rigidez debe ser despreciada. (El programa no admite valor cero para esta rigidez, pero basta operar con un valor despreciable). Para otro tipo de cálculos, en particular para calcular flechas, tal rigidez debe ser considerada.

BIBLIOGRAFÍA

(19.1) NICHOLS, J.R. "Statical limitations upon the steel requirements in reinforced concrete flat slab floors". Asce Transactions, 77, 1914.

(19.2) WESTERGAARD, H.M.; SLATER W.A. "Moments and stresses in slabs". ACI proceedings, 17. 1921.

(19.3) ACI-318-95 "Building code requirements for structural concrete". American Concrete Institute. Detroit, 1995.

(19.4) DARVALL, P.; ALLEN, F. "Lateral lod effective width of flat plates with drop panels". ACI Journal. Nov./Dic. 1984.

(19.5) ASDUKIEWICZ, A.; STAROSOLSKI, W. "Reinforced concrete slab-column structures". ELSEVIER. New York, 1990.

(19.6) MULCAHY, J.F.; ROTTER, J.M. "Moment rotation characteristics of flat plate and column systems". ACI Journal. Marzo-Abril, 1983.

(19.7) VIJAYA RANGAN, B.; HALL, A.S. "Moment transfer between slab and edge column". ACI Journal Mayo-Junio, 1983.

(19.8) Subcommittee 2, ACI Committee 209 "Prediction of creep. Shrinkage and temperature effects in concrete structures". Designing for de effects of creep, shrinkage and temperature in concrete structures (SP-27), pp.51-93. American Concrete Institute. Detroit, 1971.

(19.9) Committee ACI 435 "Deflection of two-way reinforced concrete floor systems: State-of-the-art Report" (1979).

(19.10) SCANLON, A.; MURRAY, D.W. "Practical calculation of two-way slab deflections". Concrete International. Noviembre, 1982

(19.11) CALAVERA, J. "Cálculo, construcción y patología de forjados de edificación". INTEMAC. Madrid, 1988.

(19.12) MODEL CODE CEB-FIP FOR CONCRETE STRUCTURES, 1978.

(19.13) RICE, P.F.; HOFFMAN, E.S. "Structural design guide to the ACI Building Code" Van Nostrand. New York, 1979.

(19.14) GARCÍA DUTARI, L. "Evaluación de la aplicación del método de los pórticos virtuales al cálculo de flechas instantáneas y diferidas en forjados sin vigas". Tesis doctoral bajo la dirección de J. CALAVERA. Universidad Politécnica de Madrid. Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Madrid, 1994.

(19.15) GARCÍA DUTARI, L.; CALAVERA, J. "Evaluación de la aplicación del método de los pórticos virtuales al cálculo de la flecha instantánea y diferida en forjados sin vigas". CUADERNOS INTEMAC Nº 26, INTEMAC. Madrid, 1997, 2º trimestre.

CAPÍTULO 20

CÁLCULO DE ESFUERZOS EN PLACAS

20.1. GENERALIDADES

Se define como placa un elemento estructural limitado por dos planos paralelos, cuyo espesor es pequeño respecto a las dimensiones de la pieza en las direcciones paralelas a dichos planos y sometido a cargas normales a su plano medio.

El forjado unidireccional es, en sentido estricto, una placa. Sin embargo, en general, por su constitución, como veremos en el Capítulo 45, resulta escasamente apto para resistir flexiones en la dirección transversal, por lo que, en la práctica, su deformada será una superficie cilíndrica y su cálculo se realiza por tanto según vimos en el Capítulo 18.

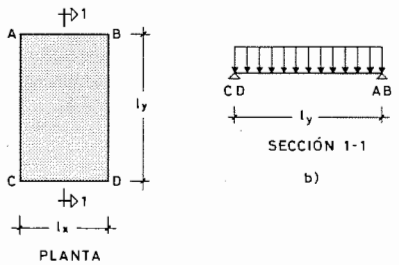


Figura 20-1

Para el caso de placas sustentadas en dos bordes paralelos, *si* $l_x \leq \frac{l_y}{2}$, se calcula como viga y si $l_x > \frac{l_y}{2}$ se deberá considerar un momento $M_x = \frac{1}{5} M_y$, de acuerdo con EHE (Art. 56.1).

Sin embargo, lo frecuente es que el forjado en los extremos AB y CD, paralelos a su dirección principal, tenga su deformación coartada por vigas o muros de fachada (fig. 20-2).

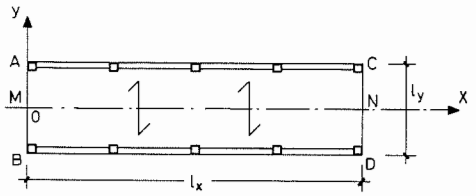


Figura 20-2

La figura 20-3 indica las leyes de momentos en la direccion l_x y l_y, y las flechas a lo largo de la línea media, en función de la distancia x al borde izquierdo. Como se ve, la perturbación creada por los bordes AB y CD es pequeña y se amortigua muy rápidamente.

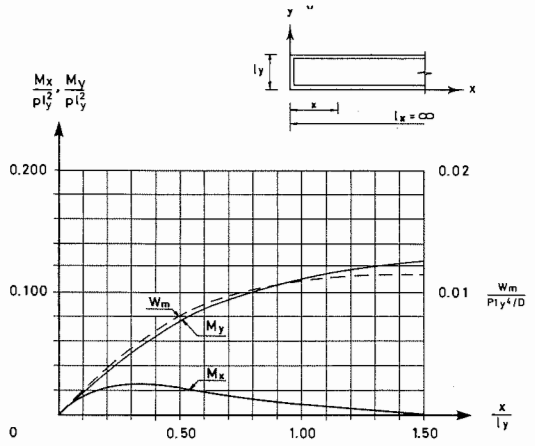


Figura 20-3

20.2. MÉTODOS GENERALES DE CÁLCULO

Los métodos de cálculo de placas de hormigón actualmente disponibles pueden clasificarse en dos grandes grupos, los métodos elásticos y los métodos de cálculo en estado límite último o método en rotura.

Entre estos últimos, seleccionamos a continuación el Método de las Líneas de Rotura, debido esencialmente a K.W. JOHANSEN, y el Método de las Bandas, debido a A. HILLERBORG. El segundo de ellos, mucho menos conocido que el primero, es también a nuestro juicio de un gran interés.

20.2.1. MÉTODOS ELASTICOS

Parten del planteamiento del problema considerando la pieza constituida por un material elástico, homogéneo e isótropo.

Con base en este planteamiento existen dos caminos posibles: Uno es el establecimiento e integración de las ecuaciones diferenciales correspondientes. El trabajo desarrollado en este campo ha sido inmenso. Una referencia clásica es el tratado de TIMOSHENKO citado en la referencia (20.1). Las referencias (20.2), (20.3) contienen las soluciones tabuladas para muchos tipos de carga, condiciones de apoyo y formas de placa.

El inconveniente del método apuntado es la gran complejidad matemática que presenta, especialmente para placas de contorno irregular, apoyos puntuales, placas con huecos, etc.

Una manera de obviar este problema es abordarlo por los métodos de diferencias finitas o de elementos finitos. Este último es hoy, sin duda, el de mayor interés y puede abordar el cálculo de, prácticamente, cualquier forma de placa, sometida a cualesquiera tipos de carga y, en cualesquiera condiciones de contorno.

No debe olvidarse sin embargo, que, bien se aborde el problema por el planteamiento de las ecuaciones, bien a través de diferencias finitas o elementos finitos, la solución; si se basa en las hipótesis clásicas del cálculo lineal, adolecerá de los inconvenientes inherentes a esas hipótesis y que se analizaron en el Capítulo 14.

Naturalmente, una ventaja importante de los métodos elásticos es que proporcionan la posibilidad de calcular las flechas de la placa en condiciones de servicio con razonable aproximación.

a) Placas aisladas

Múltiples trabajos han abordado la publicación de tablas o gráficos para la mayoría de los casos corrientes.

Los gráficos GT-26 a GT-47 contienen las tablas correspondientes a momentos flectores y flechas más frecuentes. La figura 20.4 contiene una presentación sistemática de dichos casos y permite seleccionar el gráfico GT de empleo en cada caso. Las notaciones empleadas en los gráficos, se indican en la figura 20.5.

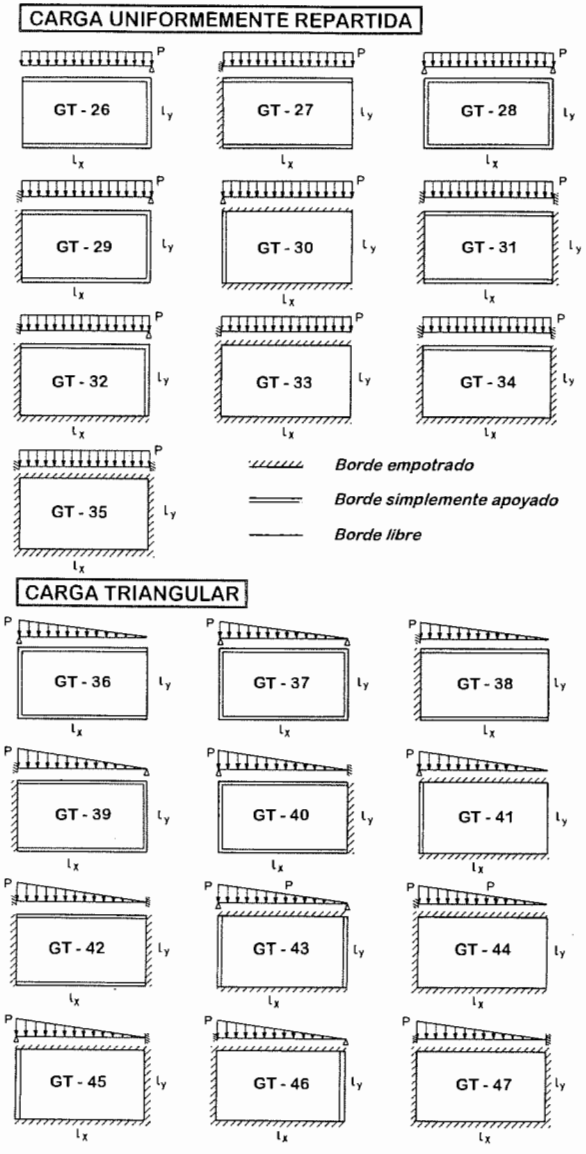


Figura 20-4

NOTACIONES

l_x, l_y Lados de la placa.

P Valor de la carga uniformemente repartida, por unidad de superficie. Valor máximo de la carga, en el caso de carga triangular.

W_o Flecha en el centro de la placa.

$W_{máx}$ Flecha máxima de la placa.

$M_{x,o}$ Momento flector en la dirección de l_x, en el centro de la placa.

$M_{y,o}$ Momento flector en la dirección de l_y, en el centro de la placa.

M_e Momentos flectores en las esquinas de la placa, que actúan a 45° con los lados de la misma.

$M_{x,a}$ Momento flector en la dirección de l_x en el centro de un borde empotrado de longitud l_y.

$M_{y,a}$ Momento flector en la dirección de l_y en el centro de un borde empotrado de longitud l_x.

$M_{x,máx}$ Momento flector máximo en la dirección de l_x.

$M_{y,máx}$ Momento flector máximo en la dirección de l_y.

$M^m_{x,a}$ Momento flector en la dirección de l_x, en un borde empotrado de longitud l_y, y carga nula en el caso de carga triangular variando en la dirección de l_x.

$M^M_{x,a}$ Momento flector en la dirección de l_x, en un borde empotrado de longitud l_y, y carga máxima, en el caso de carga triangular variando en la dirección de l_x.

M^m_e Momentos flectores en las esquinas de la placa, en el caso de carga triangular, correspondientes a las esquinas del borde menos cargado.

M^M_e Momentos flectores en las esquinas de la placa, en el caso de carga triangular, correspondientes a las esquinas del borde más cargado.

M_{xl} Momento flector máximo de vano en un borde libre paralelo a l_x.

M_{yl} Momento flector máximo de vano en un borde libre paralelo a l_y.

W_l Flecha máxima en un borde libre.

$M_{xl,a}$ Momento flector máximo en el empotramiento de un borde libre paralelo a l_x.

$M_{yl,a}$ Momento flector máximo en el empotramiento de un borde libre paralelo a l_y.

$M_{xa,máx}$ Momento flector máximo en la dirección de l_y en un borde empotrado de longitud l_x.

$M_{ya,máx}$ Momento flector máximo en la dirección de l_x en un borde empotrado de longitud l_y.

Figura 20.5

NOTA: En las tablas para el cálculo de placas contenidas desde GT-26 a GT-47, los coeficientes correspondientes deben multiplicarse por los siguientes factores:

Momentos: $p\, l_x^2$

Flechas: $p\dfrac{l_x^4}{D}$

siendo $D = \dfrac{Eh^3}{12\,(1 - \nu^2)}$

donde E es el módulo de deformación del hormigón, h el canto y ν el módulo de Poisson.

En relación con los momentos M_e que aparecen en las esquinas de dos bordes apoyados, son momentos que, de acuerdo tanto con el análisis teórico como con los resultados experimentales, aparecen en las zonas de tales esquinas, en el sentido de la bisectriz interior al ángulo en la cara superior y en sentido ortogonal en la inferior[1]. Los esquemas de armado que se exponen en el Capítulo 55 en función de los momentos máximos de borde y vano cubren ya esos momentos.

Los indicados gráficos GT no proporcionan la distribución de momentos en toda el área de la placa. Ello no es necesario, ya que los esquemas de armado que veremos en el Capítulo 48 cubren dicha distribución a partir de los esfuerzos máximos calculados mediante los gráficos GT.

b) *Placas continuas*

b.1) *Método de KALMANOK.* Un método aproximado es el expuesto por KALMANOK en la referencia (20.2). Para el cálculo de momentos (fig. 20-6) en apoyos, los bordes exteriores se consideran con su carácter real y los interiores como perfectamente empotrados.

La hipótesis de carga en este caso es la correspondiente a carga permanente más sobrecarga en todos los recuadros. Para cada apoyo se toma la semisuma de los momentos correspondientes a los dos recuadros contiguos.

Para el cálculo de los momentos máximos en vano, se emplea el sistema indicado en la figura 20-6. Para el cálculo bajo las cargas g + q/2 en todos los recuadros, los bordes exteriores se consideran con su carácter real y los interiores como perfectamente empotrados. Para las cargas + q/2 y –q/2 en tablero de ajedrez, se consideran las placas como simplemente apoyadas en todos los bordes. Se suman los resultados de ambas hipótesis.

1 Se entiende que tales esquinas tienen su levantamiento impedido, pero los bordes libres están simplemente apoyados.

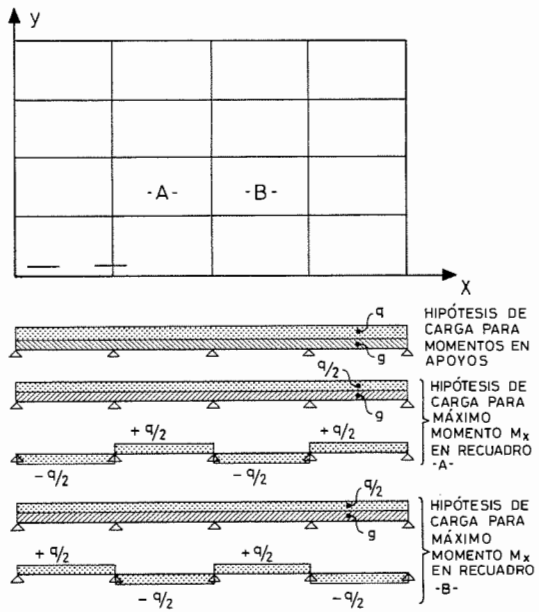


Figura 20-6

b.2) *Método de EH-91*[1]. La Instrucción EH-91 adopta también un método simplificado que consiste en lo siguiente:

– En todo borde con apoyo continuo y en la sección central del recuadro paralela a dicho borde, se considera un momento (negativo y positivo, respectivamente) igual a la semisuma de los correspondientes a esas secciones en la hipótesis de recuadro funcionando como placa aislada con ese borde perfectamente empotrado.

c) *Valores mínimos de los momentos*

La Instrucción EH-91 establece los siguientes valores mínimos con carácter absoluto, para placas sustentadas en su contorno.

– Si la relación de lados es superior a 2,5 y los lados menores están apoyados, se considerará de todas formas en ellos un momento positivo y negativo de valor absoluto igual al tercio del momento correspondiente a la sección central perpendicular a dichos lados.

– En todo borde apoyado, salvo el caso citado en el párrafo anterior, se considera como posible un momento de empotramiento que, en valor absoluto, no será inferior a la mitad del de la sección central paralela al borde considerado ni a la tercera parte de la sección central perpendicular a dicho borde.

1 EHE no trata el tema de esfuerzos en placas más que desde un punto de vista general.

20.2.2. MÉTODOS EN ESTADO LÍMITE

Estos métodos, de desarrollo algo posterior a los métodos elásticos, pero no recientes, representan para las placas una variante en cierto modo análoga a la que los métodos expuestos en el Capítulo 17 representan para las piezas lineales. Existe un apreciable número de métodos de cálculo de placas en estado límite último. Una exposición general excelente del problema y de los diferentes métodos es la realizada por WOOD en su libro citado en la referencia (20.4).

En lo que sigue, expondremos dos métodos que juzgamos los de mayor interés.

20.2.2.1. Método de las líneas de rotura (JOHANSEN)

Debe ser considerado como el pionero en este campo. Su origen es debido a K.W. JOHANSEN (20.5) que, en 1952, expuso las bases del método, aunque posteriormente ha sufrido modificaciones y perfeccionamientos considerables.

El método tiene como ventajas importantes las de su sencillez de planteamiento y su generalidad de aplicación, ya que es válido para cualquier tipo de carga, cualquier forma de placa, con huecos o sin ellos y cualesquiera condiciones de contorno, incluidos los apoyos puntuales. Un inconveniente, común a todos los métodos de cálculo en estado límite último, es que no permiten la comprobación de las flechas en estado de servicio.

Un inconveniente particular de este método es que la armadura necesaria no se calcula a partir de los esfuerzos, sino que son los esfuerzos los que se calculan a partir de una armadura previamente dispuesta. (Por este motivo, este método no se desarrolla en este Capítulo, sino en el Capítulo 48, una vez se hayan expuesto los necesarios temas de dimensionamiento de secciones).

De acuerdo con lo expuesto en el apartado 17.5, el Método de las Líneas de Rotura, es un método de *estado límite superior*.

20.2.2.2. Método de las bandas (HILLERBORG)

El método es debido a A. HILLERBORG que lo publicó por primera vez en 1956 (20.6) y, en forma más amplia, en 1959 (20.7). Ambos trabajos fueron publicados en sueco y, probablemente, esto motivó la escasa difusión inicial del método. CRAWFORD (20.8), en su tesis doctoral, en 1972, analizó el método con lo que su difusión y crítica se iniciaron de una manera efectiva.

WOOD y ARMER (20.9), (20.10), (20.11) hicieron una excelente revisión crítica del método en conexión con una serie de ensayos realizados por la BUILDING RESEARCH STATION en Inglaterra. Finalmente en 1975 HILLERBORG publicó un libro sobre el tema que se indica en la referencia (20.12)[1]

Debe señalarse el excepcional interés del método, tanto por su buena base teórica como por su gran aplicación práctica y, especialmente, por su excelente conexión con el fenómeno físico, aspectos todos ellos que nos han llevado a seleccionarlo en esta exposición.

1 El método, por razones difíciles de analizar, ha tenido una escasísima difusión en España. Debe destacarse el trabajo de M. DOBLARE.

El método es aplicable a cualesquiera condiciones de apoyo y carga, para placas con o sin huecos. Es en cambio de aplicación más compleja al caso de apoyos aislados, aunque HILLERBORG en la referencia (20.12) da procedimientos para ello.

A pesar de que en un primer examen puede parecer simplemente un método aproximado, es un método riguroso de estado límite, concretamente de estado límite inferior, y según ya señalaron WOOD y ARMER, es más que eso, constituyendo (si las bandas se arman exactamente de acuerdo con los momentos) una solución exacta del problema.

Como explicación del método, no suficiente para su aplicación práctica general, expondremos sucintamente su utilización en algunos casos concretos. La publicación (20.12) contiene abundante información complementaria para la aplicación del método a un campo más extenso.

a) *Placa rectangular simplemente apoyada en los cuatro bordes, sometida a carga uniformemente repartida.*

El esquema se indica en la figura 20-7. Se establecen en primer lugar las áreas tributarias de carga de los cuatro bordes, 1, 2 y 3 (fig. 20-7a)). Las cargas en las zonas 1 y 3 se asignan a los bordes l_y y el área 2 a los bordes l_x. Las líneas de separación de áreas, que llamaremos en adelante líneas de discontinuidad, se eligen con total libertad. Los ángulos α no tienen por qué ser iguales, aunque sea evidente que consideraciones de simetría lo aconsejen en este caso. El valor de α no es 45° sino que puede ser elegido dentro de límites fisicamente razonables. Es claro, por ejemplo, que elegir $\alpha = 0$ ó $\alpha = 90°$ conduce a armados de losas, dispuestos por tanto en una sola dirección, que al ignorar los momentos en la otra pueden conducir a fisuraciones graves en condiciones de servicio[1].

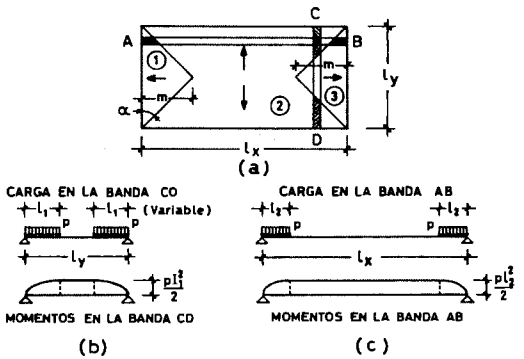


Figura 20-7

Una vez establecidas las líneas de discontinuidad, establecemos dos sistemas de bandas, uno paralelo a l_x, tal como el AB de la figura, y otro paralelo a l_y, como el CD de la figura. El sistema paralelo a l_x, apoya en los bordes l_y y

1 Las líneas de discontinuidad no son líneas de rotura de acuerdo con la terminología del método de JOHANSEN.

recibe solamente las cargas de las áreas tributarias de carga correspondientes a esos lados (1 y 3 en nuestro caso). El sistema paralelo a l_y recibe las cargas de las áreas tributarias de los lados en que apoya, los l_x en este caso.

En la figura 20-7b) se indica el esquema de cargas y el de momentos para las bandas paralelas a l_y y en la figura 20-7c) los correspondientes a las bandas paralelas a l_x.

La figura 20-8 indica la distribución de momentos M_y y M_x a lo largo de las secciones centrales en las direcciones x e y, respectivamente.

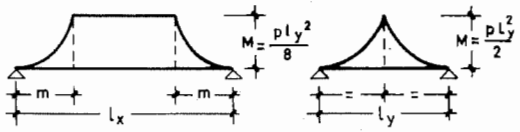


Figura 20-8

Con los esfuerzos resultantes en las bandas, se procede al armado de éstas.

Una simplificación práctica del método es delimitar las áreas tributarias de carga con líneas escalonadas, en lugar de rectas partiendo de los ángulos. (fig. 20-9).

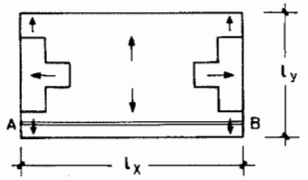


Figura 20-9

Esto simplifica el armado de las bandas, manteniéndolo constante dentro de cada banda. Nótese que con este sistema las zonas de las esquinas son áreas tributarias de los lados l_x y no reparten su carga entre l_x y l_y. Una banda tal como la AB tiene, a efectos de cálculo, carga nula, aunque por supuesto necesite una cierta armadura mínima.

Es inmediato generalizar el método a cualquier otra condición de apoyo, tal como la de empotramiento, y a los casos de cargas no uniformes, puesto que todos se reducen al de vigas de un vano.

b) Placas con continuidad

En el caso en que exista continuidad en los apoyos, al tratarse de un método de cálculo en estado límite no es necesario respetar las relaciones entre momentos de apoyo y vano del análisis lineal. Volviendo al caso de la (fig. 20-7a)), se indican en la figura 20-10 las líneas recomendables de puntos de inflexión para las bandas en ambas direcciones.

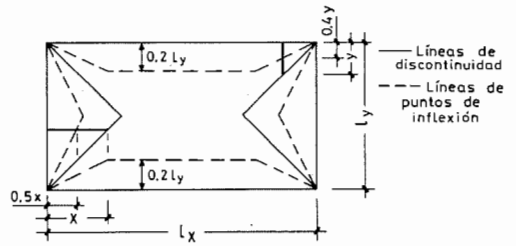


Figura 20-10

Conocidos los puntos de inflexión, es inmediato el cálculo de los momentos de apoyo y vano.

c) Placa simplemente apoyada en dos bordes y empotrada en los otros dos con un hueco rectangular y sometida a carga uniformemente distribuida.

Como ejemplo de la flexibilidad de aplicación del método, consideremos la placa con hueco indicada en la figura 20-11, con dos bordes empotrados y dos apoyados.

En la figura se indican en planta las líneas de discontinuidad elegidas y las áreas tributarias. Para solucionar el problema planteado por el hueco, se disponen dos bandas de 0,5 m de ancho, EF y GH que recogen las cargas de borde y las transmiten a las fajas MN y QR. Sin embargo, el método requiere a veces consideraciones adicionales. En el caso expuesto, por ejemplo, en las bandas 2-2, el momento de empotramiento es superior al que corresponde a la luz del tramo izquierdo de las bandas 4-4 trabajando en voladizo, pero ello conduciría a una flecha excesiva en el borde del hueco. Es más razonable fijar una línea de discontinuidad NGHR, separando la banda GH de ancho 0,5 m que apoye en las bandas MN y QR y calcular el área NGHR como un voladizo empotrado en el borde.

En la figura 20-11 se indican todos los tipos de bandas que aparecen, así como sus esquemas de carga. La situación de los puntos de inflexión junto a los bordes con continuidad debe realizarse de acuerdo con lo señalado en b).

d) Placas no rectangulares

El método puede generalizarse sin dificultad a muchos otros casos. La figura 20-12 muestra algunos casos. En el caso a) se trata de una placa en ángulo agudo con dos bordes apoyados y el otro libre. Las bandas pueden elegirse paralelas al borde libre. En casos como el b) con ángulos obtusos y bordes empotrados, se eligen dos líneas de puntos de inflexión y las bandas se disponen en línea quebrada. Entre los apoyos continuos y el punto de inflexión, son normales al borde y funcionan como voladizos sobre los que apoya el tramo central de banda, paralelo al borde libre. En el caso c) se indica una placa apoyada en cuatro bordes cualesquiera y una de las posibles distribuciones de áreas tributarias y bandas.

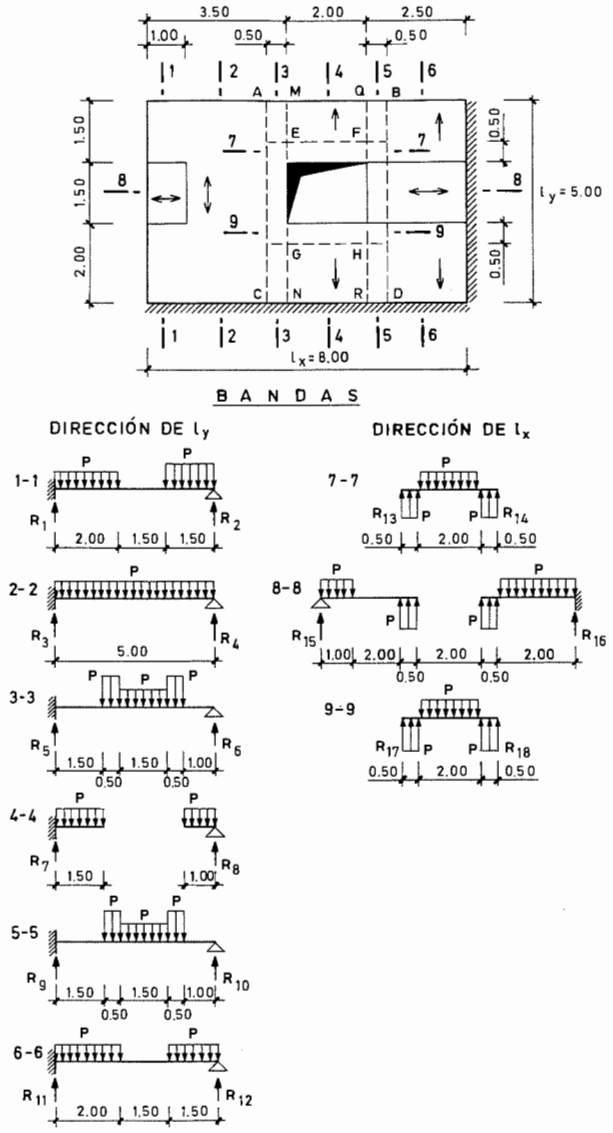


Figura 20-11

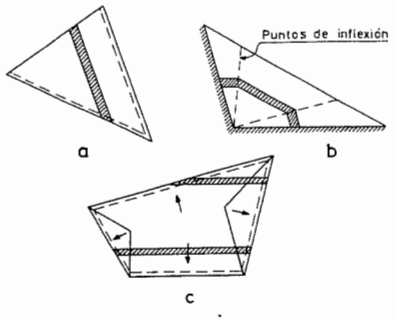


Figura 20-12

e) Cálculo de las deformaciones

El método de HILLERBORG, como todos los de cálculo en estado límite, no permite el cálculo de las flechas en estado de servicio. Estas pueden, o bien estimarse mediante algunas hipótesis simplificadas, o deberán en otro caso calcularse en hipótesis elásticas.

20.3. ESFUERZOS CORTANTES

Aunque los esfuerzos cortantes no suelen ser críticos en las placas (no así los de punzonamiento en el caso de apoyos aislados), deben de todas formas ser comprobados, por lo que interesa su cálculo.

El reparto de cargas hacia los apoyos, base del cálculo de las reacciones y esfuerzos cortantes, puede estudiarse, para casos particulares, mediante el planteamiento general de la ecuación diferencial de equilibrio de la placa. Para algunos casos, los valores están tabulados. Véanse referencias (20.2) y (20.3).

Para las necesidades prácticas suele ser suficiente el criterio de reparto indicado en la figura 20-13, habitual en muchos proyectistas y recogido por JIMÉNEZ MONTOYA, MESEGUER y MORÁN (20.14).

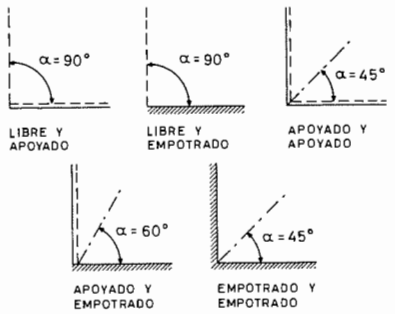


Figura 20-13

La aplicación de los criterios de la figura 20-13 a los casos más habituales conduce a los esquemas indicados en la figura 20-14.

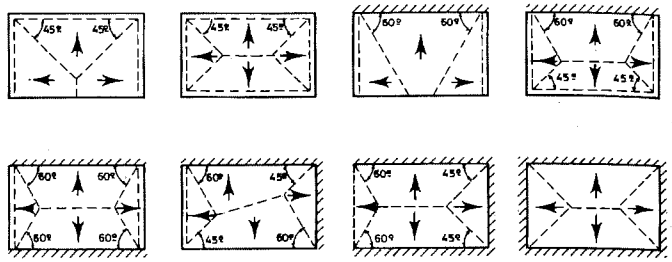


Figura 20-14

20.4. CASO DE CARGAS CONCENTRADAS

Estudiaremos con carácter general el caso de la placa sustentada en dos bordes paralelos, pues los demás casos se asimilan fácilmente a éste.

En primer lugar, el área de carga debe referirse al plano medio de la placa, de acuerdo con lo que se indica en la figura 20-15, lo cual se realiza a 45°.[1]

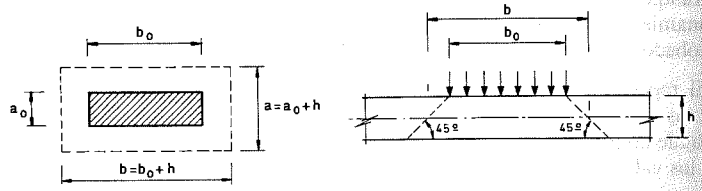


Figura 20-15

Conocido el valor b de carga, se define un valor b_e del ancho eficaz, correspondiente a una banda de ancho b_e que se supone resiste enteramente la carga (fig. 20-16). Dicha banda se calcula con el mismo tipo de sustentación que tenga la placa.

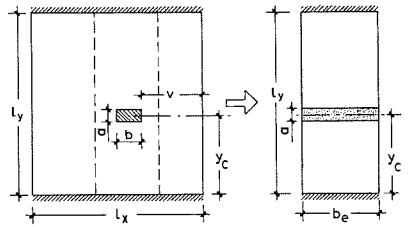


Figura 20-16

1 El reparto a 45° se realiza, si existe solado sobre la placa, desde la cara superior del solado.

La anchura eficaz b_e es función de las siguientes variables:

l_x = longitud del borde sustentado.

l_y = longitud del borde libre.

y_e = distancia del centro de la carga al borde sustentado más próximo.

b = dimensión, paralela al borde sustentado, de la zona de aplicación de la carga, referida al plano medio de la placa.

v = distancia del borde de la zona de actuación de la carga al borde libre más cercano de la placa.

K = coeficiente dependiente del grado de empotramiento de los apoyos:

K = 1 con apoyos articulados o apoyados.

$K = \frac{1}{2}$ con apoyos biempotrados.

$K = \frac{2}{3}$ en los casos intermedios.

La determinación de b_e, *que nunca será inferior a b*, se hace de acuerdo con lo que se indica a continuación.

a) La carga actúa en el centro de la luz libre de la placa $y_e = \frac{l_y}{2}$

a-1) Si está también centrada respecto al ancho l_x, se tomará para b_e el valor b_1

$$b_1 = \frac{b + K\,l_y}{l_x + K\,l_y} \cdot l_x \qquad \text{si } l_x \le 3K\,l_y$$

$$b_1 = \frac{3}{4}b + \frac{3}{4}K\,l_y \qquad \text{si } l_x \ge 3K\,l_y$$

a-2) Si la carga no está centrada respecto a l_x, se tomará para b_e el menor de los valores siguientes:

– El que corresponda del caso a-1).

– El que corresponda de los dos siguientes:

$$b_1 = \frac{b + \frac{1}{3}K\,l_y}{l_x + \frac{1}{3}K\,l_y} \cdot l_x + v \qquad \text{si } l_x \le K\,l_y$$

$$b_1 = \frac{3}{4}b + \frac{1}{4}K\,l_y + v \qquad \text{si } l_x \ge K\,l_y$$

b) La carga no actúa en el centro de la luz libre de la placa $y_e \neq \frac{l_y}{2}$

Se calcula el valor b_1, correspondiente del caso a). La anchura eficaz b_e será

$$b_e = b_1 - (b_1 - b) \left[1 - 2 \frac{y_e}{l_y}\right]^2$$

En la banda eficaz se considerará un momento transversal igual a

Si $l_x \leq 3\, l_y$ $\qquad M_{tx} = \dfrac{M_y}{1 + 4 \dfrac{b}{l_x}} \nless 0{,}1\, M_l$

Si $l_x \geq 3\, l_y$ $\qquad M_{tx} = \dfrac{M_y}{1 + \dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{b}{l_y}} \nless 0{,}1\, M_l$

donde

M_{tx} = momento transversal, por metro, a una distancia y del borde sustentado.

M_y = momento longitudinal, por metro, a una distancia y del borde sustentado.

M_l = momento longitudinal, por metro, en la sección en que actúa la carga (M_l es el valor máximo de M_y).

Si la banda eficaz alcanza al borde libre de la placa, se considerará un momento negativo en todo el borde, igual al 10 por ciento del momento longitudinal que se produciría en el centro de la luz si la carga actuase en dicha sección. Este momento se considerará actuando hasta una distancia de dicho borde libre igual al lado menor de la placa. En toda esa zona, se considerará un momento negativo en dirección ortogonal del mismo valor.

BIBLIOGRAFÍA

(20.1) TIMOSHENKO, S.; WOINOWSKY-KRIEGER, S. "Théorie des Plaques et Coques" Beranger. París 1961.

(20.2) KALMANOK, S.A. "Manual para Cálculo de Placas". Interciencia. Montevideo 1961.

(20.3) STIGLAT, K.; WIPPEL, I.H. "Placas". Instituto Eduardo Torroja. Madrid 1968 (Traducción de J. Batanero y F. Morán, Ingenieros de Caminos).

(20.4) WOOD, R.H. "Plastic and Elastic Design of Slabs and Plates". Thames and Hudson. London 1961.

(20.5) JOHANSEN, K.W. "Brudlinieteorier". Kopenhagen 1952.

(20.6) HILLERBORG, A. "Jämviktsteori för armerade betongplattor". 1956.

(20.7) HILLEBORG, A: "Strimlemetoden för plattor pa pelare vinkelplattor". 1959.

(20.8) CRAWFORD, R.L. "Limit Design of Reinforced Concrete Slabs". Proceedings A.S.C.E. Journal of the Engineering Mechanical Division. October 1964.

(20.9) WOOD. R.H.; ARMER, G.S.T. "The Theory of the Strip Method for Design of Slabs". Proceedings of the Institution of Civil Engineers. October 1968.

(20.10) ARMER, G.S.T. "Ultimate Load Tests of Slabs Designed by the Strip Method". Proceedings of the Institution of Civil Engineers. October 1968.

(20.11) ARMER, G.S.T. "The Strip Method: A new Approach to the Design of Slabs". Concrete. September 1968.

(20.12) HILLEBORG, A. "Strip Method of Design". Viewpoint. London 1975.

(20.13) DOBLARE, M. "Nociones de Cálculo de Placas". Universidad Politécnica de Madrid. 1983.

(20.14) JIMÉNEZ MONTOYA, P.; GARCÍA MESEGUER. A.; MORÁN CABRÉ, F. "Hormigón Armado". Gustavo Gili. 13ª Edición. 1991.

CAPÍTULO 21

PANTALLAS Y NÚCLEOS

21.1 GENERALIDADES

En su concepto más elemental, la pantalla (Fig. 21-1) surge como una ménsula empotrada en el terreno y es especialmente apta para resistir acciones horizontales.

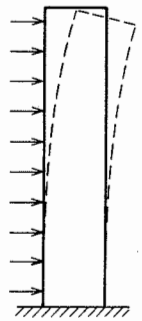


Figura 21-1

En este sentido es un recurso muy eficaz para edificios altos y para todos aquellos que, aún sin alcanzar una gran altura, pueden verse sometidos a grandes acciones horizontales. Es por tanto un sistema estructural de uso frecuente en zonas de fuerte sismicidad y en ciertos tipos de construcciones industriales. El caso de entramados con relleno, que vimos en el Capítulo 10, puede considerarse, en cuanto a su resistencia a acciones horizontales, como intermedio entre el entramado y la pantalla.

21.2 DISPOSICIÓN EN PLANTA

La disposición de las pantallas en planta ha de realizarse de forma que no solamente proporcionen la resistencia necesaria a los esfuerzos de flexión debidos a las acciones horizontales, sino también a los posibles momentos de torsión que estas acciones originen, además de soportar las acciones verticales correspondientes.

Debe tenerse en cuenta que para contrarrestar las fuertes tracciones que las acciones horizontales introducen en las pantallas, interesa que éstas soporten las mayores acciones verticales posibles, por lo que su disposición en planta debe obedecer también a esta consideración.

De acuerdo con la necesidad de resistir acciones horizontales, no son válidas las disposiciones en las que las pantallas en planta sean colineales o concurrentes.

DISPOSICION EN PLANTA	ESTABILIDAD FRENTE A ESFUERZOS		
	$F_x \rightarrow$	$\uparrow F_y$	$\circlearrowleft M_t$
①	INESTABLE	ESTABLE	ESTABLE
②	ESTABLE	ESTABLE	INESTABLE
③	ESTABLE	ESTABLE	INESTABLE
④	ESTABLE	ESTABLE	INESTABLE
⑤	ESTABLE	ESTABLE	INESTABLE
⑥	ESTABLE	ESTABLE	ESTABLE
⑦	ESTABLE	ESTABLE	ESTABLE
⑧	ESTABLE	ESTABLE	ESTABLE
⑨	ESTABLE	ESTABLE	ESTABLE

Figura 21-2

En la figura 21-2, se resumen algunos esquemas típicos y se analiza su estabilidad de comportamiento. (Por supuesto, en el caso de pantallas concurrentes, si la fuerza horizontal pasa por el punto de concurrencia, la solución seria válida).

Los esquemas de la figura 21-2 están realizados en las hipótesis de que la resistencia a las acciones horizontales sea proporcionada exclusivamente por las pantallas y que la resistencia transversal de éstas sea despreciable.

21.3 FUERZAS EN CADA PLANTA

Normalmente, las pantallas están interconectadas por forjados en las diferentes plantas. La rigidez de los forjados en su plano se puede considerar como infinita (Fig. 21-3).

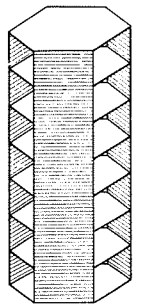


Figura 21-3

Las acciones a tener en cuenta y las fuerzas resultantes en cada planta se calculan de acuerdo con los procedimientos generales vistos en los Capítulos anteriores.

En lo que sigue, supondremos que las deformadas de las distintas pantallas son curvas afines y que, en consecuencia, los corrimientos de las pantallas entre sí guardan la misma relación en las diversas plantas. De acuerdo con ello, la distribución de la fuerza horizontal P actuante sobre cualquier forjado se distribuye entre las distintas pantallas en las mismas proporciones en todas las plantas. Como consecuencia, las leyes de esfuerzos cortantes y de momentos flectores sobre las distintas pantallas en función de la altura son también curvas afines.

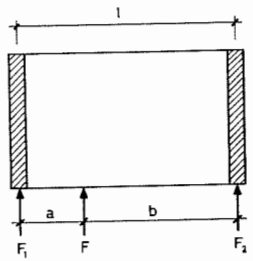
21.4 DISTRIBUCIÓN DE LA FUERZA HORIZONTAL DE PLANTA ENTRE LAS DIVERSAS PANTALLAS

Este es un problema esencial y, en general, complejo, pero su estudio es imprescindible para la concepción y el cálculo de las pantallas. Distinguiremos primero el caso elemental en que la distribución es isostática y, posteriormente, el caso general de distribución hiperestática.

21.4.1. DISTRIBUCIÓN ISOSTÁTICA

Los únicos casos de posible solución isostática son el de dos pantallas paralelas y el de tres pantallas no concurrentes. Para el caso de dos pantallas paralelas (Fig. 21-4) el reparto es inmediato. Nótese que, si la fuerza F tuviese componente en sentido normal a las pantallas, ésta debería ser resistida por otros sistemas.

El caso de tres pantallas no colineales y no concurrentes en definitiva es equivalente al de descomponer una fuerza en tres direcciones dadas y su solución se indica en la figura 21-5a), en la que las tres pantallas, en planta, son las 1, 2 y 3 y P la fuerza horizontal actuante sobre el forjado de la planta.



$$F_1 = \frac{b}{l} F$$

$$F_2 = \frac{a}{l} F$$

Figura 21-4

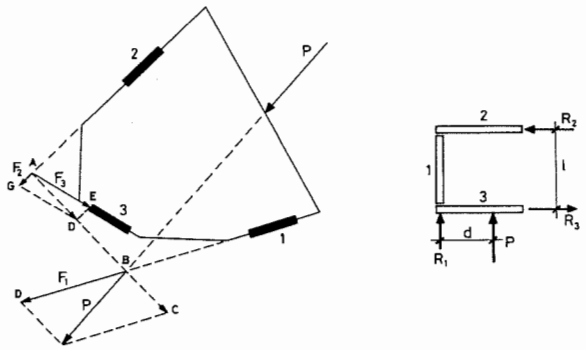


Figura 21-5

La resultante de las fuerzas F_2 y F_3 de las pantallas 2 y 3 ha de pasar por A y ha de estar en equilibrio con P y F_1, luego ha de pasar también por el punto B, intersección de las líneas de acción de P y F_1. Descomponiendo P en BC y BD tenemos $F_1 = BD$ y trasladando BC a AD, se descompone en $AG = F_2$ y $AE = F_3$.

El caso particular de tres pantallas en U, (Fig. 21-5b)) es naturalmente inmediato.

$$R_1 = P$$

$$R_2 = P\frac{d}{l}$$

$$R_3 = -P\frac{d}{l}$$

21.4.2. DISTRIBUCIÓN HIPERESTÁTICA. CASO PARTICULAR DE PANTALLAS PARALELAS

Sea un conjunto de pantallas $P_1, P_2, \ldots P_n$, paralelas entre sí (Fig. 21-6) y sea F la fuerza actuante sobre el forjado de la planta considerada. Partiendo de aceptar que el forjado es infinitamente rígido en su plano y considerando que el desplazamiento de cada pantalla será proporcional a su inercia, es inmediato generalizar la fórmula de flexión compuesta a este problema.

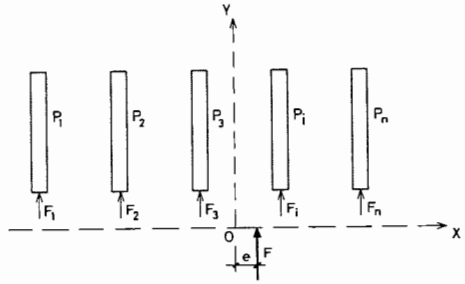


Figura 21-6

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M \cdot y}{I}$$

Llamando x_i a la abscisa de la pantalla P_i, respecto a un origen 0 situado en el c.d.g. de las inercias de las pantallas, y designando:

$$A = \sum I_i$$

$$I = \sum I_i x_i^2$$

se habrá de cumplir

$$\frac{F_i}{I_i} = \frac{F}{\sum I_i} + \frac{F\, e\, x_i}{\sum I_i x_i^2} \qquad [21.1]$$

y por tanto

$$F_i = F\, I_i \left[\frac{1}{\sum I_i} + \frac{e\, x_i}{\sum I_i\, x_i^2}\right] \qquad [21.2]$$

Obsérvese que bajo la acción de la fuerza F, el forjado, en general, se traslada y gira, todo ello en su plano.

La abscisa x_o, del eje de giro se deduce de [21.2] obligando a que una pantalla virtual con $x_i = x_o$, tenga una fuerza $F_i = 0$, de donde

$$x_o = \frac{\sum I_i x_i^2}{e \sum I_i} \qquad [21.3]$$

Si F tiene como abscisa el c.d.g. de las inercias de las pantallas, la rotación es nula y [21.2] al ser e = 0 se transforma en

$$F_i = \frac{F\, I_i}{\sum I_i} \qquad [21.4]$$

Un caso particular importante es el indicado en la figura 21-7 que representa un edificio de pantallas y entramados, con una junta de dilatación.

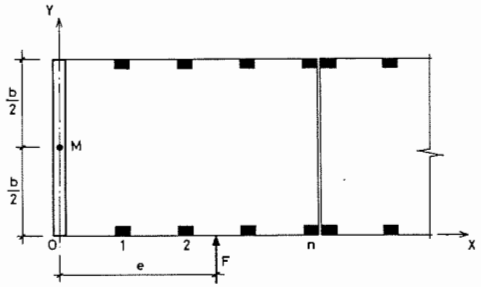


Figura 21-7

Supongamos que es I_o la inercia de la pantalla, que suponemos infinita frente a la de los pilares.

Bajo la acción de F, el forjado gira alrededor del punto medio M de la pantalla.

La fuerza correspondiente a un pilar de abscisa x_i e inercia I_i será proporcional a ambas magnitudes, es decir

$$F_i = k\, x_i\, I_i \qquad [21.5]$$

Planteando las ecuaciones de equilibrio, se tiene

$$\sum F_i = F$$

$$\sum F_i\, x_i = F\, e$$

De [21.5] se deduce

$$\sum k\, x_i^2\, I_i = F\, e$$

de donde

$$k = \frac{F\, e}{\sum x_i^2\, I_i} \qquad [21.6]$$

y por tanto, para el pilar de abscisa x_i

$$F_i = \frac{F\, e\, x_i\, I_i}{\sum x_i^2\, I_i} \qquad [21.7]$$

La fuerza correspondiente a la pantalla será

$$F_o = F - \sum F_i$$

y sustituyendo

$$F_o = F\left(1 - \frac{e \sum x_i\, I}{\sum x_i^2\, I}\right) \qquad [21.8]$$

Si se suponen los n pilares iguales y equidistantes a distancia l y la fuerza centrada respecto a la fachada (caso del viento, por ejemplo) resulta $e = \frac{n\, l}{2}$ y realizando las sumas indicadas en [21.8], se obtiene

$$F_o = F\left(1 - \frac{3n}{2\,(2n+1)}\right)$$

Si $n = 1$ $\qquad F_o = 0{,}5\ F$

Si $n \to \infty$ $\qquad F_o = 0{,}25\ F$

Como se ve, la eficacia de la pantalla es en este caso relativamente escasa.

21.4.3. DISTRIBUCIÓN HIPERESTÁTICA. MÉTODO DE LIN PARA EL CÁLCULO DE LA DISTRIBUCIÓN DE LA FUERZA HORIZONTAL ACTUANTE EN UNA PLANTA ENTRE LAS DIFERENTES PANTALLAS EN CUALQUIER POSICION[1]

Sea un grupo de pantallas de forma cualquiera cuya sección horizontal se representa en la figura y que están interconectadas en cada planta por forjados, que pueden considerarse como infinitamente rígidos en su plano. Emplearemos las notaciones siguientes (Fig. 21-8).

$0''_1 - 0''_2$ = Ejes principales de inercia de la sección de cualquier pantalla, pasando por su centro de gravedad 0''.

OX, OY = Ejes paralelos a los principales de inercia del grupo de pantallas, pasando por el centro 0 de rotación del grupo. Si 0 coincide con el c.d.g. del grupo, OX, OY son los ejes principales.

OX', OY' = Sistema convencional de ejes elegido para el cálculo, con origen arbitrario 0'.

φ = Ángulo de OX con $0''_1$. Se considera positivo cuando se lleva OX a coincidir con $0''_1$ en sentido contrario a las agujas del reloj.

Δ = Ángulo de O'X' con OX. Se considera positivo cuando se lleva OX' a coincidir con OX en sentido contrario a las agujas del reloj.

1 Este método fue desarrollado por T. Y. LIN en 1951 y constituyó la primera solución rigurosa del problema (21.1). Probablemente hasta los trabajos posteriores de F. R. KHAN en los años 60, no se realizó un avance de parecida importancia. Hemos elegido este método por su gran visualización del problema estructural planteado. Para cálculo con ordenador es mejor el tratamiento matricial por ejemplo, de S. MEDWADOWSKY (21.2). Ver también un planteamiento matricial con programas en el trabajo de A. RECUERO y J. P. GUTIÉRREZ JIMÉNEZ (21.3). Los programas del tipo de los expuestos en 13.6 resuelven también el problema.

θ = Ángulo de OX' con $0''_1$. Se considera positivo cuando se lleva OX' a coincidir con $0''_1$ en sentido contrario a las agujas del reloj. Se cumple $\theta = \Delta + \varphi$.

R = Fuerza de rigidez de una pantalla cualquiera. Se define como la fuerza horizontal que es necesario aplicar a la sección superior de un tramo de pantalla entre dos forjados para producir respecto a la sección inferior un corrimiento unidad en la dirección de aplicación de dicha fuerza.

Para un tramo empotrado en sus extremos, con sección EI constante,

$$R = \frac{12\,EI}{L^3}$$

Para un tramo con un extremo empotrado y el otro articulado.

$$R = \frac{3\,EI}{L^3}$$

Los valores de R se afectan de los subíndices 1, 2, x, y, x', y', para designar las fuerzas de rigidez a lo largo de los ejes correspondientes.

Para el caso particular de pilares[1] cuya sección sea un círculo o un cuadrado, las rigideces son iguales en cualquier dirección. Si la sección de la pantalla es otra, a los valores R_x, R_y, $R_{x'}$, $R_{y'}$ los designaremos como fuerzas de rigidez esviada en las direcciones respectivas.

R_{xy} = Fuerza de rigidez producto. Es la fuerza horizontal concomitante para un corrimiento unidad, en la dirección perpendicular a la de aplicación de la fuerza.

ω = Centro de aplicación de la fuerza horizontal P actuante sobre el forjado de la planta considerada.

r_1, r_2 = Para cada pantalla, distancias desde 0 a sus ejes $0''_1$, $0''_2$.

J = Momento polar de las fuerzas de rigidez del grupo de pantallas respecto al centro de rotación 0.

$$J = \sum R_1 r_1^2 + \sum R_2 r_2^2$$

donde las sumatorias se extienden a todas las pantallas del grupo.

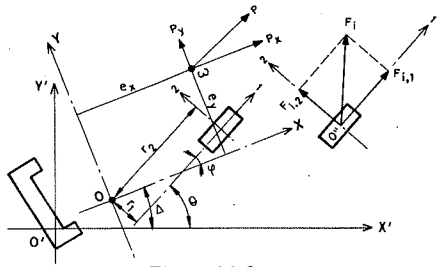


Figura 21-8

1 Aunque el método es especialmenle aplicable a pantallas, su validez es general para elementos verticales de cualquier tipo, en particular pilares.

F'_1 = Fuerza horizontal correspondiente a una pantalla cualquiera i, debida a la acción de la fuerza horizontal P, pasando por el centro de rotación 0.

$F'_{i,1}$, $F'_{i,2}$ = Componentes de F'_1 respecto a los ejes $0''_1$, $0''_2$ de la pantalla correspondiente.

F''_i = Fuerza horizontal correspondiente a una pantalla cualquiera, debida a un momento en 0 actuando en el forjado de la planta considerada.

$F''_{i,1}$, $F''_{i,2}$ = Componentes de F''_i respecto a los ejes $0''_1$, $0''_2$ de la pantalla correspondiente.

F_i = Fuerza horizontal resultante de las F'_i y F''_i.

$F_{i,1}$, $F_{i,2}$ = Componentes de F_i respecto a los ejes $0''_1$, $0''_2$ de la pantalla correspondiente.

P = Fuerza horizontal exterior actuante en el forjado de la planta considerada.

P_x, P_y = Componentes de P respecto a los ejes OX, OY.

e_x, e_y = Excentricidades de P_x, P_y respecto a OX, OY (Medidas por tanto desde el centro de rotación 0).

M = Momento actuando en 0 sobre el forjado de la planta considerada.

$$M = P_y\, e_x - P_x\, e_y$$

Δ_x, Δ_y = Corrimientos diferenciales entre los dos forjados consecutivos del tramo, según OX, OY, debidos a las fuerzas P_x, P_y, respectivamente.

Q'_x, Q'_y = Fuerza resultante para producir un corrimiento unidad del conjunto de pantallas según OX', OY', respectivamente.

Resolveremos el problema en etapas sucesivas.

a) Fuerza de rigidez esviada

Consideremos una pantalla cuya sección se indica en la figura 21-9.

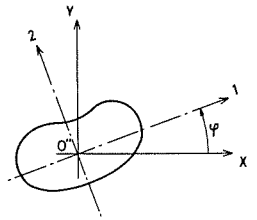


Figura 21-9

Los ejes $0''_1$, $0''_2$ son los principales de la sección y las fuerzas de rigidez relativas a ellos serán R_1 y R_2. Supongamos otro par de ejes ortogonales X, Y, con centro también en 0" y calculemos las fuerzas de rigidez correspondientes.

Apliquemos un corrimiento unitario en dirección X. Ese corrimiento puede obtenerse con suma de dos, de valor cos φ según $0''_1$, y – sen φ según $0''_2$. Las

fuerzas de rigidez correspondientes a esos corrimientos componentes serán R_1 cos φ según $0''_1$ y $-R_2$ sen φ según $0''_2$.

A su vez, estas fuerzas de rigidez componentes pueden descomponerse segun los ejes OX, OY, obteniéndose:

$$R_x = R_1 \cos^2 \varphi + R_2 \operatorname{sen}^2 \varphi \qquad [21.9]$$

$$R_{xy} = R_1 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi - R_2 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \qquad [21.10]$$

y por tanto

$$R_{xy} = (R_1 - R_2) \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \qquad [21.11]$$

Como puede observarse, aunque el corrimiento unidad inicialmente impuesto lo fue en la dirección OX, ha aparecido no solamente una fuerza de rigidez R_x sino otra R_{xy} en sentido perpendicular, que denominamos fuerza de rigidez producto.

Para pantallas o pilares de sección circular o cuadrada $R_1 = R_2$ y, por tanto, $R_{xy} = 0$. Para pantallas de cualquier otra sección $R_{xy} = 0$ para sus ejes principales de inercia solamente.

Análogamente, para un corrimiento unidad en el sentido OY, obtenemos las fórmulas equivalentes a las [21.9], [21,10] y que resultan

$$R_y = R_1 \operatorname{sen}^2 \varphi + R_2 \cos^2 \varphi \qquad [21.12]$$

$$R_{xy} = (R_1 - R_2) \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \qquad [21.13]$$

En la mayoría de los edificios, las pantallas presentan secciones transversales en las que el espesor es despreciable respecto a la longitud, y las pantallas se distribuyen de forma que la resistencia es fundamentalmente proporcionada por las rigideces en las direcciones de los lados más largos de su sección transversal. De acuerdo con ello, en ese caso puede suponerse que R_2 es despreciable frente a R_1 y las fórmulas anteriores adoptan la forma simplificada.

$$R_x = R_1 \cos^2 \varphi \qquad [21.14]$$

$$R_y = R_1 \operatorname{sen}^2 \varphi \qquad [21.15]$$

$$R_{xy} = R_{yx} = R_1 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \qquad [21.16]$$

b) Determinación del centro de rotación

El centro de rotación 0 de un grupo general de pantallas, puede determinarse de acuerdo con lo siguiente:

Elijamos un sistema de ejes OX', OY', cualesquiera[1] y supongamos aplicado al grupo de pantallas un corrimiento unidad en la dirección OX'. Se originarán dos fuerzas de rigidez R'_x y R'_{xy} para cada pantalla, que pueden calcularse mediante las fórmulas [21.9] y [21.10] ó [21.13] y [21.15].

1 Conviene elegir un sistema que simplifique lo más posible los cálculos, como veremos en el ejemplo que se resuelve más adelante.

Hallando la resultante Q'_x de todas las fuerzas R'_x y R'_{xy}, obtendremos el vector correspondiente (Fig. 21-10).

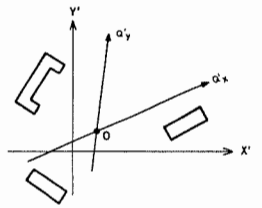


Figura 21-10

Análogamente, para un corrimiento unidad en la dirección OY', obtendremos la resultante Q'_y del sistema de fuerzas R'_y y R'_{yx}. La intersección de los vectores Q'_x, Q'_y es el centro de rotación 0, ya que cualquier fuerza exterior horizontal, P, aplicada en 0, puede descomponerse en dos componentes según Q'_x, Q'_y, por tanto, producirá corrimientos según OX', OY' pero no rotaciones.

c) Determinación de los ejes principales del grupo de pantallas

Como hemos visto anteriormente, un corrimiento impuesto en una dirección x, produce una fuerza R_x en esa dirección y otra R_{xy} en dirección perpendicular. Por tanto, una fuerza aplicada en el centro de rotación producirá un corrimiento sólo en su dirección de aplicación, exclusivamente si esa dirección es un eje principal del grupo. De [21.10] aplicada al grupo de pantallas e igualada a cero, se obtiene

$$\Sigma R_{xy} = \Sigma (R_1 - R_2) \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi = 0 \qquad [21.16]$$

Como $\varphi = \theta - \Delta$, según la figura 21.8, desarrollando [21.16] se tiene:

$$\Sigma (R_1 - R_2) \operatorname{sen} (\theta - \Delta) \cos (\theta - \Delta) = 0$$

que puede escribirse

$$\frac{\Sigma (R_1 - R_2)}{2} \operatorname{sen} 2 (\theta - \Delta) = 0$$

que, a su vez, puede transformarse en

$$\Sigma \frac{R_1 - R_2}{2} (\operatorname{sen} 2\theta \cos 2\Delta - \cos 2\theta \operatorname{sen} 2\Delta) = 0$$

o bien

$$\cos 2\Delta \left(\Sigma \frac{R_1 - R_2}{2} \operatorname{sen} 2\theta \right) - \operatorname{sen} 2\Delta \left(\Sigma \frac{R_1 - R_2}{2} \cos 2\theta \right) = 0$$

de donde

$$\operatorname{tg} 2\Delta = \frac{\sum (R_1 - R_2) \operatorname{sen} 2\theta}{\sum (R_1 - R_2) \cos 2\theta} \qquad [21.17]$$

que nos proporciona el valor de Δ y por tanto nos determina los ejes principales.

De nuevo, si se trata de pantallas largas en las que R_2 es despreciable frente a R_1, se obtiene:

$$\operatorname{tg} 2\Delta = \frac{\sum R_1 \operatorname{sen} 2\theta}{\sum R_1 \cos 2\theta} \qquad [21.18]$$

d) Cálculo de la fuerza horizontal correspondiente a cada pantalla

Sea cualquiera la fuerza horizontal P aplicada al forjado de la planta considerada, podemos siempre sustituirla por una fuerza igual y paralela P, pasando por el centro de torsión 0, y por un momento aplicado en dicho centro, de valor igual al momento de P respecto a 0.

d-1) Fuerza P aplicada al centro de torsión 0. Se producirán únicamente corrimientos en las dos direcciones ortogonales de los ejes principales del grupo de pantallas cuyo valor será

$$\Delta_x = \frac{P_x}{\sum R_x} \qquad [21.19]$$

$$\Delta_y = \frac{P_y}{\sum R_y} \qquad [21.20]$$

(La sumatoria corresponde a las fuerzas de rigidez en las direcciones principales y se extiende a todo el grupo de pantallas. P_x y P_y son las componentes de P respecto a los ejes principales).

Las fuerzas correspondientes a cada pantalla en sus dos direcciones principales, pueden deducirse refiriéndonos de nuevo a la figura 21-9, de acuerdo con lo que sigue.

El corrimiento Δ_x puede descomponerse en dos $\Delta_x \cdot \cos \varphi$ según $0''_1$, y $-\Delta_x \operatorname{sen} \varphi$ según $0''_2$. A estos corrimientos les corresponden unas fuerzas de rigidez $R_1 \Delta_x \cos \varphi$, $-R_2 \Delta_x \operatorname{sen} \varphi$ respectivamente.

Para el corrimiento Δ_y, los componentes son $\Delta_y \operatorname{sen} \varphi$, $\Delta_y \cos \varphi$ y las fuerzas de rigidez $R_1 \Delta_y \operatorname{sen} \varphi$, $R_2 \Delta_y \cos \varphi$, según $0''_1$ y $0''_2$ respectivamente.

Las componentes $F'_{i,1}$, $F'_{i,2}$ de la fuerza F'_i sobre la pantalla i, según sus ejes principales, resultan por tanto,

$$F'_{i,1} = R_1 (\Delta_x \cos \varphi + \Delta_y \operatorname{sen} \varphi) \qquad [21.21]$$

$$F'_{i,2} = R_2 (-\Delta_x \operatorname{sen} \varphi + \Delta_y \cos \varphi) \qquad [21.22]$$

De nuevo, si despreciamos el espesor de la pantalla, $R_2 = F'_{i,2} = 0$.

d-2) Momento aplicado en el centro de torsión. Las fuerzas $F''_{i,1}$, $F''_{i,2}$, componentes de la fuerza F''_i (producida en la pantalla i por el momento M actuando sobre el forjado en el centro de torsión 0) según los ejes $0''_1$ y $0''_2$, son proporcionales a las fuerzas de rigidez R_1, R_2 de cada pantalla y a los corrimientos αr_1 y αr_2 (fig. 21-11) de los ejes $0''_1$, $0''_2$.

Por tanto, llamando k a la constante de proporcionalidad

$$F''_{i,1} = k \, \alpha r_1 \, R_1 \qquad [21.23]$$

$$F''_{i,2} = k \, \alpha r_2 \, R_2 \qquad [21.24]$$

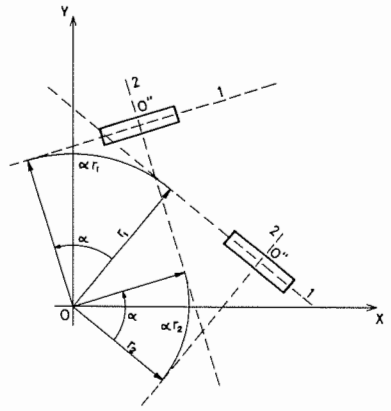


Figura 21-11

La condición de equilibrio impone

$$M = \sum F''_{i,1} \, r_1 + \sum F''_{i,2} \, r_2 \qquad [21.25]$$

y sustituyendo [21.23] y [21.24] en [21.25] obtenemos:

$$k \, \alpha = \frac{M}{\sum R_1 r_1^2 + \sum R_2 r_2^2} \qquad [21.26]$$

y llamando al momento polar del grupo de pantallas

$J = \sum R_1 r_1^2 + \sum R_2 r_2^2$, las componentes de la fuerza F''_i, producida por el momento M en la pantalla i, respecto a sus ejes principales, resultan

$$F''_{i,1} = \frac{M r_1}{J} R_1 \qquad [21.27]$$

$$F''_{i,2} = \frac{M r_2}{J} R_2 \qquad [21.28]$$

Si despreciamos el espesor de la pantalla $R_2 = F''_{i,2} = 0$.

d-3) Fuerza correspondiente a cada pantalla. Basta combinar (fig. 21.8) los resultados obtenidos en d-1) y d-2).

$$F_{i,1} = F'_{i,1} + F''_{i,1} = R_1 \left(\Delta_x \cos \varphi + \Delta_y \operatorname{sen} \varphi + \frac{Mr_1}{J} \right) \qquad [21.29]$$

$$F_{i,2} = F'_{i,2} + F''_{i,2} = R_2 \left(-\Delta_x \operatorname{sen} \varphi + \Delta_y \cos \varphi + \frac{Mr_2}{J} \right) \qquad [21.30]$$

El módulo de la fuerza resultante vale por tanto

$$|F_i| = \sqrt{R_1^2 \left(\Delta_x \cos \varphi + \Delta_y \operatorname{sen} \varphi + \frac{Mr_1}{J} \right)^2 + R_2^2 \left(-\Delta_x \operatorname{sen} \varphi + \Delta_y \cos \varphi + \frac{Mr_2}{J} \right)^2} \qquad [21.31]$$

Si despreciamos el espesor de la pantalla

$$R_2 = F_{i,2} = 0$$

$$|F_i| = R_1 \left(\Delta_x \cos \varphi + \Delta_y \operatorname{sen} \varphi + \frac{Mr_1}{J} \right)$$

e) Ejemplo de aplicación

A continuación y como aclaración de todo lo anterior, exponemos un ejemplo numérico[1].

Tres pantallas en un edificio ocupan en planta la posición indicada en la figura 21-12. Los ejes principales de cada pantalla y las correspondientes fuerzas de rigidez en kN se indican en la figura, así como la fuerza horizontal P de 400 kN actuante en el forjado de la planta en cuestión. Se desea calcular la fuerza horizontal correspondiente a cada pantalla.

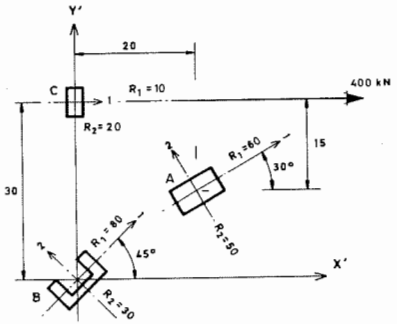


Figura 21-12

1 Tomado de la referencia (21.1) con algunas modificaciones.

e-1) Determinamos las fuerzas de rigidez de las pantallas según los ejes O'X', O'Y' de la figura 21-8, mediante las fórmulas [21.9], [21.10] y [21.11]. Los cálculos se ordenan en la tabla 21.1.

TABLA 21.1 - FUERZAS DE RIGIDEZ SEGÚN O'X' Y O'Y'

Pantalla	R_1	R_2	θ	$\operatorname{sen}^2 \theta$	$\cos^2 \theta$	R'_x	R'_y	R'_{xy}
A	60	50	30	0,250	0,750	57,5	52,5	4,3
B	80	30	45	0,500	0,500	55,0	55,0	25,0
C	20	10	0	0	1	20,0	10,0	0

e-2) Supongamos aplicado un corrimiento unidad según O'X'. Las fuerzas en las tres pantallas se indican en la figura 21-13 a) y han sido calculadas como R'_x y R'_{xy} en la tabla 21.1. Con ello se calcula y sitúa la resultante Q'_x. Análogamente, se sitúa Q'_y (fig. 21-13b)) y por intersección el centro de rotación 0 (fig. 21-13c)).

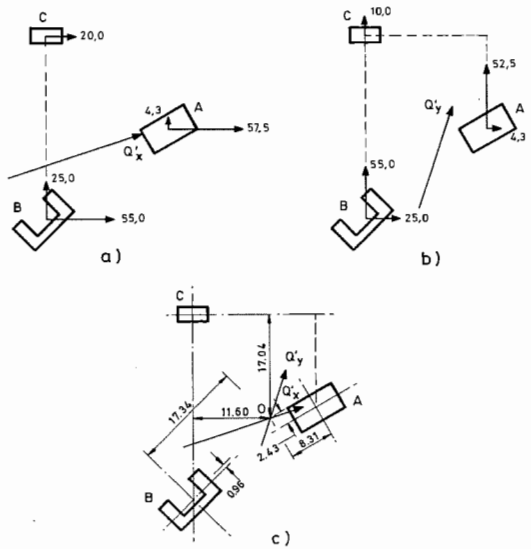


Figura 21-13

e-3) Para situar los ejes principales, aplicamos [21.18] ordenando los cálculos en la tabla 21.2.

TABLA 21.2 - EJES PRINCIPALES DEL GRUPO

Pantalla	$R_1 - R_2$	θ	$(R_1 - R_2)$ sen 2θ	$(R_1 - R_2)$ cos 2θ
A	60-50	30	8,7	5,0
B	80-30	45	50,0	0
C	20-10	0	0	10,0
		Σ =	58,7	15,0

$$\text{tg } 2\Delta = \frac{\Sigma (R_1 - R_2) \text{ sen } 2\theta}{\Sigma (R_1 - R_2) \cos 2\theta} = \frac{58,7}{15,0} = 3,91$$

$$2\,\Delta = 75° \; 40' \qquad \Delta = 37° \; 50'$$

La situación de los ejes principales se indica en la figura 21.14.

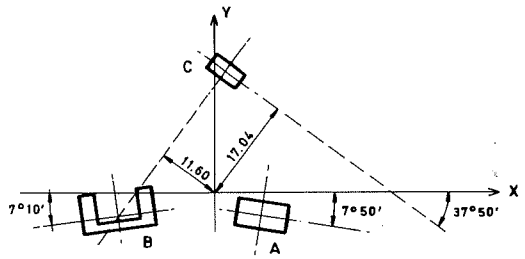


Figura 21-14

e-4) Las fuerzas de rigidez de las pantallas según los ejes principales de grupo, R_x y R_y, se calculan en la tabla 21.3. Como comprobación adicional se verifica que $R_{xy} = 0$ para ambos ejes.

TABLA 21.3 — FUERZAS DE RIGIDEZ SEGÚN OX Y OY

Pantalla	R_1	R_2	φ	R_x	R_y	R_{xy}
A	60	50	– 7° 50'	54,8	50,2	1,3
B	80	30	7° 10'	79,3	30,8	– 6,2
C	20	10	– 37° 50'	16,3	13,7	4,9
			Σ =	155,4	94,7	0,0

Las componentes de P valen:

$$P_x = 400 \cos (-37° \; 50') = 316 \text{ kN}$$

$$P_y = 400 \text{ sen } (-37° \; 50') = -245 \text{ kN}$$

$$\Delta_x = \frac{P_x}{\Sigma R_x} = \frac{316}{155,4} = 2,03$$

$$\Delta_y = \frac{P_y}{\Sigma R_y} = -\frac{245}{94,7} = -2,59$$

El cálculo de F'_1, y F'_2 se ordena en la tabla 21.4, de acuerdo con las fórmulas [21.21] y [21.22].

TABLA 21.4 - CÁLCULO DE FUERZAS DEBIDAS A LA FUERZA HORIZONTAL PASANDO POR EL CENTRO DE ROTACIÓN

Pantalla	R_1	R_2	φ	$F'_{i,1}$	$F'_{i,2}$
A	60	50	– 7° 50'	142,2	– 114,2
B	80	30	7° 10'	135,2	– 84,8
C	20	10	– 37° 50'	64,0	– 8,0

e-5) El momento actuante es M = 400 x 17,04 = 6816 kN x m.

El momento polar vale

$$J = \Sigma (R_1 r_1^2 + R_2 r_2^2)$$

Los cálculos se ordenan en la tabla 21.5, de acuerdo con las fórmulas [21.27] y [21.28].

TABLA 21.5 - CÁLCULO DEL MOMENTO POLAR J

Pantalla	R_1	R_2	r_1	r_2	$R_1 r_1^2$	$R_2 r_2^2$	$F''_{i,1}$	$F''_{i,2}$
A	60	50	2,43	8,31	360	3440	– 49,6	– 142,0
B	80	30	0,96	17,34	70	9020	– 26,3	– 178,0 178,0
C	20	10	17,04	11,60	5820	1350	116,3	39,7
				Σ =	6250	13810		

$$J = 6250 + 13810 = 20060 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$$

e-6) Las componentes de las fuerzas totales sobre cada pantalla, de acuerdo con [21.29] y [21.30] se indican en la tabla 21.6.

TABLA 21.6 - COMPONENTES TOTALES

Pantalla	$F'_{i,1}$	$F''_{i,1}$	$F_{i,1}$	$F'_{i,2}$	$F''_{i,2}$	$F_{i,2}$
A	142,2	– 49,6	92,6	– 114,2	– 142,0	– 256,2
B	135,2	– 26,3	108,9	– 84,8	178,0	93,2
C	64,0	116,3	180,3	– 8,0	39,7	31,7

21.5 DETERMINACIÓN DE LA DIRECCIÓN PÉSIMA DE LA FUERZA HORIZONTAL PARA UNA PANTALLA DETERMINADA

Dada una estructura con un grupo de pantallas, se presenta a veces, en especial cuando se consideran las fuerzas horizontales debidas a las acciones sísmicas, la necesidad de determinar cuál es la dirección que produce la máxima fuerza horizontal en una pantalla determinada.

Sea el grupo de pantallas A, B, C, ... de la figura 21-15 en la que O es el centro de rotación y OX, OY los ejes paralelos a los principales del grupo.

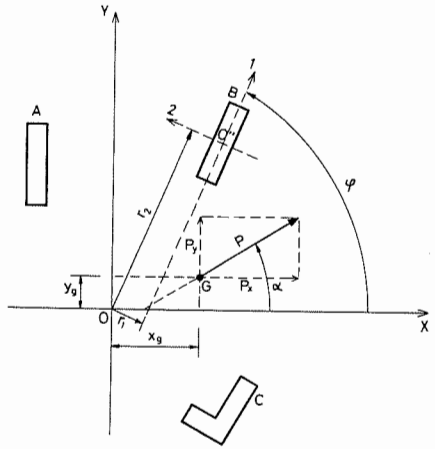


Figura 21-15

Sea G el centro de gravedad de las masas y P el módulo de la fuerza horizontal. Supongamos que es α el ángulo de la dirección pésima de la fuerza para una pantalla determinada, por ejemplo la B.

El momento M respecto al centro de rotación es

$$M = P_y x_g - P_x y_g \qquad [21.33]$$

De acuerdo con [21.27] y [21.28].

$$F''_{B,1} = \frac{Mr_1}{J} R_1$$

$$F''_{B,2} = \frac{Mr_2}{J} R_2$$

$$\Delta_x = \frac{P_x}{\sum R_x} = \frac{P \cos \alpha}{\sum R_x} \qquad [21.34]$$

$$\Delta_y = \frac{P_y}{\sum R_y} = \frac{P \operatorname{sen} \alpha}{\sum R_y} \qquad [21.35]$$

Según [21.21] y [21.22].

$$F'_{B,1} = R_1 (\Delta_x \cos \varphi + \Delta_y \operatorname{sen} \varphi) \qquad [21.36]$$

$$F'_{B,2} = R_2 (\Delta_y \cos \varphi - \Delta_x \operatorname{sen} \varphi) \qquad [21.37]$$

El módulo de la fuerza valdrá por tanto:

$$F = \sqrt{R_1^2 \left[\Delta_x \cos \varphi + \Delta_y \operatorname{sen} \varphi + \frac{Mr_1}{J}\right]^2 + R_2^2 \left[\Delta_y \cos \varphi - \Delta_x \operatorname{sen} \varphi + \frac{Mr_2}{J}\right]^2} \qquad [21.38]$$

y elevando al cuadrado ambos miembros y sustituyendo

$$F^2 = R_1^2 \left[\frac{P \cos \varphi}{\sum R_x} \cos \alpha + \frac{P \operatorname{sen} \varphi}{\sum R_y} \operatorname{sen} \alpha + \frac{Mr_1}{J}\right]^2 + \qquad [21.39]$$

$$+ R_2^2 \left[\frac{P \cos \varphi}{\sum R_y} \operatorname{sen} \alpha - \frac{P \operatorname{sen} \varphi}{\sum R_x} \cos \alpha + \frac{Mr_2}{J}\right]^2$$

Haciendo

$$\frac{d(F^2)}{d\alpha} = 0 \qquad [21.40]$$

se obtiene una ecuación en sen α y cos α que resuelta proporciona el valor de α buscado. Conocido éste, [21.27], [21.28], [21.36] y [21.37] nos dan las componentes de la fuerza pésima en la pantalla B [1].

1 El problema expuesto es extraordinariamente complejo. Efectivamente, el valor de α nos conduce a la fuerza pésima sobre la pantalla B. Sin embargo, como veremos en el Capítulo 38, esto no quiere decir que, para una sección fija de pantalla, ese valor y dirección de la fuerza sea el que conduzca a la *máxima cantidad de armadura.*

21.6 CÁLCULO DE ESFUERZOS EN PANTALLAS CON HUECOS

Con frecuencia en las pantallas resulta necesario disponer huecos para puertas y ventanas y eso introduce modificaciones importantes en su funcionamiento y en sus esfuerzos.

Supongamos una pantalla de espesor e y ancho b constantes, con pisos de igual altura h en toda la pantalla (Fig. 21-16a y b). El problema puede ser estudiado como el de las ménsulas de cantos b_1 y b_2 empotradas en el terreno y conectadas por una serie de dinteles a separación h [1].

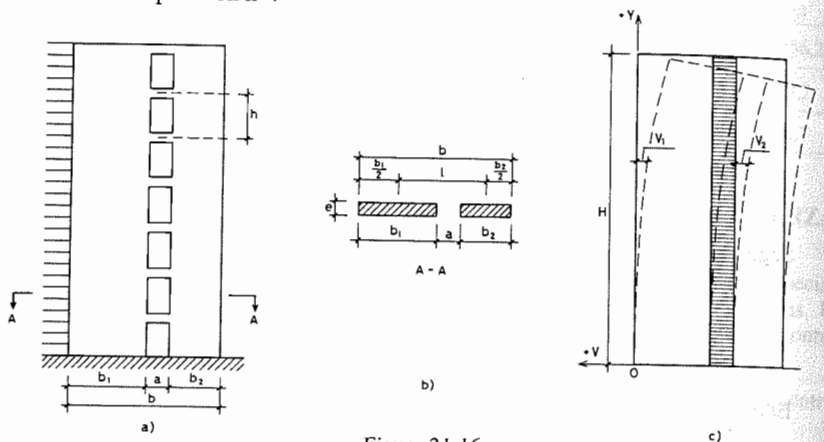


Figura 21-16

La acción en zonas discretas de los dinteles de conexión puede ser asimilada a una distribución continua de la conexión, tal como se indica en la figura 21-16c).

Bajo las acciones horizontales, al ser despreciable el acortamiento de los dinteles, ambas ménsulas tomarán las mismas flechas, es decir v_1 (y) = v_2 (y), cumpliéndose también que las rotaciones serán iguales

$$\frac{dv_1}{dy} = \varphi_1 = \frac{d\,v_2}{dy} = \varphi_2$$

y por tanto también lo serán las curvaturas, luego

$$\frac{d^2v_1}{dy^2} = \frac{d^2\,v_2}{dy^2}$$

y de $\frac{d^2v}{dy^2} = \frac{M}{EI}$, al tener las dos ménsulas el mismo módulo de deformación, se obtiene

$$\frac{M_1}{I_1} = \frac{M_2}{I_2} \qquad [21.41]$$

1 El problema ha sido estudiado por muchos autores. La primera solución es debida a CHITTY (21.4). La solución que aquí se recoge es la debida a ROSMAN (21.5) y BECK (21.6).

Suponiendo los dinteles de rigidez despreciable frente a las ménsulas, aceptaremos que están perfectamente empotrados en ellas y, por lo tanto, el momento flector en el punto medio de la luz libre de los dinteles será nulo. Despreciando por ahora las deformaciones de ambas ménsulas debidas al esfuerzo axil, el esquema de deformación se indica en la figura 21-17. El dintel está biempotrado en las ménsulas y el corrimiento relativo de sus extremos es δ, con lo que los momentos flectores en los extremos valen

$$M_A = \frac{6\,E\,I_v\,\delta}{a^2} \qquad [21.42]$$

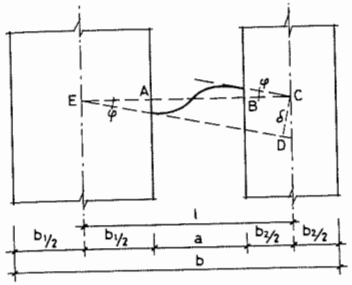


Figura 21-17

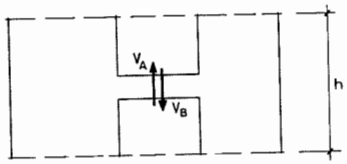


Figura 21-18

$$M_B = -\frac{6\,E\,I_v\,\delta}{a^2} \qquad [21.43]$$

(I_v momento de inercia del dintel)

siendo $\delta = l \operatorname{sen} \varphi$

y como φ es muy pequeño, adoptanto $\delta = l\varphi$, se obtiene:

$$M_A = \frac{6\,E\,I_v\,l\,\varphi}{a^2} \qquad [21.44]$$

$$M_B = -\frac{6\,E\,I_v\,l\,\varphi}{a^2} \qquad [21.45]$$

y los esfuerzos cortantes en los extremos

$$V_A = -\frac{12\,E\,I_v\,l\,\varphi}{a^3}$$

$$V_B = \frac{12\,E\,I_v\,l\,\varphi}{a^3} \qquad [21.46]$$

En la figura 21-18 se representa una zona de pantalla correspondiente a una altura h de piso y la transmisión de cortantes a través del dintel.

Pasando de la distribucion discreta a la continua indicada en la Figura 21-16 c) a una altura dy le corresponde un momento de inercia del dintel diferencial

$$I_v \frac{dy}{h} \qquad [21.47]$$

y de acuerdo con [21.46]

$$V\,dy = \frac{12\,E\,I_v\,dy\,l\,\varphi}{a^3\,h} \qquad [21.48]$$

y llamando

$$k = \frac{12\,E\,I_v\,l^2}{a^3\,h} \qquad [21.49]$$

se obtiene

$$V\,dy = \frac{k}{l} \cdot \varphi\,dy \qquad [21.50]$$

Como φ es el ángulo de la elástica con la vertical (eje OY)

$$\varphi = \frac{d\,v}{d\,y} \qquad [21.51]$$

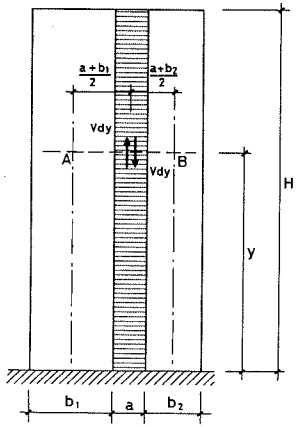


Figura 21-19

Para la ménsula izquierda (Fig. 21-19), las fuerzas de corte V dy producen respecto a su directriz un momento flector a la altura y.

$$\int_y^H V\,dy \left(\frac{a + b_1}{2}\right)$$

En la ménsula derecha, análogamente, el momento producido vale

$$\int_y^H V\,dy \left(\frac{a + b_2}{2}\right)$$

y, por tanto, sobre el conjunto de ambas ménsulas, es decir de la pantalla, las fuerzas cortantes V dy producen un momento

$$M'(y) = \int_y^H V\,l\,dy \qquad [21.52]$$

Este momento es adicional al producido por las acciones horizontales exteriores, que llamaremos $M_o(y)$ y en definitiva la expresión de la ley total de momentos será

$$M(y) = M_o(y) + l \int_y^H V\,dy \qquad [21.53]$$

Como de acuerdo con [21.50] $V\,dy = \frac{k}{l}\,\varphi\,dy$; y, según [21.51] $\varphi = \frac{dv}{dy}$, podemos escribir [21.53] en la forma

$$M(y) = M_o(y) + k \int_y^H dv$$

o bien

$$M(y) = M_o(y) + k\,[v(H) - v(y)] \qquad [21.54]$$

La ecuación diferencial de la elástica será por tanto

$$\frac{d^2\,v}{d\,y^2} = \frac{M(y)}{E\,I_p} \qquad [21.55]$$

en la que $I_p = I_1 + I_2 = \frac{e\,b_1^3}{12} + \frac{e\,b_2^3}{12} = \frac{e}{12}\left[b_1^3 + b_2^3\right]$

Llamando $\alpha^2 = \frac{k}{E\,I_p}$ y teniendo en cuenta [21.54] la ecuación diferencial [21.55] se puede escribir

$$E\,I_p \frac{d^2\,v}{d\,y^2} = M_o(y) + \alpha^2\,E\,I_p\,[v(H) - v(y)]$$

$$\frac{d^2\,v}{d\,y^2} + \alpha^2\,v(y) = \frac{1}{E\,I_p}\,[M_o(y) + k\,v(H)] \qquad [21.56]$$

La ecuación diferencial [21.56] es la correspondiente a la deformada de la pantalla, referida a los ejes (y, v) de la figura 21-16c). v (H) es la flecha en la coronación de la pantalla.

La integración de [21.56] conduce a

$$v(y) = A\,Ch\,\alpha y + B\,Sh\,\alpha y + v_1(y) \qquad [21.57]$$

donde $v_1(y)$ es una integral particular y el resto de la expresión, la solución de la ecuación homogénea.

Imponiendo la condición de empotramiento en la base, debe cumplirse que para $y = 0$, $v = 0$ y $\frac{dv}{dy} = 0$, lo que conduce a

$$B\,\alpha + \frac{d\,v_1}{dy}\,(y = 0) = 0$$

$$A + v_1\,(y = 0) = 0$$

Casos particulares

a) Carga q uniformemente distribuida en toda la altura

$$M_o(y) = \frac{q\,(H - y)^2}{2} \quad [1]$$

$$v_1(y) = v(H) + \frac{M_o(y)}{k} + \frac{q\,E\,I_p}{k^2} \qquad [21.58]$$

b) Carga triangular variando desde q en el arranque a 0 en coronación[1]

$$M_o(y) = \frac{q\,(H - y)^3}{6\,H}$$

$$v_1(y) = v(H) + \frac{M_o(y)}{k} + \frac{q\,(H - y)}{H} \cdot \frac{E\,I_p}{k^2} \qquad [21.59]$$

c) Carga P en coronación[2]

$$M_o(y) = P\,(H - y)$$

$$v_1(y) = v(H) + \frac{M_o(y)}{k} \qquad [21.60]$$

Esfuerzos

Conocida la ecuación de la elástica $v = v(y)$, los esfuerzos se obtienen inmediatamente a partir de las leyes generales

$$M(y) = \frac{d^2\,v}{d\,y^2} E\,I_p$$

$$N(y) = \int_y^H d\,N = \int_y^H V\,dy = \frac{k}{l}\int_y^H d\,v = \frac{k}{l}[v(H) - v(y)] \qquad [21.61]$$

1 q es positiva en el sentido del eje + V.

2 P es positiva en el sentido del eje + V.

Conocido M (y), la ecuación [21.41] permite conocer las leyes $M_1(y)$, $M_2(y)$ ya que

$$M_1(y) = M(y)\frac{I_1}{I_1 + I_2} = \frac{M(y)\;I_1}{I_p} \qquad [21.62]$$

$$M_2(y) = M(y)\frac{I_2}{I_1 + I_2} = \frac{M(y)\;I_2}{I_p} \qquad [21.63]$$

y las derivadas de [21.62] y [21.63] respecto a y nos proporcionan los cortantes en las ménsulas.

En los dinteles, los esfuerzos debidos a las acciones horizontales son:

Momentos flectores. De acuerdo con [21.42] y [21.43].

$$M_A = \frac{6\,E\,I_v\,\delta}{a^2}$$

y como $\delta = l\,\varphi$, y, $\varphi = \frac{d\,v}{d\,y}$, se tiene

$$M_A = \frac{6\,E\,I_v\,l}{a^2} \cdot \frac{dv}{d\,y} \qquad [21.64]$$

y análogamente

$$M_B = -\frac{6\,E\,I_v\,l}{a^2} \cdot \frac{dv}{d\,y} \qquad [21.65]$$

Esfuerzos cortantes. Análogamente, a partir de [21.46] se obtiene:

$$V_A = -\frac{12\,E\,I_v\,l}{a^3} \cdot \frac{dv}{d\,y} \qquad [21.66]$$

$$V_B = \frac{12\,E\,I_v\,l}{a^3} \cdot \frac{dv}{d\,y} \qquad [21.67]$$

No debe olvidarse que a estos esfuerzos deben sumarse los debidos a las posibles acciones verticales directas sobre estos dinteles, producidas por forjados del piso, elementos de fachada de la planta, etc.

21.7 MÉTODO DE ROSMAN-BECK PARA TENER EN CUENTA LA DEFORMACIÓN DE LAS MÉNSULAS DEBIDA AL ESFUERZO AXIL (21.5) (21.6)

En el apartado anterior, hemos despreciado la deformación de las ménsulas por efecto del esfuerzo axil, lo cual conducía a elásticas iguales para ambas ménsulas y, en definitiva, a un momento flector nulo en el punto medio de la luz en los dinteles.

En la figura 21-20 se representa la zona correspondiente a dos dinteles consecutivos.

Consideremos la ménsula izquierda. A nivel de la directriz del dintel inferior, sus esfuerzos son M_1 y N_1. La deformación en el eje correspondiente a los puntos medios de las luces de los dinteles es suma de la debida a la flexión y la debida al esfuerzo axil.

El acortamiento Δ_y entre las secciones DD' y EE' será la deformación citada menos la deformación diferencial de las flechas en su punto medio de los dos dinteles consecutivos.

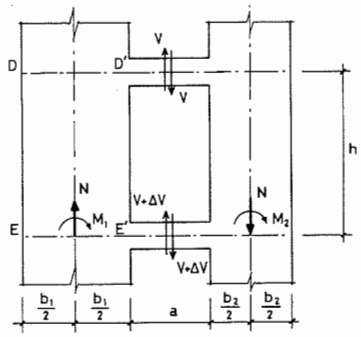


Figura 21-20

El cálculo de la diferencia de flechas en el punto medio de las luces de los dinteles puede hacerse a partir de lo indicado en la figura 21-20, donde ΔV es el incremento de cortante en la altura h.

Para un voladizo de luz $\frac{a}{2}$, la flecha será

$$\Delta f = -\frac{\Delta V\, a^3}{24\, E\, I_v} \qquad [21.68]$$

luego

$$d f = \frac{(d V)\, h\, a^3}{24\, E\, I_v} \qquad [21.69]$$

y como $d N = V\, dy$

se tiene $$d V = \frac{d^2 N}{d y^2} dy \qquad [21.70]$$

con lo que [21.69] puede escribirse

$$d f = \frac{\frac{d^2 N}{d y^2} h\, a^3}{24\, E\, I_v} dy \qquad [21.71]$$

Como, de acuerdo con [21.53] y [21.62]

$$M_1 (x) = \left[M_o (y) + l \int_y^H V\, d y \right] \frac{I_1}{I_p} \qquad [21.72]$$

de [21.70] $V\, d y = d N$

podemos escribir

$$M_1 (x) = \left[M_o (y) + l\, N (y) \right] \frac{I_1}{I_p} \qquad [21.73]$$

En el punto A, considerado como perteneciente a la ménsula izquierda, la deformación es suma de las debidas al momento M_1 y al axil N. Aplicando la Ley de Navier

$$d u_1 = \frac{\left[M_o (y) + l\, N (y) \right] \frac{b_1 + a}{2}}{E\, I_p} d y + \frac{N (y)}{E\, A_1} d y \qquad [21.74]$$

donde $A_1 = e\, b_1$ es el área de la sección recta de la ménsula izquierda.

Considerando ahora el punto A como perteneciente a la ménsula derecha, se obtiene análogamente:

$$d u_2 = -\frac{\left[M_o (y) + l\, N (y) \right] \frac{b_2 + a}{2}}{E\, I_p} d y - \frac{N (y)}{E\, A_2} \cdot d y \qquad [21.75]$$

La suma de ambas deformaciones, en valor absoluto, ha de ser el doble de df.

$$d u_1 + |d u_2| = 2\, d f \qquad [21.76]$$

Sustituyendo en [21.76] los valores [21.69], [21.74] y [21.75] y adoptando las designaciones

$$\alpha^2 = \frac{k}{E\, I_p} = \frac{12\, l^2\, I_v}{a^3\, h\, I_p} \qquad [21.77]$$

$$\lambda^2 = \alpha^2 \left[1 + \frac{I_p (A_1 + A_2)}{l^2\, A_1 A_2} \right] \qquad [21.78]$$

se obtiene la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 N}{d y^2} - \lambda^2 N (y) - \frac{\alpha^2}{l} M_o (y) = 0 \qquad [21.79]$$

cuya integral general es

$$N = A\, Ch\, \lambda y + B\, Sh\, \lambda y + N_1 (y) \qquad [21.80]$$

donde $N_1 (y)$ es una integral particular.

21.8 ÁBACOS DE ALBIGES Y GOULET PARA EL CÁLCULO DE PANTALLAS CON HUECOS

Los métodos expuestos en 21.6 y 21.7 resultan muy laboriosos para su aplicación manual. Si no se dispone de programas de ordenador es más práctico el empleo del método desarrollado por ALBIGES y GOULET (21.7)[1].

Este método, igual que los expuestos en 21.6 y 21.7, necesitan para su aplicación el cumplimiento de las condiciones siguientes:

a) El edificio tiene al menos siete plantas.

b) La altura de pisos es constante.

c) Las vigas de conexión son todas iguales.

d) La inercia de las vigas de conexión es despreciable frente a la de cualesquiera de las ménsulas.

e) Las pantallas presentan en toda su altura características geométricas y mecánicas constantes.

f) Las ménsulas están empotradas en su base.

g) Las acciones horizontales se suponen uniformemente repartidas en toda la altura de la pantalla.

21.8.1. CASO GENERAL (l < a < l0) [2]

Con las notaciones de la figura 21-16 el método parte, en primer lugar, de calcular el valor

$$\omega = \sqrt{\frac{12\, I_v}{a^3} \cdot \frac{l}{I_p} \cdot \frac{I_t}{m\, h}} \qquad [21.81]$$

donde

I_v = Inercia de los dinteles.

a = Luz de los dinteles.

l = Luz entre ejes de ménsulas.

$$m = \frac{l}{\frac{l}{A_1} + \frac{l}{A_2}}$$

1 Además del trabajo original publicado en Annales de L'Institut Technique du Batiment et des Travaux Publics, un resumen puede encontrarse en el libro de M. DIVER "Calcul Pratique des Tours en Béton Armé" (21.8).

2 El significado de α se da a continuación. Las hipótesis y desarrollo del método son muy similares al expuesto en 21.6. Ver la citada referencia (21.7).

I_t = Inercia del conjunto de las dos ménsulas respecto a su centro de gravedad

$I_t = I_1 + I_2 + m\, l$

A_1 = Área de la sección recta de la ménsula izquierda.

A_2 = Área de la sección recta de la ménsula derecha.

I_p = Suma de las inercias de las dos ménsulas ($I_p = I_1 + I_2$).

h = Altura de piso.

A continuación se calcula el valor de

$$\alpha = \omega\, h \qquad [21.82]$$

a) Cálculo de los dinteles

– Se calcula la cota relativa del dintel cuyos esfuerzos se desean calcular

$$\xi = \frac{y}{H}$$

siendo y la altura de la directriz del dintel sobre la base de la pantalla.

– Con los valores de α y ξ, el ábaco GT-48 proporciona el valor de Φ.

– El esfuerzo cortante en el dintel vale

$$V = V_o \frac{m\, h}{I_t}\, \Phi \qquad [21.83]$$

donde V_o es el producto p H, siendo p la carga horizontal por unidad de longitud sobre la pantalla y H la altura de la misma.

– Los momentos de empotramiento en los extremos del dintel valen

$$M = V \frac{a}{2} \qquad [21.84]$$

b) Cálculo de las ménsulas

– Con los valores de α y ξ, el ábaco GT-49 proporciona el valor de ψ

– Los momentos en las ménsulas valen

$$M_1 = \frac{I_1}{I_p}\, V_o\, H \left[\frac{(1-\xi)^2}{2} - \frac{l\, m}{I_t}\, \psi\right] \qquad [21.85]$$

$$M_2 = \frac{I_2}{I_p}\, V_o\, H \left[\frac{(1-\xi)^2}{2} - \frac{l\, m}{I_t}\, \psi\right] \qquad [21.86]$$

– Los esfuerzos axiles a nivel de cada dintel se obtienen sumando los correspondientes valores de V según [21.83] para todos los dinteles situados por encima del nivel considerado.

NOTAS:

1.- Tanto en los dinteles como en las ménsulas, a los esfuerzos indicados deben sumarse los debidos a las otras cargas que actúan sobre ellos (cargas de forjados, etc.).

2.- Una comprobación conveniente de los cálculos realizados es verificar que en la base de la pantalla se cumple

$$M = M_1 + M_2 + l\,N \qquad [21.87]$$

El método indicado es general y debe aplicarse, en todo caso, si $1 < \alpha < 10$. Para $\alpha \leq 1$ y $\alpha \geq 10$ es posible introducir las simplificaciones siguientes:

21.8.2. CASO PARTICULAR CORRESPONDIENTE A $\alpha \leq 1$

Corresponde a huecos de grandes dimensiones en cuyo caso la rigidez relativa de los dinteles es muy baja y estos actúan únicamente como elementos de igualación de flechas entre ambas ménsulas. $\phi \approx O$ y $\psi \approx 0$.

$$M_1 = \frac{I_1}{I_p} M \qquad [21.88]$$

$$M_2 = \frac{I_2}{I_p} M \qquad [21.89]$$

$$N = 0 \qquad [21.90]$$

21.8.3. CASO PARTICULAR CORRESPONDIENTE A $\alpha \geq 10$.

Corresponde a huecos de pequeñas dimensiones. De acuerdo con el ábaco GT-48 para $\alpha \geq 10$ se puede aceptar $\alpha = \infty$. Io que supone una variación sensiblemente lineal de ϕ con ξ , resultando $\phi = O$ para $\xi = 1$ y $\phi = 1$ para $\xi = O$ (Ver GT-49). La fórmula [21.83] puede sustituirse con buena aproximación por la más sencilla

$$V = V_o \frac{m\,h}{I_t}(1 - \xi) \qquad [21.91]$$

21.9. PANTALLAS CON VARIAS FILAS DE HUECOS.

El método expuesto en 21.8 es susceptible de generalizarse al caso de pantallas con varias filas de huecos. Sin embargo, la aproximación no es ya tan buena para pequeños o grandes huecos (Ver referencia (21.8)). En general, resultará preferible aplicar alguno de los procedimientos expuestos en 21.11.

21.10. CARGAS VERTICALES EN PANTALLAS CON HUECOS. MÉTODO DE DAVIDOVICI.

El caso de los esfuerzos producidos en una pantalla con una fila de huecos y que cumpla las condiciones impuestas para la aplicación del método de ALBIGES y GOULET expuesto en 21.8, ha sido estudiado por V.E. DAVIDOVICI (21.9).

Además de las notaciones que venimos empleando, adoptaremos las de la figura 21-21.

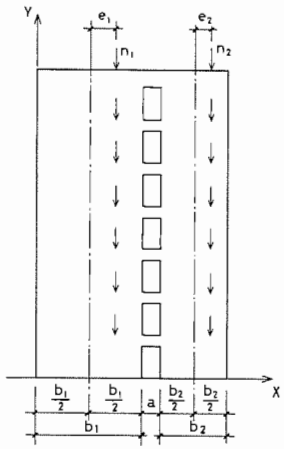


Figura 21-21

Se supone que las cargas n_1 y n_2 son iguales en todos los pisos. Las excentricidades e_1 y e_2 se consideran positivas en el sentido positivo del eje x. Las cargas se consideran positivas en el sentido del eje + y.

El método abarca las siguientes etapas:

a) Se calcula ω y α como vimos en 21.8

b) Cálulo de los dinteles

- Se establece la cota relativa del dintel

$$\xi = \frac{y}{H}$$

- Se calcula

$$k = \frac{m}{I_t}\left[n_2\left(-e_2 + \frac{I_p}{l}\frac{1}{A_2}\right) - n_1\left(e_1 + \frac{I_p}{l}\frac{1}{A_1}\right)\right] \qquad [21.92]$$

- Con los valores de α y ξ, el ábaco GT-50 proporciona el valor, Δ.

- El esfuerzo cortante en el dintel vale

$$V = k\,\Delta \qquad [21.93]$$

- Los momentos de empotramiento en los extremos del dintel resultan

$$M = V\frac{a}{2} \qquad [21.94]$$

c) Cálculo de las ménsulas

- Con los valores de α y ξ, el ábaco GT-51proporciona el valor de γ.
- Los momentos vienen dados por las fórmulas

$$M_1 = \frac{I_1}{I_p}\frac{H}{h}\left[(1-\xi)(n_1 e_1 + n_2 e_2) - / k\gamma\right] \qquad [21.95]$$

$$M_2 = \frac{I_2}{I_p}\frac{H}{h}\left[(1-\xi)(n_1 e_1 + n_2 e_2) - / k\gamma\right] \qquad [21.96]$$

Los esfuerzos axiles en las ménsulas vienen dados por las fórmulas

$$N_1 = \frac{H}{h}\left[-n_1(1-\xi) + k\gamma\right] \qquad [21.97]$$

$$N_2 = \frac{H}{h}\left[-n_2(1-\xi) - k\gamma\right] \qquad [21.98]$$

(Los valores positivos de N_1 y N_2 corresponden a esfuerzos de compresión).

NOTAS:

1.- En los dinteles, a los esfuerzos calculados deben sumarse los de las cargas verticales actuantes directamente sobre ellos y los derivados de las eventuales acciones horizontales sobre la pantalla. En las ménsulas, a los esfuerzos calculados, hay que añadir los producidos por las posibles acciones horizontales sobre la pantalla.

2.- Una comprobación conveniente de los cálculos realizados, es verificar que en la base de la pantalla se cumple:

a) $N_1 + N_2 = \Sigma n_1 + \Sigma n_2$.

b) El momento del sistema formado porΣn_1, Σn_2, M_1, M_2, N_1 y N_2 respecto a un punto debe ser nulo.

21.11 CASO PARTICULAR DE PANTALLAS APOYADAS SOBRE PILARES EN PLANTA BAJA

Definiremos un sistema de ejes cuyo origen coincida con el c.d.g. de las áreas de los pilares A_1, A_2, ... A_n (Fig. 21-22).

Es inmediatamente generalizable el método del voladizo expuesto en 15.3.2. Las acciones sobre la pantalla, referidas a su nivel BB' inferior, se reducen a los tres esfuerzos M, N, V indicados en la figura.

El esfuerzo axil N_i en el pilar i viene dado por la expresión

$$N_i = -\frac{N\ A_i}{\Sigma\ A_i} - \frac{M\ x_i\ A_i}{\Sigma\ A_i\ x_i^2} \qquad [21.99]$$

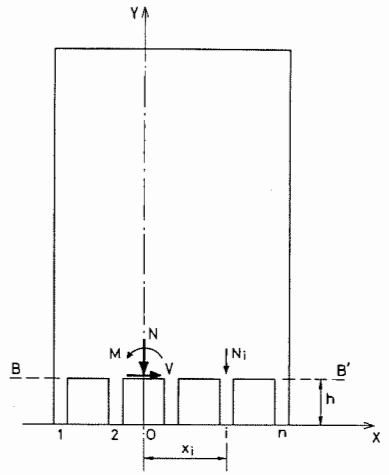


Figura 21-22

donde

N_i = Esfuerzo axil en el pilar i (El signo + corresponde a esfuerzos de compresion).

N = Esfuerzo axil total de la pantalla (Positivo en el sentido positivo del eje + y).

A_i = Área de la sección recta del pilar i.

M = Momento flector actuante sobre la pantalla (Positivo en sentido contrario al reloj).

x_i = Abscisa del eje del pilar i.

El cortante V se distribuye entre los n pilares en proporción a sus rigideces. El momento flector en cada pilar depende esencialmente del grado de empotramiento de la zapata en el terreno. Si no se realiza un estudio detallado, tal como se indicó en el Capítulo 11, conviene suponer que el punto de momento nulo en el pilar no está a una cota superior al cuarto de su altura y tomar

$$M_i \geq V_i \frac{3}{4}h \qquad [21.100]$$

como momento en cabeza de pilar.

Cada pilar debe ser dimensionado para los esfuerzos (M_i, N_i, V_i)[1].

21.12 OTROS MÉTODOS DE CÁLCULO

Existen muchos otros métodos para el caso de pantallas con huecos.

1 Las cargas localizadas que los pilares ejercen sobre la pantalla, en especial en el caso en que el ancho de los pilares exceda al de la pantalla, requieren un estudio local de acuerdo con lo visto en el Capítulo 19.

En particular, debe destacarse hoy por su importancia el método de los elementos finitos, que combinado con el tratamiento en ordenador permite el cálculo de, prácticamente, cualquier tipo de pantalla.

El método es adecuado en cualquier caso, pero lo es especialmente para pantallas con más de una fila de huecos.

Si la pantalla tiene sección variable con la altura o huecos en distribución irregular (Fig. 21-23), el método es el único capaz de proporcionar una solución válida del problema.

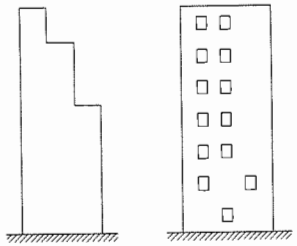


Figura 21-23

21.13 NÚCLEOS

Se entiende por núcleo un conjunto de pantallas enlazadas entre sí para formar una pieza de sección cerrada o eventualmente abierta por huecos de paso (Fig. 21-24). Estructuralmente queda constituida una pieza tubular, con sección abierta o cerrada, pero siempre de pared delgada en comparación con las dimensiones de la sección transversal.

Figura 21-24

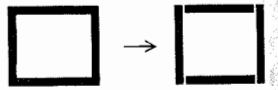


Figura 21-25

Debe destacarse que, como pieza tubular, tiene la particularidad de que los forjados, que pueden considerarse como indeformables en su plano, rigidizan la sección a la altura de cada piso.

En el caso particular de núcleos simétricos sometidos a acciones actuando en sus ejes principales de inercia, es de aplicación la fórmula de Navier y el cálculo es, por tanto, inmediato.

En general, al existir torsiones, el cálculo se complica y no se aborda aquí por razones de extensión. La obra de VLASOV, citada en la referencia (21.10) y la de SÁEZ BENITO (21.11) contienen información abundante sobre el tema.

Debe llamarse la atención sobre el hecho de que, si el núcleo se calcula como tal, la transmisión de esfuerzos cortantes de un lado a otro del polígono de la sección recta debe quedar garantizada con las armaduras correspondientes. Por tanto, conviene

examinar la posibilidad (Fig. 21-25) de independizar los lados del núcleo en pantallas mediante juntas, por si esto conduce a una solución más económica[1].

Estas juntas pueden por supuesto realizarse a tope ya que no constituyen juntas de dilatación.

En edificios de muy gran altura, el núcleo es evidentemente una solución de mayor rendimiento que las pantallas. Ampliaremos el tema en el Capítulo 62 al tratar de edificios de gran altura.

BIBLIOGRAFÍA

(21.1) LIN, T.Y. "Lateral Force Distribution in a Concrete Building Story". Journal of the American Concrete Institute. December 1951.

(21.2) MEDWADOWSKY, S. "Lateral Force Distribution in a random System of Shear Elements". Journal A.C.I. August 1967.

(21.3) RECUERO, A., GUTIÉRREZ JIMÉNEZ, J.P. "Análisis de Edificios en Altura sometidos a Acciones Horizontales: Sistemas Planos". Monografía N° 338 del Instituto Eduardo Torroja. Madrid 1976.

(21.4) CHITTY, L. "On the Cantilever Composed of a Number of Parallel Beams Interconected by Cross Bars". Philosophical Magazine. October 1947.

(21.5) ROSMAN, R. "Beitrag zur statische Berechnung Waagrecht Belasteter Querwande bei Hochbanten". Der Baningenieur. Abril 1960.

(21.6) BECK, H. "Einbeitrag zur Berucksichtigung der Dehnungsverformungen bei Rahmen mit Scholanken nudn Gedrungenen Konstruktions-gliedern". Der Baningenieur. Mayo 1959.

(21.7) ALBIGES, M.; GOULET, J. "Contreventement des Batiments". Annales de l'Institut Technique du Batiment et des Travaux Publics. Mai 1960.

(21.8) DIVER, M. "Calcul Pratique des Tours en Béton Armé". DUNOD. París 1972.

(21.9) DAVIDOVICI, V.E. "Effets des Variations Linéaires dans les Batiments de Grande Hauteur". Annales de l'Institut Technique du Batiment et des Travaux Publics. Septembre, 1967.

(21.10) VLASOV, B.Z. "Pieces Longues en Voiles Minces". EYROLLES. París 1962.

(21.11) SÁEZ-BENITO, J.M. "Cálculo Matricial de Estructuras". Fondo Editorial de Ingeniería Naval. Madrid 1975.

1 Esto puede ocurrir para edificios de alturas medias debido a la necesidad, en cualquier caso, de disponer armaduras mínimas de retracción y temperatura, que pueden, al mismo tiempo, resistir esfuerzos considerables.

CAPÍTULO 22

INTERACCIÓN DE ENTRAMADOS CON PANTALLAS Y NÚCLEOS

22.1 GENERALIDADES

El uso simultáneo de entramados y pantallas o núcleos es habitual en edificios de altura. Una disposición frecuente se indica en planta en la Figura 22-l. De una manera esquemática y partiendo de considerar los forjados como infinitamente rígidos en su plano, puede pensarse que éstos, actuando como vigas horizontales de gran canto, transmitirán las acciones horizontales a las pantallas y que los entramados resistirán solamente acciones verticales. Sin embargo, un análisis más exacto demuestra que en general los entramados desempeñan una función no despreciable en la absorción de acciones horizontales y deben, por tanto, ser calculados para resistirlas.

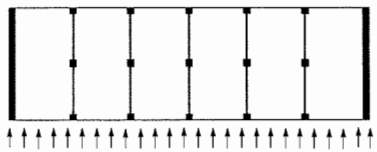
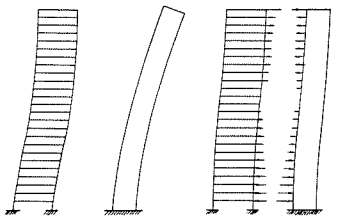


Figura 22-1

Si consideramos independientemente un entramado y una pantalla, sus deformaciones se indican esquemáticamente en las figuras 22-2 a y b, tomadas de la referencia (22.1) de KHAN y SBAROUNIS.

Cuando los entramados y las pantallas se interconectan mediante los forjados, éstos compatibilizan las deformaciones de ambos sistemas estructurales, en los niveles de los diferentes pisos (Fig. 22-2c)) y ello crea unas interacciones mutuas. Como puede observarse en la figura, en las zonas bajas del edificio, los entramados ven su deformación coartada por las pantallas a esos niveles. En la parte superior del edificio, ocurre lo contrario y las pantallas tienen su deformación coartada por los entramados.



ENTRAMADO LIBRE a) | PANTALLA LIBRE b) | ENTRAMADO Y PANTALLA COMBINADOS c)

DEFORMACIONES DE PANTALLAS Y ENTRAMADOS (Según KHAN y SBAROUNIS)

Figura 22-2

La figura 22-2c) indica un comportamiento esencialmente diferente de los grupos de pantallas, respecto a los grupos mixtos de pantallas y entramados. En el caso de las pantallas, la figura 22-3a) refleja cómo el reparto de fuerzas horizontales a cualquier altura es tal que las fuerzas en cada pantalla guardan siempre la misma relación entre sí. La figura 22-3b) pone en evidencia cómo, en el caso de entramados y pantallas, en la parte inferior las pantallas absorben casi toda la fuerza; en la parte intermedia, los entramados absorben una parte apreciable de la misma y en la zona superior, los entramados absorben fuerzas superiores incluso a las exteriores.

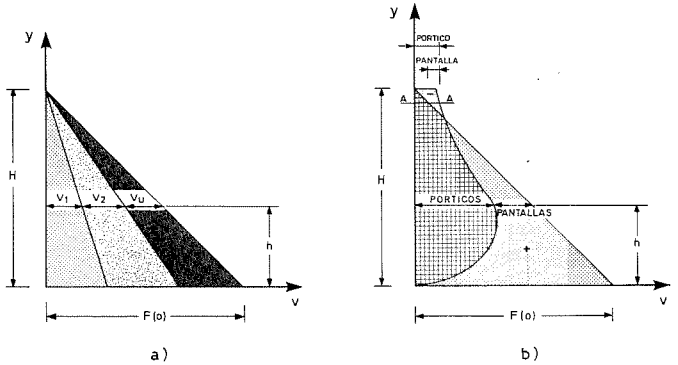


Figura 22-3

La figura 22-3b) indica, por tanto, que en cada caso debe estudiarse si es realmente interesante prolongar las pantallas hasta la última planta o puede ser económicamente ventajoso, a partir de cierto nivel, transformar las pantallas en entramados. Los gráficos GT-52 a GT-65 son de gran ayuda en este sentido.

22.2 CONSIDERACIONES SOBRE LOS MÉTODOS DE CALCULO.

Un cálculo riguroso, al manejar como incógnitas las acciones sobre las pantallas o núcleos y sobre los nudos de los entramados, todo ello en los diferentes pisos, igualando en ellos las deformaciones, sólo es posible mediante el cálculo con

ordenador. Si la estructura y la aplicación de las cargas no son simétricas, aparecen torsiones que complican el problema.

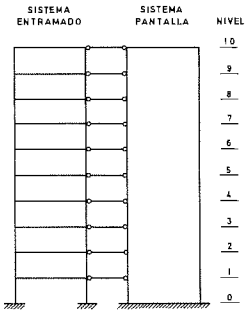
El libro de MARGARIT y BUXADE citado en la referencia (22.2) contiene un conjunto de tablas que resuelven el problema para muchos casos habituales en la práctica.

Las referencias (22.3) y (22.4) tienen también información interesante.

En el apartado siguiente, se expone un método que puede considerarse como válido para el proyecto en el caso de edificios de configuración sencilla, y válido, en todo caso, para el anteproyecto de cualquier tipo de edificio.

22.3 METODO DE KHAN Y SBAROUNIS.

El desarrollo del método se expone en la referencia (22.1) y utiliza un conjunto de gráficos de interacción basados en el estudio de la interconexión de entramados y pantallas en diez niveles diferentes a lo largo de su altura, de acuerdo con el modelo indicado en la figura 22-4, que consta de un sistema virtual de entramado y otro de pantalla interconectados en los diez niveles.



MODELO DE ESTRUCTURA

Figura 22-4

El conjunto de gráficos GT-52 a GT-65 resuelven el problema de acuerdo con la siguiente distribución.

22.3.1. ORDENACIÓN DE LOS GRÁFICOS

a) Acciones horizontales constantes en toda la altura[1].

a-l) GRÁFICOS GT-52, GT-53 y GT-54.

Corresponden al caso en que los pilares, las vigas y las pantallas son de sección constante en toda la altura del edificio. Esto se indica en los gráficos en el recuadro 1,1,1 que significa que las rigideces en la parte alta son iguales a las de la planta baja en pilares, vigas y pantallas respectivamente.

1 Corresponde este caso a la acción normal del viento

- El gráfico GT-52 corresponde al caso en que se cumple la relación

$$\frac{\sum k_p}{\sum k_v} = 1$$

donde $\sum k_p$ es la suma de las rigideces de todos los pilares de planta baja de los entramados y $\sum k_v$ la suma de las rigideces de todas las vigas de planta baja de los entramados.

- El gráfico GT-53 corresponde a la relación

$$\frac{\sum k_p}{\sum k_v} = 5$$

- El gráfico GT-54 corresponde a la relación

$$\frac{\sum k_p}{\sum k_v} = 10$$

a-2) GRÁFICOS GT-55 y GT-56

Corresponden al caso en que las rigideces de los pilares varían linealmente de la planta baja a la última en la relación 10 a 1; las vigas tienen en vertical la misma rigidez en todas las plantas y en las pantallas las rigideces varían de 3 a 1 de la planta baja a la última.

El gráfico GT-55 corresponde al caso $\frac{\sum k_p}{\sum k_v} = 10$

El gráfico GT-56 corresponde al caso $\frac{\sum k_p}{\sum k_v} = 20$

(En ambos casos $\sum k_p$ se refiere a los pilares de planta baja de todos los entramados y $\sum k_v$ a las vigas de planta baja de todos los entramados).

a-3) GRAFICOS GT-57 y GT-58

Corresponden al caso en que las rigideces de los pilares varían linealmente de la planta baja a la última en la relación 10 a 1, las vigas tienen rigideces variando de 2 a 1 de la planta baja a la alta y las rigideces de las pantallas varían de 3 a 1 entre la planta baja a la alta.

El gráfico GT-57 corresponde al caso $\frac{\sum k_p}{\sum k_v} = 10$

El gráfico GT-58 corresponde al caso $\frac{\sum k_p}{\sum k_v} = 20$

En todos los gráficos se emplea la relación $\frac{\sum k_w}{\sum k_p}$ de rigideces de pantallas a pilares en la planta baja. Esta relación debe tomarse con valor

$$\frac{\sum k_w}{\sum k_p} = \frac{\sum (EI)_w}{\sum (EI)_p}\left(\frac{10}{N}\right)^2$$

$\sum (EI)_w$ es la suma de las inercias de las pantallas, $\sum (EI)_p$ la de los pilares y N el número de plantas. La corrección introducida por el término $\left(\frac{10}{N}\right)^2$ si N≠10, se debe a que el modelo que sirvió de base a los gráficos tenía diez niveles de conexión[1].

b) Acciones horizontales con distribución triangular, con valor nulo en la base y máximo en la última planta[2].

Los gráficos GT-59 a GT-65 corresponden al caso de distribución triangular de acciones, con la misma ordenación que los GT-52 a GT-58.

22.3.2 DESARROLLO DEL MÉTODO.

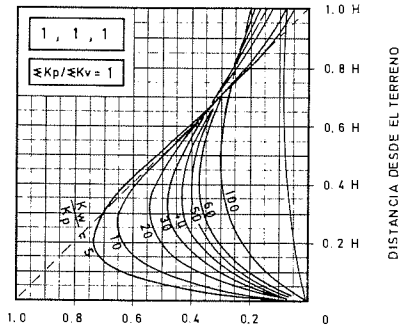
Refiriéndonos, como ejemplo, al gráfico GT-52 (Fig.22-5), para cada relación $\frac{y}{H}$ de la altura considerada a la total, desde 0 a H, las diferentes curvas dan para cada relación de rigideces $\frac{\sum k_w}{\sum k_p}$ (donde $\sum k_w$ es la suma de las rigideces de todas las pantallas y $\sum k_p$ la de todos los pilares, ambas a nivel de planta baja) el valor de $\frac{F_e(y)}{F(0)}$

1 Se maneja el término EI en lugar de la rigidez, ya que todas las piezas son de la misma altura en cada planta.

2 Las acciones sísmicas son generalmente asimilables a este caso o a combinaciones de éste y el anterior.

donde $F_e\ (y)$ es la fuerza horizontal en la planta a la cota y, que es absorbida por los entramados y $F\ (0)$ la fuerza horizontal total actuando sobre el conjunto a la cota y= 0.

La fuerza horizontal sobre las pantallas $F_w\ (y)$ viene dada por la diferencia entre la distancia horizontal correspondiente al nivel $\frac{y}{H}$ a las pantallas como ménsulas libres, que vienen dadas por la línea de trazos del gráfico y el valor $F_e\ (y)$. Obsérvese que $F_w\ (y)$ es positiva en la zona inferior del gráfico y negativa en la superior, lo que significa que en esta última zona la dirección de las fuerzas es la contraria a la de abajo.



$$\frac{F_e\,(y)}{F\,(0)}$$

Figura 22-5

Conocidas las fuerzas $F_e\ (y)$ y $F_w\ (y)$ actuantes en cada planta sobre el conjunto de entramados y el conjunto de pantallas es necesario distribuir cada una de ellas entre los entramados y las pantallas, respectivamente.

El reparto entre las pantallas puede hacerse en proporción a sus rigideces, de acuerdo con lo visto en el Capítulo 21.

El reparto entre los entramados puede hacerse de acuerdo con lo visto en el Capítulo 7 y para cálculos de anteproyecto puede estudiarse de acuerdo con lo expuesto en el Capítulo 8.

22.3.3. VALIDEZ DEL MÉTODO.

A nuestro juicio, la validez del método, para cálculos definitivos, queda restringida a estructuras de organización claramente simétrica y con acciones que no produzcan torsiones, es decir que sean asimilables al modelo supuesto en el método.

Para otros casos, la validez del método queda restringida a cálculos de anteproyecto y, para el cálculo definitivo, debe recurrirse a los métodos apuntados en 22.2.

22.4 CASO PARTICULAR DE ESTRUCTURAS FORMADAS POR PANTALLAS Y FORJADOS SIN VIGAS.

En este caso y dado que, como ya vimos en el Capítulo19, la rigidez de la placa a considerar para acciones horizontales no está definida en las Normas, KHAN y SBAROUNIS en la referencia (22.1) desarrollan un método aproximado para estimar el ancho eficaz de placa. El método está basado en la asimilación de la placa a un emparrillado, con las condiciones de borde que se esquematizan en la figura 22-6.

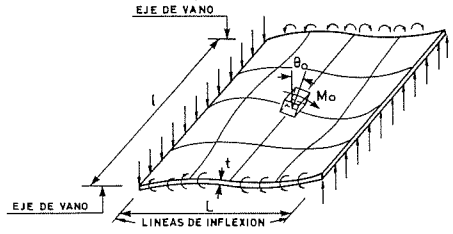


Figura 22-6

El ancho eficaz de placa b, a tener en cuenta como el de la viga equivalente a efectos de la aplicación del método expuesto en 22.3, viene dado por el gráfico de la figura 22-7[1].

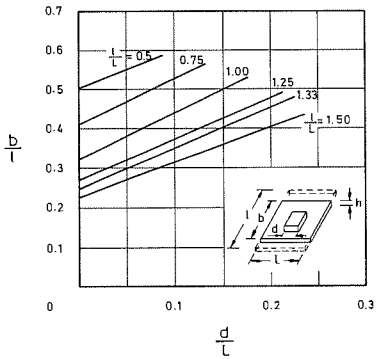


Figura 22-7

El momento de inercia a considerar por tanto para la viga equivalente será la correspondiente a una sección de forjado de ancho b.

1 Los resultados de la figura 22-7 no coinciden con los del método de PARME, expuestos en 19.4.2. Las finalidades de ambos métodos no son tampoco coincidentes.

BIBLIOGRAFÍA

(22.1) KHAN, F.R.; SBAROUNIS, J.A. "Interaction of Shear Walls and Frames". Journal of the Structural Division. A.S.C.E. June 1964.

(22.2) MARGARIT, J.; BUXADE, C. "Cálculo de Estructuras con Pórticos y Pantallas". BLUME. Barcelona 1977.

(22.3) "Designed of Combined Frames and Shear Walls". Portland Cement Association. 1965.

(22.4) MAC LEOD, L.A. "Shear Wall-Frame Interaction". Portland Cement Association. 1971.

CAPÍTULO 23

EDIFICIOS REALIZADOS CON ENCOFRADO TÚNEL Y SISTEMAS ANÁLOGOS

23.1 GENERALIDADES

La característica común a todos los edificios comprendidos en este Capítulo es que en ellos la estructura de hormigón armado desempeña, además de su función resistente, la del cerramiento en fachadas y la de compartimentación de espacios.

La figura 23-1 muestra el caso particular de los edificios realizados con encofrados túnel, con indicación esquemática de su proceso constructivo.

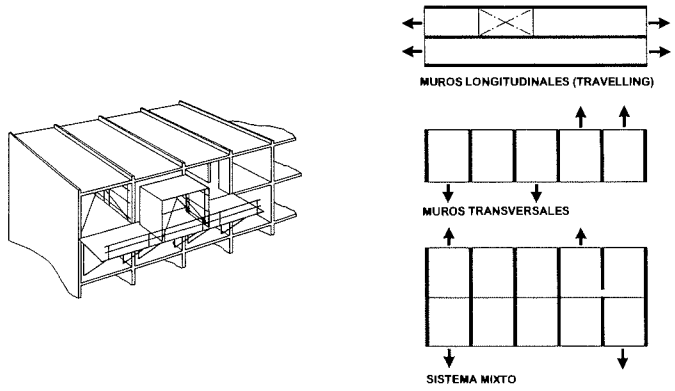


Figura 23-1

El sistema conduce a estructuras formadas por muros portantes y losas de hormigón armado, generalmente estas últimas sin aligeramiento de ningún tipo (Fig. 23-2).

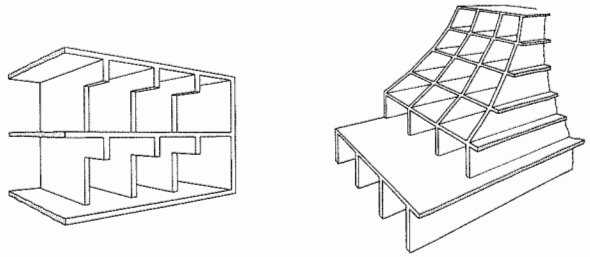


Figura 23-2

Las fachadas por las que salen los encofrados se cierran posteriormente, bien con hormigón in situ, bien con elementos prefabricados.

23.2 CÁLCULO DE ESFUERZOS

En general, el cálculo de esfuerzos no plantea problemas especiales.

Refiriéndonos al caso de la figura 23-3, es inmediato asimilar la estructura a un entramado, con pilares que tienen como sección las de los muros con ancho b y

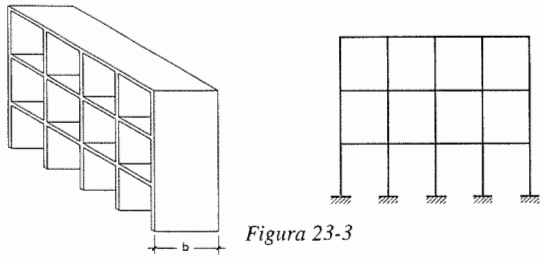


Figura 23-3

dinteles con sección la de las losas, también de ancho b. Sin embargo, en este tipo de estructura es frecuente que los muros presenten huecos de paso. Esto introduce una alteración en la sección y, por lo tanto, en la inercia y la rigidez de los muros, pero esta alteración es de escasa importancia en la mayoría de los casos prácticos (Fig. 23-4) en

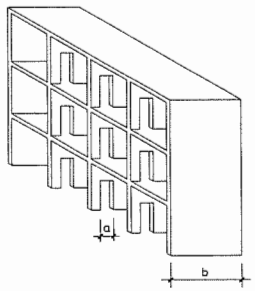


Figura 23-4

los que la relación a/b del ancho del hueco a la profundidad de los muros suele ser pequeña. Lo habitual es adoptar, a efectos de la rigidez del muro, la correspondiente a un muro de ancho b-a. Los esfuerzos axiles y momentos flectores resultantes se reparten uniformemente en el ancho de muro b-a. El cálculo de las losas no experimenta variación respecto al caso en que no existen huecos. El dintel sobre los huecos está sometido a la reacción de la losa y debe ser calculado para esa carga. Si las zonas laterales de muros son grandes respecto al canto del dintel, éste puede calcularse como una pieza biempotrada. Si el hueco está cercano a un borde del muro (Fig. 23-5),

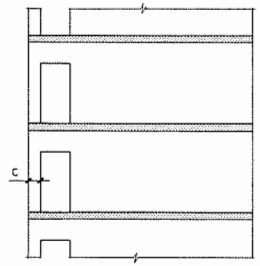


Figura 23-5

puede resultar necesario realizar el cálculo como el de un dintel perfectamente empotrado en el muro por un lado y empotrado en un pilar de ancho c por el otro.

En el caso de fachadas también resistentes, como el indicado en planta en la figura 23-6, el cálculo de las losas debe ser realizado como placas según las condiciones de borde que se presenten, de acuerdo con lo previsto en el Capítulo 20.

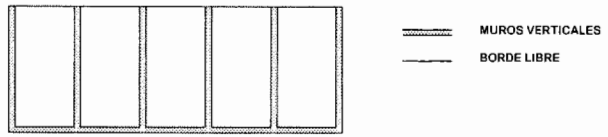


Figura 23-6

23.3 ESTRUCTURAS CON VIGAS-TABIQUE

23.3.1. CONCEPTOS GENERALES

Este tipo estructural está formado por forjados, de losa maciza o aligerados, que apoyan o cuelgan de vigas-tabique, que van sin apoyos de una fachada a otra del edificio. El apoyo de las vigas-tabique en las fachadas puede realizarse en pilares o bien disponer también estas fachadas como muros portantes de hormigón (Fig. 23-7).

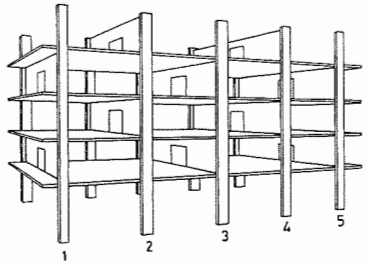


Figura 23-7

El sistema presenta un gran interés por la posibilidad que supone de cubrir espacios de luz múltiplo de l (Fig. 23-8) con el mismo coste que si se empleasen luces l. Realmente la luz de cálculo es l, aunque la luz libre en algunas plantas puede ser mucho mayor.

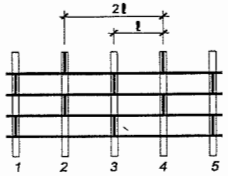


Figura 23-8

El sistema apareció en Estados Unidos hacia 1966 (23.1) y un estudio específico ha sido realizado por FINTEL (23.2).

En la figura 23-9, tomada de (23.2) se indican en sección algunas de las posibilidades del método, además de las ya indicadas en la figura 23-7. La disposición de la figura 23-9a) crea espacios de luces 3 l, en las plantas impares, y de luces l y 2 l, alternativamente, en plantas pares.

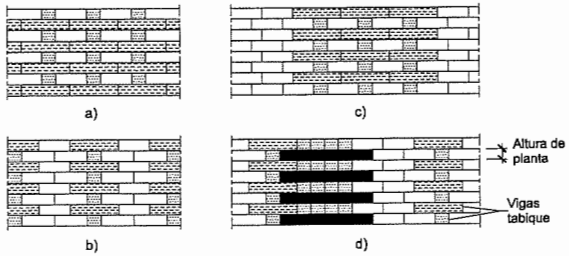


Figura 23-9

La disposición de la figura 23-9b) crea espacios de luces $2l$ y l, alternativamente, en las plantas impares, y de luces $2l$ y $3l$, alternativamente en las plantas pares.

La disposición de la figura 23-9c) crea espacios de luz $2l$ y l en las plantas impares y de luces $2l$ y $3l$ en las plantas pares.

Finalmente, la disposición de la figura 23-9d) crea, en las plantas impares, luces de cualquier magnitud.

23.3.2. CÁLCULO DE ESFUERZOS

Las losas, pilares, etc., no presentan problemas especiales[1]. En cambio, las vigas, salvo que no tengan huecos de paso, presentan problemas específicos. Dada su gran rigidez frente a los pilares, las vigas, en la mayoría de los casos, pueden considerarse como simplemente apoyadas.

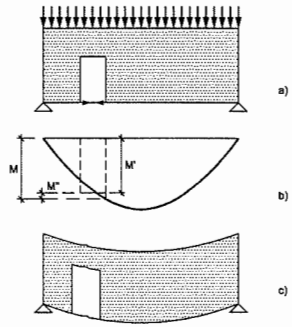


Figura 23-10

En la figura 23-10a) se indica un esquema general de viga-tabique sometida a un conjunto de cargas. En las zonas no afectadas por el hueco, los esfuerzos son los de una viga equivalente simplemente apoyada, de la misma luz y sometida a las mismas cargas.

En la zona del hueco, la resistencia a flexión está proporcionada por dos sumandos. Uno es un momento M' creado por la tracción T situada en la losa inferior[2] con la cabeza comprimida situada en el dintel y la zona de losa superior asociada, trabajando a flexión. Como se indica en la figura 23-10b) siendo M el momento de la viga equivalente de sección constante,

$$M = M' + M'' \qquad [23.1]$$

M. FINTEL (23.2) ha desarrollado gráficos que permiten calcular M' para los casos de carga uniforme y carga puntual, y que se recogen en las figuras 23-11 y 23-12, respectivamente. Conocido M', se calcula $M'' = M - M'$.

1 En los Capítulos 52, 58 y 61 estudiaremos el dimensionamiento de armaduras y los detalles constructivos que se presentan en losas, muros y vigas-tabique debido al hecho de que aparezcan losas que no apoyan en las vigas, sino que cuelgan de ellas.

2 La sección de la viga es una sección en I, formada por la viga-tabique como alma y las dos losas, superior e inferior, como alas. Para el ancho de alas a considerar en el cálculo, véase el Capítulo 36.

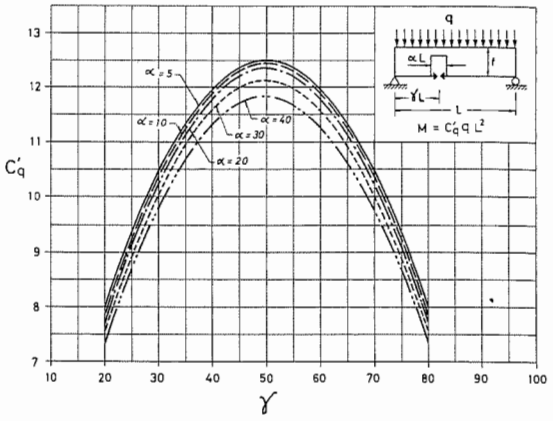


Figura 23-11

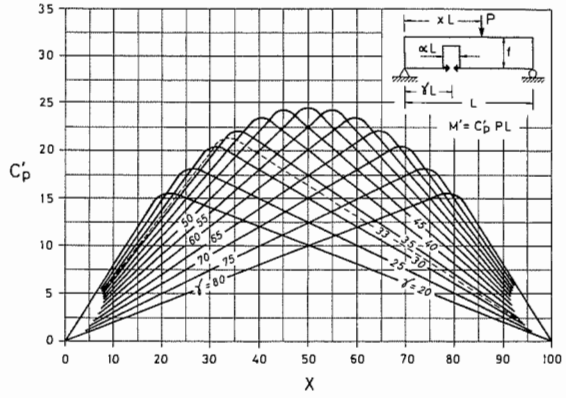


Figura 23-12

Aunque el cálculo detallado de este tipo estructural será desarrollado en el Capítulo 52 conviene indicar aquí el esquema general de su comportamiento frente a acciones horizontales.

En la figura 23-13a) y b), se indican las deformaciones que, aisladamente tomarían los conjuntos de pilares y pantallas de pisos pares y los de pisos impares. La gran rigidez de las losas en su plano obliga a todos los pilares a tener corrimientos solidarios en cada nivel, con lo que la deformación del conjunto es la indicada en la figura 23-13c).

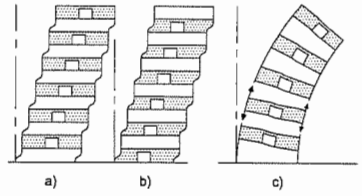


Figura 23-13

Obsérvese que la interacción espacial de losas y vigas-tabique impide prácticamente el corrimiento horizontal de la cabeza de un pilar respecto a su pie (debido a los cortantes horizontales) que se indicaban en las figuras 23-13 a) y b). El funcionamiento real es el de la figura 23-13c) que es esencialmente el de un voladizo, con los pilares sometidos fundamentalmente a esfuerzos axiles[1].

BIBLIOGRAFÍA

(23.1) "New Steel Framing System Promises Major Savings in High Rises Apartments". Architectural Record. Junio 1966.

(23.2) FINTEL, M. "Staggered Transverse Wall Beams for Multistory Concrete Buildings". ACI Journal. Mayo 1968.

1 Ello hace que los pilares no necesiten tener canto importante en el sentido de las vigas tabique, pudiendo disponerse con un pequeño canto en ese sentido y un ancho mayor en el sentido de la fachada. Esto hace el sistema especialmente apropiado para su uso con muros de hormigón.

CAPÍTULO 24

JUNTAS DE DILATACIÓN
JUNTAS DE ASIENTO
JUNTAS DE HORMIGONADO
JUNTAS DE CONTRACCIÓN

24.1 JUNTAS DE DILATACIÓN

24.1.1 CONCEPTOS GENERALES

Las variaciones de temperatura ocasionan cambios dimensionales, tanto en la estructura como en el resto de los componentes del edificio, de forma que éste se comporta como un objeto dinámico.

El proyectista se ve obligado a disponer juntas de dilatación que permitan la contracción y la expansión de la estructura y reduzcan los esfuerzos que dichos movimientos, siempre parcialmente impedidos, introducen en ella. El hecho de que los métodos actuales de cálculo permitan calcular las estructuras con mayor precisión que en otros tiempos, conduce, en definitiva, a estructuras más afinadas y ello hace que muchas reglas empíricas sobre el tema de las juntas de dilatación no resulten ya válidas y sea necesario un análisis más racional del tema. A esto se suma el que gran parte de nuestra experiencia se refiere a construcciones antiguas, que englobaban un número reducido de materiales, que además tenían un comportamiento térmico relativamente homogéneo, mientras que el proyectista actual interconecta sus estructuras con muchos materiales y de comportamientos térmicos que, con frecuencia, son muy diferentes.

La información sobre el tema es poca, especialmente por lo que se refiere a mediciones sobre edificios construidos. A título de ejemplo durante muchos años se ha estimado que en edificios la distancia entre juntas de dilatación de las estructuras no

debía pasar de 30 m. Como se verá por lo que sigue, en muchos casos es fácil llegar al doble e incluso al triple. La creencia errónea venía de que al hacer las juntas de dilatación a esa distancia, tanto para la estructura, como para los cerramientos de ladrillo de las fachadas y a veces para las azoteas, con distancias mayores se producían desórdenes graves, pero no en la estructura, sino en las partes no estructurales del edificio.

Unos órdenes de magnitud realistas para las juntas de dilatación para edificios de planta rectangular son los siguientes:

TABLA T-24.1.- DISTANCIA ENTRE JUNTAS DE DILATACIÓN

PARTE DE OBRA	DISTANCIA MÁXIMA ENTRE JUNTAS DE DILATACIÓN (m)
ESTRUCTURA DE HORMIGÓN	60 a 90
CERRAMIENTOS DE LADRILLO EN FACHADAS	12 a 18
AZOTEAS	5 a 8

El error venía de pensar que todas las partes del edificio, en especial la estructura y los cerramientos podían tener la misma distancia entre juntas.

Las referencias (24.1), (24.2), (24.3) y (24.4) contienen información importante sobre este asunto. En particular el Informe de la National Academy of Sciences de Washington "Expansión Joints in Buildings", (24.2), basado en el estudio de medidas sobre nueve edificios reales y en numerosos cálculos de estructuras teóricas, contiene, a nuestro juicio, la información más válida sobre el tema.

En lo que sigue llamaremos *Variación de temperatura de Cálculo* al mayor de los valores.

$$\Delta_t = T_s - T_m \qquad [24.1]$$

$$\Delta_t = T_m - T_i \qquad [24.2]$$

donde:

T_s = Temperatura que, como término medio, es excedida solamente el uno por ciento del tiempo durante los meses de verano de Junio a Septiembre[1] .

T_m = Temperatura media durante la época normal de construcción en la zona en que se va a construir el edificio. Como norma general puede definirse como época normal de construcción el período consecutivo del año durante el cual la temperatura mínima diaria no es inferior a 0°C.

T_i = Temperatura igualada o excedida, por término medio, el noventa y nueve por ciento del tiempo durante los meses de invierno de Diciembre a Febrero.

1 En todo lo que sigue nos referimos al hemisferio Norte.

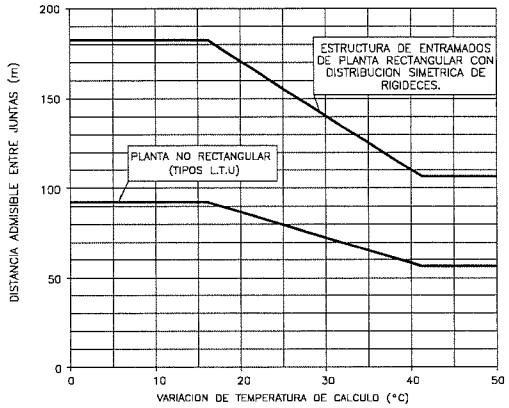


Figura 24-1

24.1.2 CÁLCULO DE LA JUNTA. MÉTODO EMPÍRICO

a) *Distancia entre juntas*

Para estructuras de edificios formadas por entramados, entramados y pantallas y/o núcleos, la distancia entre juntas puede ser determinada mediante el gráfico de la figura 24-1, (24.2) correspondiente a estructuras en las que puede suponerse que los pilares *están articulados en su unión al cimiento y que el edificio tiene calefacción*[1] .

A la distancia entre juntas resultante del gráfico de la figura 24-1, se le deben aplicar las siguientes correcciones.

- Si el edificio va a tener aire acondicionado, aumentar la distancia en el 15%[2]
- Si el edificio no va a tener calefacción, reducir la distancia en el 33%[3]

1 Lo que sigue no es aplicable a estructuras situadas exteriormente a los cerramientos del edificio.

2 Si se considera probable que el equipo de aire acondicionado sufra interrupciones en su funcionamiento de más de dos días, no debe aplicarse esta corrección.

3 Se considerará también esta corrección si se supone probable que el equipo de calefacción sufra interrupciones en su funcionamiento de más de dos días.

- Si los pilares pueden considerarse empotrados en su unión al cimiento, reducir la distancia en el 15%[1].

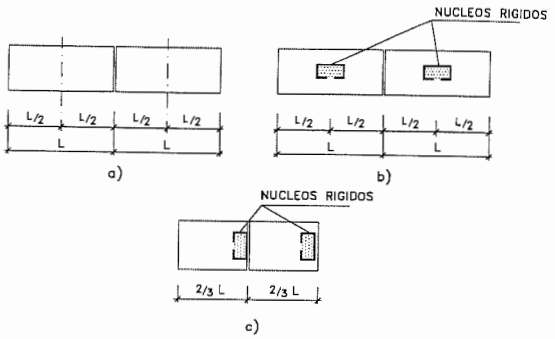


Figura 24-2

Todo lo anterior es aplicable (24.1), (24-2) a casos tales como los a) y b) de la figura 24-2, en que las deformaciones por temperatura se distribuyen simétricamente a cada lado del plano medio entre juntas. Si se dan situaciones como la c) de la figura 24-2, en que la deformación se produce esencialmente hacia un lado de la junta, la distancia indicada por el gráfico de la figura 24-1 debe reducirse en un 33%.

Los porcentajes de corrección indicados en los anteriores párrafos se aplicarán sumándolos algebraicamente si coexisten varias de dichas situaciones.

b) *Cierre máximo de las juntas*

El máximo cierre teórico de una junta en un edificio de entramado, sometido a una variación de temperatura en grados centígrados:

$$\Delta_t = T_s - T_m \qquad [24.3]$$

con una distancia L entre juntas, viene dado por

$$C_t = [\, T_s - T_m \,]\, L \cdot 1{,}1 \cdot 10^{-5} \qquad [24.4]$$

1 Puede considerarse que se está en este caso cuando se cimente en suelos muy compactos o rocosos.Un análisis teórico conduce a que los esfuerzos producidos en dos edificios, uno con pilares articulados y otro con pilares empotrados en su cimentación, son sustancialmente idénticos en todos los pisos excepto el bajo, en el que los esfuerzos en el caso de empotramiento son casi el doble.

En cualquier caso, los máximos momentos flectores y esfuerzos cortantes se presentan en los pilares y dinteles contiguos a las juntas, mientras que los máximos esfuerzos axiles inducidos en los dinteles se producen en la zona equidistantes de dos juntas consecutivas. En el Capítulo 6 se vio un procedimiento para tener en cuenta su grado de empotramiento variable en función de la deformabilidad del terreno.

En la expresión [24.4] debe tomarse como L el valor medio de las dos distancias entre juntas de los bloques contiguos a la junta considerada. Si se está en uno de los casos de rigidez asimétrica, como el indicado en la figura 24-2 c), debe tomarse como distancia del bloque la real aumentada en un 50% si la zona rígida está en el lado opuesto a la junta considerada, y la real reducida en un 33% si está en el mismo lado que la junta considerada.

c) *Ancho de juntas*[1]

Para tener en cuenta las tolerancias de construcción y las características de deformabilidad del material de sellado de la junta, se dispondrá un ancho de junta

$$a = K_j\, C_t \qquad [24.5]$$

donde C_t viene dado por [24.4] y los valores de k_j son:

$k_j = 2$ para edificios sin calefacción

$k_j = 1.7$ para edificios con calefacción pero sin aire acondicionado[2]

$k_j = 1.4$ para edificios con calefacción y aire acondicionado[1]

El ancho mínimo de junta debe ser, en cualquier caso, de 25 mm.

24.1.3 CÁLCULO DE LA JUNTA. MÉTODO ANALÍTICO

Para aquellos casos en que el método empírico no sea de aplicación o bien cuando se estime que los resultados a que conduce son demasiado conservadores, cabe el cálculo directo mediante los métodos expuestos en 5.1.4.4., aplicados a una variación de temperatura $c\ (T_s - T_m)$ donde

$c = 1$ para edificios sin calefacción

$c = 0{,}7$ para edificios con calefacción pero sin aire acondicionado[1]

$c = 0{,}55$ para edificios con calefacción y aire acondicionado[1]

El cierre máximo de juntas y el ancho de juntas se calculan de acuerdo con lo indicado en 24.1.2 b) y c) respectivamente.

En todo cálculo analítico de juntas es esencial introducir hipótesis correctas acerca de la unión de los pilares al cimiento, o mejor dicho, del conjunto pilar-cimiento al suelo. Véase a estos efectos el método expuesto en 11.7, para considerar un empotramiento flexible, y no rígido, entre el pilar y su cimiento y el suelo.

24.1.4 TIPOS DE JUNTAS

En los edificios usuales de entramados pueden presentarse diversas situaciones y diferentes tipos de juntas que se indican en la figura 24-3.

1 Para zonas sísmicas, véase el Capítulo 67.

2 Se recuerda que los equipos de calefacción y aire acondicionado sólo deben ser tenidos en cuenta si no es probable que su funcionamiento se interrumpa por más de dos días consecutivos.

El caso indicado en la figura 24-3 a) corresponde a entramados paralelos a las fachadas de mayor longitud, con pilares duplicados en junta, formando lo que se llama una "junta en diapasón".

La solución indicada en la figura 24-3 b) resuelve el mismo problema sin duplicar el pilar en junta, pero empleando ménsulas de apoyo.

El caso de la figura 24-3 c) corresponde a entramados perpendiculares a las fachadas de mayor longitud, y de nuevo utiliza la "junta en diapasón" con duplicación de pilares.

La solución de la figura 24-3 d) resuelve el mismo problema sin duplicar los soportes pero con la doble complejidad de necesitar ménsulas para recibir las vigas de fachada y de que la viga del entramado de junta adopta la sección en L para materializar un apoyo deslizante del forjado del bloque de la derecha.

Las soluciones habituales utilizan hoy, casi sin excepción, el sistema de "junta en diapasón", ya que evita la complejidad de los apoyos deslizantes y su mantenimiento, que con frecuencia es problemático. Por otra parte, la necesidad de acusar las juntas en fachada conduce también a la preferencia de este tipo de juntas por motivos estéticos. La forma de ejecución y los detalles constructivos se indican en el Capítulo 49.

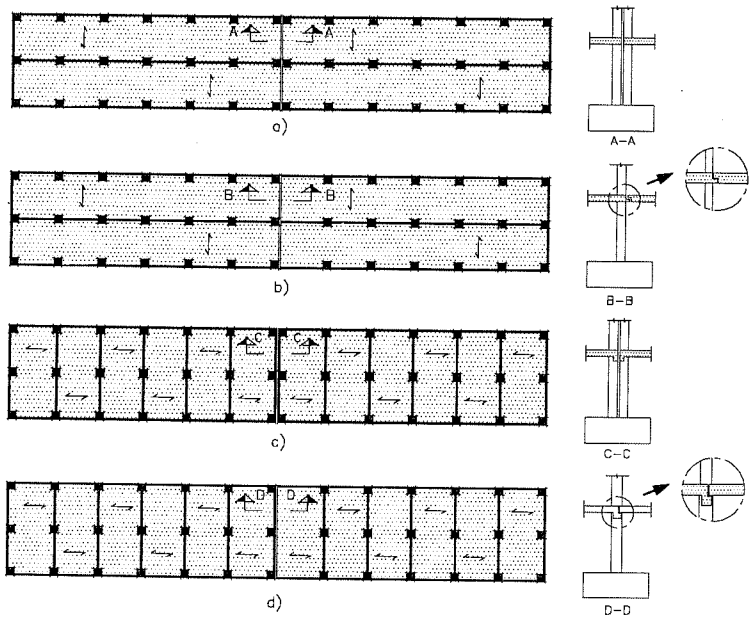


Figura 24-3

24.1.5 CONSIDERACIONES ADICIONALES

a) Como aplicación a lo dicho en 25.1.2 b) sobre el valor de L a considerar en los cálculos de cierre y ancho de juntas, la figura 24-4 indica tres diferentes casos:

En el caso a) los dos bloques que coinciden en la junta tienen una distribución aproximadamente uniforme y simétrica de rigideces respecto a los puntos medios de sus longitudes L_1 y L_2 de forma que sólo los cambios dimensionales de las longitudes

$\frac{L_1}{2}$ y $\frac{L_2}{2}$ afectan a la junta y por tanto

$$L = \frac{L_1 + L_2}{2} \qquad [24.6]$$

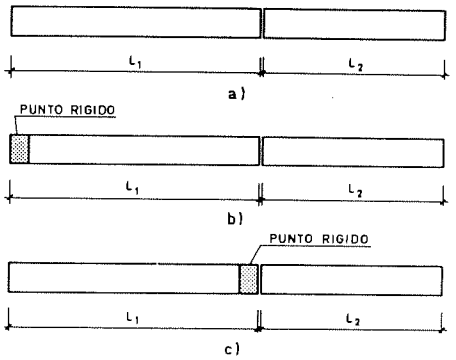


Figura 24-4

En el caso b), una zona de rigidez sustancialmente mayor que la del resto de la estructura está situada en el extremo del bloque más alejado de la junta. Los cambios dimensionales de la junta son, por tanto, mayores que los del caso anterior y tomaremos

$$L = \frac{1{,}5\ L_1 + L_2}{2} \qquad [24.7]$$

En el caso c) la zona de mayor rigidez está al lado de la junta y, por análogas consideraciones, tomaremos

$$L = \frac{2/3\ L_1 + L_2}{2} \qquad [24.8]$$

b) Con independencia de los valores proporcionados por el cálculo, ya dijimos que el ancho de junta no debe ser inferior a 25 mm. Si resulta necesario un

ancho superior a 50 mm, la junta requerirá un estudio muy cuidadoso del comportamiento de las partes no estructurales del edificio, tanto desde el punto de vista estético como de condiciones de servicio.

c) Las juntas deben afectar al edificio en su totalidad, con excepción de los cimientos enterrados, que no necesitan juntas. Sin embargo, al enfriarse el edificio y tal como se indica en la figura 24-5, se inducen fuerzas F_1 en la cara superior de la zapata. En general no es necesario un cálculo específico de estos esfuerzos pero sí es aconsejable la disposición de una cierta armadura A que controle la posible fisuración en la cara superior, debida a la tracción F_1.

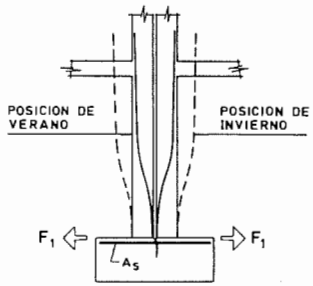


Figura 24-5

d) Las juntas requieren una cierta conservación con el fin de evitar que la introducción de materiales extraños en ella dificulte su correcto funcionamiento. Ello exige que su situación permita la inspección periódica.

e) En general, los cálculos teóricos sobre juntas conducen a resultados que discrepan apreciablemente del comportamiento real, debido en general a que las partes no estructurales del edificio revisten la estructura y hacen que ésta siga con un cierto retraso los cambios de temperatura y los amortigüen parcialmente.

K.K. KARPATI y P.J. SEREDA (24.3) procedieron a mediciones en edificios reales y llegaron a la conclusión de que los movimientos de las juntas en la parte superior de los edificios son aproximadamente la mitad de los proporcionados por el cálculo teórico y resultan prácticamente nulos en la parte inferior.

f) No debe olvidarse que todo lo que aquí se dice se refiere a las distancias entre juntas admisibles desde el punto de vista de los esfuerzos provocados en la estructura por las variaciones térmicas. Los materiales no estructurales pueden requerir juntas más próximas y/o mayor número de juntas, como vimos en la Tabla 24.1.

g) Las juntas en zonas de alto riesgo sísmico requieren anchos especiales según veremos en el Capítulo 67.

24.2 JUNTAS DE ASIENTO

24.2.1 CONCEPTOS GENERALES

Las juntas de asiento tienen como misión permitir asientos diferentes de dos zonas de un edificio. Son por tanto juntas que afectan a la totalidad del edificio, *incluida la cimentación*. Como un ejemplo, en la figura 24-6 se representa en sección y planta un edificio compuesto de una torre de gran altura y pequeña superficie en planta, rodeada en su zona baja de un área edificada en una gran extensión, pero con poca altura. Los asientos previsibles en las dos zonas de alturas tan diferentes habrán de ser también muy distintos y ello requiere una junta de asiento independizando ambas partes del edificio.

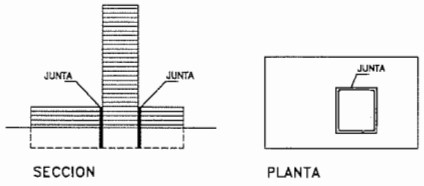


Figura 24-6

ESCOLA POLITÈCNICA SUPERIOR BIBLIOTECA UNIVERSITAT D'ALACANT

24.2.2 POSICIÓN DE LAS JUNTAS

Salvo un estudio especial de la situación planteada, deben disponerse juntas de asiento en los siguientes casos:

- Para separar zonas del edificio de alturas muy diferentes.
- Para separar zonas del edificio cimentadas en suelos de diferentes características.
- Para separar zonas del edificio cimentadas a profundidades muy diferentes.

Por supuesto, una junta de asiento puede coincidir con una junta de dilatación, que, en este caso, ha de afectar también a la cimentación.

24.3. JUNTAS DE HORMIGONADO[1,2]

24.3.1 CONCEPTOS GENERALES

Las juntas de hormigonado son prácticamente inevitables en las estructuras de hormigón, si se exceptúan las de muy pequeña dimensión. Su necesidad surge de dos orígenes diferentes:

1 El tema de las juntas de hormigonado se incluye aquí, aunque el libro esté dedicado al Proyecto y no a la Ejecución de Estructuras de Hormigón. La razón es que el proyectista debe dar reglas generales de la posición y distancia de estas juntas. No es en cambio posible que se fije en el proyecto la posición de las juntas, y ello por dos razones. Una, es que la separación entre las juntas de contracción depende de la época de construcción, cosa difícil de prever al redactar el proyecto. Otra es que el problema de la disposición de juntas de contracción admite diferentes soluciones y es recomendable respetar la libertad de elección del constructor, siempre que la solución que elija respete las reglas generales establecidas en el proyecto.

2 Lo que sigue es válido para estructuras en general. Debe excluirse de ello el caso de las presas, tema que cae fuera del alcance del libro y los casos de muros y pavimentos que tienen reglas específicas que se exponen en los Capítulos 64 y 70.

- La necesidad de interrumpir el hormigonado al finalizar la jornada de trabajo. El hormigonado de la pieza se continúa al siguiente día laborable. En este caso, la junta de hormigonado suele denominarse junta de construcción o junta de trabajo.
- La necesidad de permitir que se produzca una fracción apreciable de la contracción térmica. En este caso, la junta corresponde a una interrupción del hormigonado de varios días y suele denominarse junta de contracción.

En ambos casos es esencial conseguir una buena transmisión de esfuerzos a través de la junta y esto se ha de conseguir mediante la adherencia entre el hormigón viejo y el nuevo[1].

Los aspectos más fundamentales de las juntas afectan a los temas siguientes:

- Posición
- Rugosidad
- Tratamiento
- Duración de la interrupción del hormigonado

que serán expuestos a continuación.

Debe señalarse que existe poca documentación sobre este tipo de juntas y las opiniones sobre ellas, en muchos casos, son contradictorias.

En particular, la Instrucción EHE (24.5) trata el tema muy brevemente en sus artículos 4.4 y 71.

La cuestión es importante, porque la disposición de juntas y su técnica de ejecución afectan de manera notable al ritmo de construcción. La información que sigue está recogida, fundamentalmente, de la Tesis Doctoral de la referencia (24.6)[2] y de las publicaciones (24.7), (24-8), (24.9) y (24.10).

24.3.2 ASPECTOS ESENCIALES DE LA CONTRACCIÓN TÉRMICA

La contracción térmica del hormigón es debida a las reacciones exotérmicas producidas durante la hidratación del cemento. Ello produce un aumento de temperatura en la masa del hormigón, que alcanza niveles claramente por encima de la temperatura ambiente.

El hormigón de la pieza próximo a la superficie de la misma, disipa calor con facilidad y tiende a alcanzar en poco tiempo la temperatura del aire y a seguir sus variaciones. Sin embargo, el hormigón del interior de la pieza no puede hacer esto con facilidad y tarda varios días en uniformar su ciclo de temperaturas con el ambiente que rodea a la pieza. El problema es tanto más grave cuanto más baja es la relación superficie/volumen de la pieza de hormigón.

1 La palabra adherencia es puramente convencional aqui. El fenómeno de transmisión engloba comportamientos muy complejos que abarcan adherencia, rozamientos, imbricación, etc.

2 CAFFARENA, J "Estudio experimental de juntas de hormigonado en estructuras de edificios". Tesis Doctoral realizada en la Cátedra de Edificación y Prefabricación de la Escuela de Ingenieros de Caminos de Madrid, bajo la dirección de J. CALAVERA.

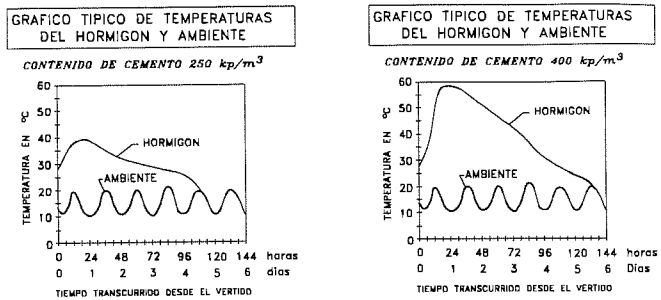


Figura 24-7

En la figura 24-7, tomada de la referencia (24.11) se indican saltos térmicos (diferencia entre la temperatura interior de la pieza de hormigón y la ambiente) para los hormigones típicos.

Como puede verse, la temperatura de la pieza iguala a la del ambiente en un plazo de 4 a 6 días y en la mitad de esos plazos se ha reducido la diferencia considerablemente.

Sin embargo, en piezas de longitud considerable si la deformación por la contracción térmica producida al enfriarse la pieza está coartada se ocasionan tracciones importantes en el hormigón y éste puede fisurarse.

El curado adecuado del hormigón, las cuantías mínimas de contracción y retracción son condiciones necesarias en tales casos para evitar la fisuración del hormigón pero no suficientes. La disposición correcta de juntas de contracción es un complemento imprescindible en la mayoría de los casos.

24.3.3 JUNTAS HORIZONTALES EN PIEZAS DE DIRECTRIZ VERTICAL O CUASIVERTICAL

En la figura 24-8 se indican distintos casos de este tipo de juntas.

En todos los casos, la contracción térmica no está coartada en sentido vertical y por lo tanto este tipo de juntas es simplemente de juntas de trabajo y no presenta problemas en la práctica. La rugosidad natural que queda en las superficies horizontales al vibrar el hormigón y el estado de limpieza de que se habla en 24.3.4 son suficientes en la práctica.

El único caso que puede requerir un análisis especial es el de los muros de contención, pero como veremos en el Capítulo 64, con las dimensiones que habitualmente se emplean para el espesor del muro en el arranque, la junta no presenta ningún problema. Los casos b) y c) de la figura 24-8 se benefician además de compresiones importantes normales a la junta.

Lo anterior es válido siempre que no existan acciones sísmicas, ni efectos de fatiga ni el esfuerzo axil ortogonal al plano de la junta sea de tracción. Para tales casos véase el Capítulo 40.

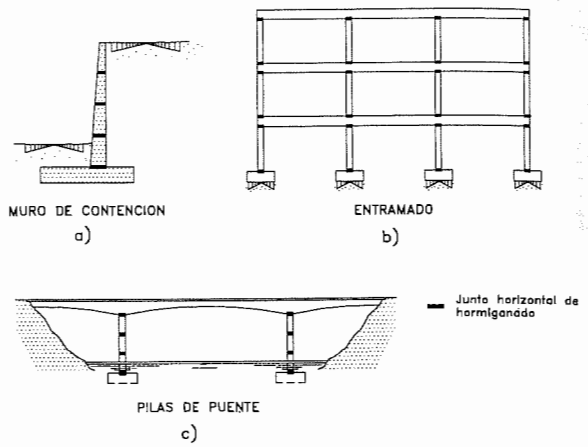


Figura 24-8

24.3.4 JUNTAS EN PIEZAS DE DIRECTRIZ HORIZONTAL O CUASIHORIZONTAL SOMETIDAS A FLEXIÓN

Este caso es considerablemente distinto del anterior. Corresponde, p. ej. a los dinteles de las figuras 24-9 a) y b). En la figura 24-9 se representan dos casos diferentes de hormigonado de un dintel. En el caso a) el entramado se hormigona de izquierda a derecha y no existen problemas derivados de la contracción térmica. De acuerdo con las posibilidades de hormigonado (del dintel y de las zonas de losa asociadas, dinteles paralelos que se hormigonan conjuntamente, etc.) una posible solución es la disposición únicamente de juntas de trabajo, por ejemplo las *C* y *D*. Los tramos consecutivos de hormigonado, tales como *AC* y *DC* o *CD* y *DB*, se diferencian solamente en unas 12 horas de edad, correspondiente a la interrupción diaria del trabajo.

Sin embargo si la luz *L* es apreciable, tal solución no es posible p. ej. con $L = 6$ m, la longitud *AC* sería del orden de 28 m, la cual es excesiva por razones de contracción térmica, como más adelante veremos. Si por ejemplo la máxima longitud posible son 22 m, sería necesario disponer juntas de contracción (no de trabajo) tales como las *E,F* o las *G,H* de la figura 24-9 b). (Ampliaremos este tema en 24.3.6.8)

Debe considerarse que la contracción térmica no sólo está condicionada por la longitud de pieza hormigonada. Existen en general dos posibles coacciones externas.

- Las armaduras horizontales del dintel, si no se interrumpen de forma adecuada, como más adelante veremos.
- La coacción impuesta por los pilares. En menos de 24 horas, según la temperatura ambiente, se desarrolla la adherencia entre el dintel recién hormigonado y los pilares entre junta y junta.

  El acortamiento del dintel encuentra la coacción de los pilares, y según su flexibilidad, introduce tracciones en el dintel más o menos elevadas.

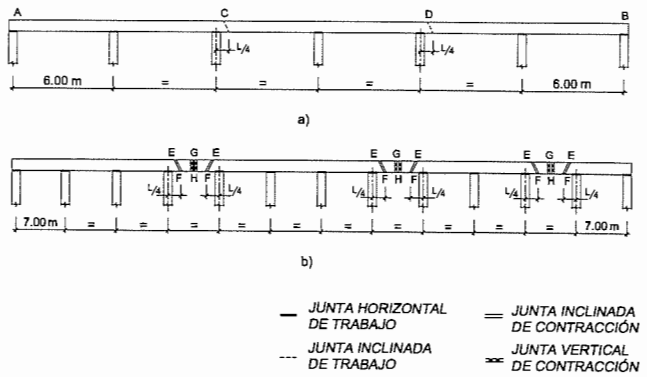


Figura 24-9

24.3.5 CUESTIONES BÁSICAS PLANTEADAS POR LAS JUNTAS DE TRABAJO Y DE CONTRACCIÓN EN PIEZAS DE DIRECTRIZ HORIZONTAL O CUASIHORIZONTAL SOMETIDAS A FLEXIÓN

Las juntas de trabajo en este caso, plantean las siguientes cuestiones:

a) Posición a lo largo de la luz.

b) Inclinación respecto a la directriz de la pieza.

c) Rugosidad de la superficie.

d) Tratamiento previo de la superficie endurecida antes de la continuación del hormigonado.

e) Compactación del nuevo hormigón fresco junto a la junta.

En el caso de las juntas de contracción, a las cinco cuestiones anteriores deben añadirse otras tres:

f) Longitud máxima de hormigonado.

g) Disposiciones para que la armadura longitudinal de la pieza, situada en la zona abierta de junta, no coarte el acortamiento de las dos zonas hormigonadas.

h) Tiempo mínimo de apertura de la junta.

Por tanto, el caso más complejo es el de las juntas de contracción y las de trabajo son un caso particular en el que no intervienen las cuestiones f), g) y h).

Desarrollamos a continuación por tanto el caso más general de las juntas de contracción, del que se deriva, como caso particular más simple, el de las juntas de trabajo.

24.3.6 JUNTAS DE CONTRACCIÓN EN PIEZAS DE DIRECTRIZ HORIZONTAL O CUASIHORIZONAL SOMETIDAS A FLEXIÓN

24.3.6.1 Posición e inclinación

Como norma general, suele recomendarse que las juntas se dispongan en zonas de esfuerzos reducidos. Esto no es posible en la mayoría de los casos. Unas veces, como en el caso de la viga continua de las figuras 24-10 a) y b), los mínimos de momentos flectores no coinciden con los mínimos de esfuerzos cortantes. En otros casos, como en el del muro de contención de la figura 24-10 c), es necesario disponer, por razones constructivas, una junta de hormigonado en la sección, que, precisamente, es la de máximo momento flector y máximo esfuerzo cortante. *AB*

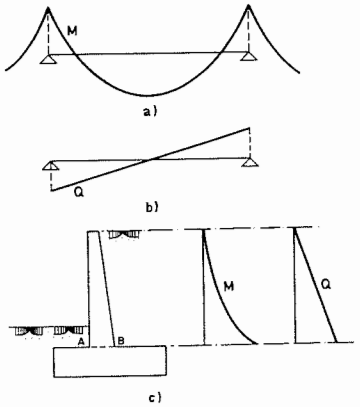


Figura 24-10

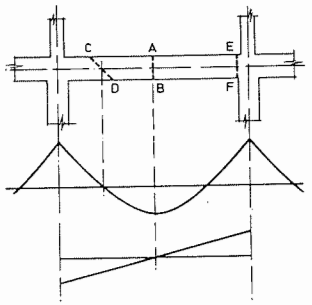


Figura 24-11

En el caso más frecuente en dinteles, existen dos soluciones que vienen practicándose con buenos resultados y que se indican en la figura 24-11.

La solución *A-B* corresponde a junta vertical situada en la zona de máximos momentos de vano, que es la de cortante nulo. Durante mucho tiempo, este tipo de junta fue deficiente y además poco práctico, por ser necesario encofrarla. Modernamente se ha recurrido al empleo de metal desplegado o malla muy tupida (25 · 25 mm) generalmente galvanizados, que retienen el hormigón dejando la junta muy rugosa y no siendo necesario retirar el metal o malla.

La solución *C-D*, investigada en la Tesis de J. CAFFARENA (24.6) corresponde a una junta inclinada situada en el punto de momento nulo, al que corresponden esfuerzos cortantes de magnitud media, en cuanto a un plano ortogonal a la directriz, pero nulos en el plano *C-D* de junta. Teóricamente, el ángulo de la junta con la horizontal debería ser el de talud natural del hormigón, o sea de unos 30°. Sin embargo, en vigas de ancho hasta 50 cm, la presencia de la armadura y el rozamiento con los encofrados laterales permiten que el ángulo se aproxime al teóricamente deseable de 45°.

Otra posibilidad es "encofrar" la junta con metal desplegado, dejando un pequeño tramo vertical *MN* para asegurar un buen llenado de la zona *MN*, tal como se indica en la figura 24-12. Debe tenerse cuidado de introducir los extremos *A* y *B* del metal desplegado o malla hacia dentro, pues al ser zonas cortadas las puntas no están galvanizadas. Lo mismo debe hacerse junto a los encofrados laterales. El metal desplegado o malla se cortan para permitir el paso de las armaduras. En piezas grandes resultarán necesarios trozos de despunte atados a los estribos para contener el empuje del hormigón fresco junto al metal o malla y evitar que se deforme excesivamente.

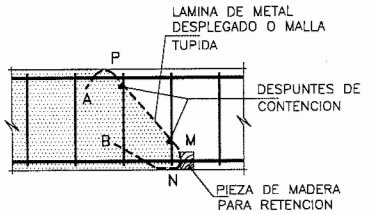


Figura 24-12

En la figura 24-13 se indica la red de isostáticas de un dintel continuo. Tanto la junta *AB* como la *CD* están dispuestas ortogonalmente a la red de isostáticas de compresión y, por tanto, no están sometidas a esfuerzos cortantes.

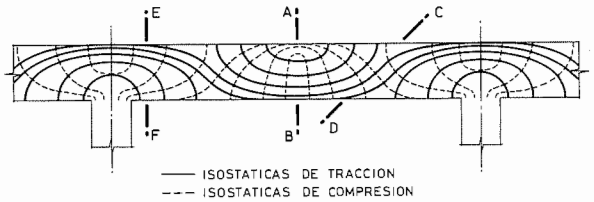


Figura 24-13

Los ensayos de BROOK (24.8) y MONKS y SADGROVE (24.9)[1] han arrojado información interesante sobre estos temas y sus conclusiones se resumen a continuación.

- La disposición de una junta en una viga de hormigón armado, en zonas no sujetas a esfuerzos cortantes apreciables, no afecta significativamente ni a la rigidez ni al momento de rotura de la viga.
- Existe una cierta tendencia, en las juntas verticales, a que se produzca en ellas una fisura de flexión, aunque su ancho no suele rebasar el admisible.
- Cuando la junta está sometida a flexión y corte, el comportamiento de la junta, si ésta presenta superficie rugosa, es similar al de una viga monolítica. Si la junta se encofra, la reducción de la capacidad a corte puede alcanzar hasta el 40%.

Todo lo anterior indica como preferibles las juntas *AB* y *CD*, aunque si la superficie es rugosa y el tratamiento adecuado, la solución *EF* de la figura 24-13 no puede ser rechazada, si bien la posible fisura aconseja reducir su empleo a casos de ambientes normales. No debe olvidarse que este último tipo de junta, como ya indicamos en la figura 24-10 c), es habitual en muros de contención, precisamente en zonas de máximo momento flector y máximo esfuerzo cortante, sin que la experiencia adquirida sea desfavorable. De todas formas, estas juntas en zonas de esfuerzos cortantes grandes es siempre aconsejable que sean comprobadas a esfuerzo rasante, de acuerdo con lo que se indica en el Capítulo 40.

Por lo que se refiere a los tipos habituales *AB* y *CD*, el segundo presenta la ventaja de que en toda la superficie de la junta no hay ni tracciones ni tensiones de corte. Es el tema investigado en la referencia (24.7).

24.3.6.2 Rugosidad

El tema de la rugosidad de la superficie de las juntas ha sido objeto de numerosas investigaciones, no sólo en relación con las juntas de hormigonado de las estructuras hormigonadas "in situ", sino, muy especialmente, en relación con el esfuerzo rasante entre piezas prefabricadas y hormigones "in situ". Las investigaciones realizadas en los últimos años han obligado a revisar muchas ideas y prácticas constructivas que se han mostrado erróneas.

A los efectos de juntas de hormigonado, las superficies que pueden obtenerse de una manera simple, que las haga adecuadas para la práctica de obra, son las siguientes:

- Superficies encofradas
- Superficies cepilladas
- Superficies con rugosidad natural
- Superficies encofradas con metal desplegado

Un estudio comparativo de las tres primeras ha sido realizado por CALAVERA, GONZÁLEZ VALLE, DELIBES e IZQUIERDO (24.12). Sus principales conclusiones se exponen a continuación:

1 Ni los ensayos de BROOK ni los de MONKS y SADGROVE incluían juntas del tipo *CD* indicado en la figura 24-8, que fue estudiada en la Tesis Doctoral de J. Caffarena (24.6)

- *Superficies encofradas*. Por extensión pueden asimilarse a ellas también las superficies fratasadas. Su capacidad de adherencia es baja pero no nula, y si los esfuerzos cortantes en la sección son despreciables, puede ser una solución aceptable para una junta. La dificultad principal de una junta de este tipo reside en la casi imposibilidad de disponer armaduras pasantes en el caso de juntas no horizontales, ya que, de otra forma, el encofrado se complica considerablemente. (Puede conseguirse con el empleo de planchas de poliestireno apoyadas en despuntes de armadura. (Ver (24.6)).
- *Superficies cepilladas*. Son las recomendadas en muchas normas, y en particular en la Instrucción *EHE*. El método consiste en cepillar la superficie del hormigón transcurrido un tiempo que suele oscilar de dos a dieciséis horas, a partir de la colocación del hormigón, de forma que se retire parte del mortero y quede visto el árido grueso. El problema es que si el cepillado es prematuro se corre el peligro de que el árido visto quede "suelto", es decir, que se rompa la adherencia de ese árido con la matriz del mortero. Con ello, al colocarse el nuevo hormigón, adherirá a un árido grueso que no estaría adherido a su vez al hormigón antiguo. Por el contrario, si el cepillado se retrasa, se corre el riesgo de que el mortero esté excesivamente duro para que el cepillo pueda levantarlo. La eficacia del procedimiento está, por tanto, muy ligada a la velocidad de endurecimiento del hormigón, la que a su vez depende del cemento empleado y de la temperatura ambiente. Como además los ensayos han puesto en evidencia que esta rugosidad no es apreciablemente mejor que la natural, nuestra opinión es contraria a este tipo de rugosidad, que además es relativamente costoso de realizar.
- *Superficie natural*. Es la obtenida simplemente al vibrar el hormigón. Debe llamarse la atención sobre el peligro de que, por un exceso de vibración, se forme, en el caso de superficies horizontales, una lechada de cemento en la superficie, que es perjudicial para la adherencia de ambos hormigones. Esto puede detectarse fácilmente rayando la junta con un clavo. La junta horizontal es muy frecuente en la unión de pilares a cimientos y de pilares a vigas en los entramados (figura 24-8 b)).

  Los ensayos han demostrado que esta junta tiene análoga adherencia que la obtenida por cepillado.
- *Metal desplegado o malla tupida*. De acuerdo con la Tesis de J. CAFFARENA (24.6) es evidente que, de las cuatro analizadas, es la de mayor capacidad adherente. Sin embargo, debe prestarse atención a que el metal tenga un galvanizado de espesor tal que su duración no sea inferior a la vida prevista para la estructura, pues en otro caso, en especial en ambientes húmedos, pueden surgir manchas de corrosión en la superficie de la junta. Esto es debido a que el metal desplegado situado en el plano de junta ha de entrar en contacto, forzosamente, con los encofrados, y en definitiva quedará en contacto con la superficie del hormigón.

  Un tratamiento, en cambio, que debe ser prohibido, es el "picado" de la junta con medios mecánicos. Los ensayos demuestran que produce una microfisuración del hormigón que debilita la adherencia de la junta.

  Naturalmente, tratamientos como el chorro de arena, la imprimación con resinas, etc. pueden conducir a juntas excelentes, pero por su elevado coste no son de empleo usual en las juntas de estructuras, salvo casos especiales.

24.3.6.3 Tratamiento previo a la continuación del hormigonado

El primer tratamiento a aplicar a la junta, antes de verter el nuevo hormigón, es limpiarla adecuadamente. Esto exige disponer los encofrados de forma que la junta pueda realmente limpiarse y pueda retirarse el polvo y la suciedad limpiados. Las zonas muy densas de armaduras pueden presentar dificultades apreciables. Los ensayos descritos en la referencia (24.12) pusieron en evidencia que cantidades pequeñas de polvo pueden reducir la adherencia en un 30%.

El mejor tratamiento de limpieza es la retirada de polvo y suciedad con aspiradoras, pero esta técnica sólo se aplica en presas.

La técnica de limpieza con chorro de aire mediante una manguera conectada a un compresor es incorrecta, salvo en superficies verticales, pues como se indica en la figura 24-14, el aire a presión lanza el polvo a la atmósfera, pero transcurrido algún tiempo este se vuelve a depositar en las juntas.

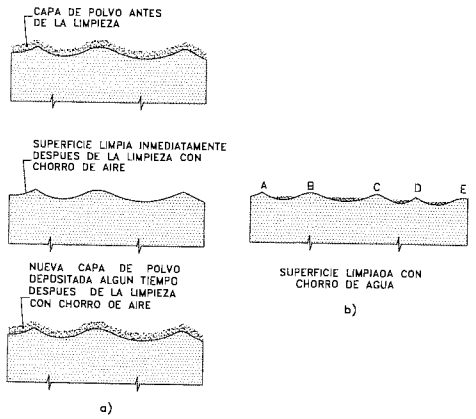


Figura 24-14

Para las juntas de estructuras usuales el mejor procedimiento es la limpieza con chorro de agua[1]. Ciertamente este procedimiento deja algo de barro formado por polvo húmedo en los valles y cráteres de la superficie de las juntas, (figura 24-11 b)) pero en cambio deja limpias todas las zonas altas como las *A, B, C, D* y *F* de la figura, que aseguran un buen contacto con el hormigón fresco.

Además de la limpieza, habitualmente se aplica algún tratamiento adicional a la junta.

- Un tratamiento, hoy abandonado, fue el de aplicar lechada de cemento. El procedimiento en sí no es perjudicial, pero existe un riesgo grande de que, por problemas de organización de los tajos de hormigonado, la lechada se seque y fisure por retracción antes de que se deposite el nuevo hormigón, dañando gravemente la adherencia de la junta, ya que la lechada seca se transforma en un polvo inerte interpuesto en la junta.
- Un tratamiento bastante difundido es frotar la superficie de la junta con mortero, inmediatamente antes de depositar el nuevo hormigón. La técnica intenta evitar que, por segregación del vertido del nuevo hormigón, la zona de contacto de la junta quede empobrecida de mortero. El mortero que se emplea puede ser obtenido por cribado del propio hormigón. La dificultad reside en que el procedimiento es difícil de aplicar cuando la densidad de armaduras es grande y, por otra parte, al desencofrar la capa de mortero se aprecia en la superficie de contacto, creando problemas de aspecto si el hormigón va a quedar visto. Puede ser un sistema adecuado en casos en que, por segregación de vertido del hormigón nuevo, se tema un empobrecimiento en la zona de junta.
- A nuestro juicio, el mejor procedimiento es, después de la limpieza, simplemente humedecer la superficie de hormigón antiguo y depositar el nuevo cuando la superficie comienza a estar visiblemente seca. Con esto no existe peligro de que el hormigón antiguo absorba agua del nuevo. La técnica de mantener la superficie húmeda hasta el hormigonado se ha demostrado en ensayos recientes que reduce la resistencia.

24.3.6.4 Duración máxima de la apertura de la junta

El tiempo transcurrido entre el final de la puesta en obra del hormigón antiguo y el comienzo de la del hormigón nuevo no tiene influencia apreciable sobre la adherencia de la junta. Los ensayos de WATERS (24.13) demostraron que la resistencia de la unión no variaba dentro de plazos de apertura de la junta de 1 a 100 días. Los ensayos ya citados de CAFFARENA (24-6) no apreciaron diferencias entre piezas con juntas abiertas 2, 7 y 155 días[1].

24.3.6.5 Compactación en la zona próxima a la junta

En el caso de juntas de hormigonado en general, la resistencia de la junta está fuertemente condicionada por la compactación del hormigón nuevo junto a la superficie de la junta. Los ensayos demuestran que la resistencia puede reducirse a la mitad si en vez de una vibración enérgica y cuidadosa de la junta, se coloca el hormigón sin vibración. El curado de la zona de la junta debe ser también especialmente cuidadoso.

24.3.6.6 Distancia entre juntas de contracción

En el caso particular de las juntas de contracción, la distancia entre ellas está muy influida por las condiciones higrotérmicas del ambiente y por la cuantía de armaduras. Si las cuantías son elevadas, la estructura puede incluso hormigonarse sin juntas. Sin

1 Nos referimos al uso de agua a baja presión, no al empleo de chorro de agua a alta presión que se emplea en juntas de presas.

1 Es interesante aclarar que la unión entre ambos hormigones no debe su eficacia a ningún tipo de reacción química del cemento de ambos hormigones, y por eso siempre que la superficie esté limpia conserva la junta su capacidad de unión, con independencia de la edad a la que produzca la unión. Realmente, la superficie de la junta no es una superficie "cerrada" sino un fractal. Para una exposición general de la teoria matemática de loa fractales, véase MANDELBROT (24.14)

embargo, en las estructuras usuales, las cuantías no suelen ser tan importantes y por lo tanto se hace necesario disponer juntas. Se sugieren los valores de la tabla T-24.2 como distancias máximas.

TABLA T-24.2.- DISTANCIA MÁXIMA ENTRE JUNTAS DE CONTRACCIÓN EN FORJADOS, LOSAS, DINTELES DE ENTRAMADOS, DINTELES DE PUENTES, ETC.

TIPO DE CLIMA	ÉPOCA DEL AÑO	
	CALUROSA	FRÍA
SECO	16 m	20 m
HÚMEDO	20 m	24 m

* Reducir un 15% si los pilares tienen rigideces importantes.

* Aumentar un 25% si los pilares son muy flexibles o el dintel se apoya sobre aparatos de apoyo que facilitan el acortamiento.

24.3.6.7 Tiempo mínimo de apertura de la junta

Un punto controvertido es el del tiempo a transcurrir entre el vertido de ambos hormigones. Nuestra experiencia es que dos días en invierno y tres en verano son suficientes en la práctica, para obras usuales, si se respetan las cuantías mínimas reglamentarias y el curado es adecuado. Este plazo tiene por supuesto una incidencia grande en el rendimiento del hormigonado y, por lo tanto, en el coste de la estructura.

24.3.6.8 Posición a lo largo de la directriz

Existen, en general, tres procedimientos en cuanto a la disposición de juntas de contracción, que se indican esquemáticamente en la figura 24-14. El primero consiste en dejar sin hormigonar una zona de corta longitud, usualmente de 0,50 m a 1,00 m en zona de esfuerzo cortante despreciable (figura 24-14 a)). El segundo consiste en interrumpir el hormigonado entre cuartos de la luz (figura 24-14 b)). El tercero es el representado en la figura 24-14 c), en la que las juntas *A* o *B* se hacen en vanos contiguos. Los tres tipos tienen que ser estudiados para elegir la solución que perturbe menos el plan de hormigonado. La solución c), la mejor técnicamente, con los esquemas actualmente en uso para el despiece de ferralla, hace que la armadura esté interrumpida en la zona no hormigonada de los solapes sobre el pilar, permitiendo su corrimiento de acuerdo con el acortamiento de las dos zonas hormigonadas. La primera y segunda soluciones exigen en cambio disponer solapes que independicen las armaduras de ambas zonas. Esto exige cuidados especiales en la disposición de estribos en la zona de solape, si está situada en zona de grandes momentos flectores, tal como demostraron los ensayos de MONKS y SADGROVE citados en la referencia (27.9). Véase el Capítulo 44, para la longitud ℓ de solape, que es el doble de la estándar al solaparse la totalidad de la armadura.

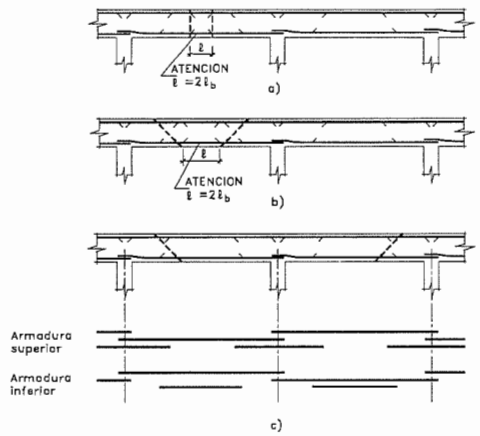


Figura 24-15

24.3.6.9 Casos de fatiga o esfuerzos de tracción normales a la junta

Todo lo anterior es válido para cargas estáticas, como son las habituales. En el caso de estructuras sometidas a fatiga, disponemos de menos información experimental, aunque los ensayos de FOURE (24.15) realizados en 1988, confirman la tesis expuesta por CALAVERA en 1981 (24.16) en el sentido de que, en casos de fatiga, la adherencia hormigón-hormigón debe ser despreciada y el cosido confiado exclusivamente a las armaduras. (Véase el Capítulo 40 para más detalles). Lo mismo vale para planos de junta sometidos a un esfuerzo total axil de tracción.

24.3.7 JUNTAS DE TRABAJO

Como anunciamos, todo lo expuesto en el apartado anterior 24.3.6, es íntegramente aplicable, excepto los puntos 24.3.6.4, 24.3.6.6 y 24.3.6.7 que corresponden a situaciones que no se presentan en este caso, ya que en este tipo de juntas el hormigonado se continúa al día siguiente.

De todas formas, si por cualquier causa accidental una junta de trabajo se interrumpe durante un tiempo prolongado, les serían aplicable los aspectos correspondientes de las de contracción.

24.3.8 EJECUCIÓN DE LAS JUNTAS HORIZONTALES DE TRABAJO EN PIEZAS DE DIRECTRIZ VERTICAL O CUASIVERTICAL

Expusimos este tipo en 24.3.3. La rugosidad es en este caso la natural y la limpieza y compactación deben hacerse según lo expuesto en 24.3.6.3 y 24.3.6.5.

24.3.9 CONSIDERACIONES ESPECIALES PARA JUNTAS DE TRABAJO Y CONTRACCIÓN EN EL CASO DE HORMIGONES VISTOS

Recuérdese lo dicho en 24.3.6.3 que desaconseja en este caso el frotado de las juntas con mortero, por el cambio de coloración que ello produce.

Por otra parte, en este caso es esencial que no se aprecien las juntas en la superficie de las piezas, por lo que en el Proyecto deben especificarse condiciones especiales para los encofrados. Véase el MANUAL DE DETALLES CONSTRUCTIVOS, citado en la referencia (24.17).

BIBLIOGRAFÍA

(24.1) MATTHEISS, I. "Hormigón armado. Hormigón armado aligerado. Hormigón pretensado". Editorial Reverte. Barcelona, 1980.

(24.2) "Expansion joints in buildings". Technical Report N° 65. National Academy of Sciences. Washington 1974.

(24.3) KARPATI, K.K.; SEREDA, P.J. "De la mesure du comportement des joints de dilatation". Bâtiment International. Noviembre/Diciembre 1976.

(24.4) LENCZNER, D. "Movements in buildings". Pergamon Press. Oxford. Second Edition, 1981.

(24.5) INSTRUCCIÓN EHE PARA EL PROYECTO Y LA EJECUCIÓN DE OBRAS DE HORMIGÓN ESTRUCTURAL. Ministerio de Fomento. Madrid, 1998.

(24.6) CAFFARENA, J. "Estudio experimental de juntas de hormigonado en estructuras de edificios". Tesis doctoral bajo la dirección de J. CALAVERA. Universidad Politécnica de Madrid. Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Madrid, 1986.

(24.7) CAFFARENA, J.; CALAVERA, J. "Estudio experimental de juntas de hormigonado en estructuras de edificios". Hormigón y Acero n° 167, 1988.

(24.8) BROOK, K.M. "Construction joints in concrete". Cement and Concrete Association. Technical Report. London. Mayo 1969.

(24.9) MONKS, W.L.; SADGROVE B.M. "The effect of construction joints on the perfomance of reinforced concrete beams". Cement and Concrete Association. London. Diciembre 1973.

(24.10) BUSELL, M.N.; CATHER, R. "Design and construction of joints in concrete structures ". CIRIA Report 146. London, 1995.

(24.11) CALAVERA, J.; GONZÁLEZ VALLE, E. "Juntas en construcciones de hormigón". CUADERNOS INTEMAC n° 14. INTEMAC. Madrid, 2° trimestre 1994..

(24.12) CALAVERA, J.; GONZÁLEZ VALLE, E.; DELIBES, A.; IZQUIERDO, J.M. "Ensayos de corte en la superficie de contacto entre hormigones de piezas prefabricadas y hormigones vertidos «in situ»". Hormigón y Acero, n° 119 y 120. (1976).

(24.13) WATERS, T. "A study of the tensile strength of concrete across construction joints". Magazine of Concrete Research. Diciembre 1954.

(24.14) MANDELBROT, B.B. "The fractal geometry of nature". Walter Frreman. New York, 1983.

(24.15) FOURE, B. "Comportement des surfaces de reprise de bétonnage vis-a-vis du cisaillement". Annales de l'I.T.B.T.P. Febrero 1988.

(24.16) CALAVERA, J. "Cálculo, construcción y patología de forjados de edificación". 1ª. Edición. INTEMAC. Madrid, 1981.

(24.17) CALAVERA. J. "Manual de detalles constructivos en obras de hormigón armado". INTEMAC. Madrid, 1993.

CAPÍTULO 25

CONCEPTO Y SISTEMAS DE HORMIGÓN PRETENSADO

25.1. DEFINICIÓN DEL HORMIGÓN PRETENSADO.

El pretensado es una técnica consistente en la introducción en la estructura de fuerzas que producen tensiones, en general de signo contrario a las producidas por las restantes acciones aplicadas, con la intención de mejorar su capacidad resistente o su comportamiento.

Esta definición es general y no exclusivamente aplicable a las estructuras de hormigón.

25.2. CONCEPTO GENERAL DEL PRETENSADO

En toda aplicación del pretensado debe existir un elemento en tracción -en general denominado tendón- y otro elemento comprimido. En el caso del hormigón pretensado el tendón suele ser una armadura de acero y el elemento comprimido, la pieza de hormigón.

La idea intuitiva del pretensado es inmediata y el hombre ha recurrido desde siempre a su desarrollo.

En la figura 25-1.a) se representa una rueda de carro. Del aro arrancan los radios de madera que confluyen en el cubo central. La llanta metálica se fabrica con un radio ligeramente menor que el del aro de madera y se calienta para dilatarla, colocándola entonces en contacto apretado con el aro. Al enfriarse la llanta, comprime el aro y ella se queda en tracción. La compresión sobre el aro origina la compresión de los radios. Cuando sobre el vehículo se aplica una carga (Fig. 25-1.b)), ésta se transmite al eje

Figura 25-1.a)

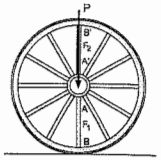


Figura 25-1.b)

y, por éste, al cubo de la rueda. El radio en posición inferior AB -y en menor medida los inmediatos- aumenta su compresión y la longitud AB se reduce. Correlativamente el radio en posición superior A'B' se alarga, pero la compresión previa introducida hace que el esfuerzo resultante sea todavía de compresión. (Los radios no están preparados para resistir tracciones).

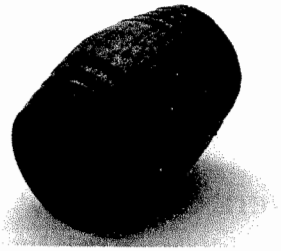


Figura 25-2.a)

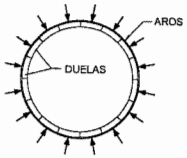


Figura 25-2.b)

En la figura 25-2.a) se representa un barril de madera. La superficie lateral está formada por duelas de madera, con juntas entre ellas. Los aros metálicos se encajan con mazo y escoplo y, en definitiva, crean compresiones circunferenciales que comprimen las juntas entre duelas y hacen estanco el barril (Fig. 25-2.b)). Los aros quedan naturalmente en tracción. El estado tensional y la estanquidad mejoran al absorber la madera parte del líquido contenido, lo que produce su hinchamiento.

En la figura 25-3.a) se representa una sella gallega. En este caso no existe, como en el caso anterior, una tapa superior. La estanquidad de la sella para contener el agua se

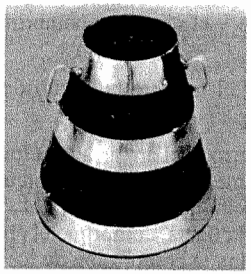


Figura 25-3.a)

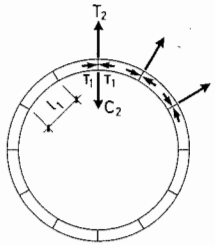


Figura 25-3.b)

consigue por el entumecimiento de las duelas de madera (Fig. 25-3.b)). Al incrementarse el ancho ℓ_1 de la duela por efecto de la humedad transmitida por el agua contenida, se originan en la junta fuerzas T_1, cuya componente T_2 produce tracciones en los aros metálicos, cuya reacción a su vez comprime las duelas y cierra sus juntas.

La figura 25-4.a) muestra una sierra de carpintero. A través del torzal trenzado, se introducen fuerzas C_1 en la parte superior de los balancines que provocan tracciones T_1 en los otros extremos A y C y colocan a la hoja en tracción. Al serrar una pieza de madera, por ejemplo con el sentido de desplazamiento hacia la derecha, el rozamiento de los dientes de la sierra con la madera crea en la hoja una fuerza T_2 de sentido contrario al desplazamiento. La parte de hoja AB está sometida a una fuerza $T_1 - \frac{T_2}{2}$ que, si el tesado del torzal es suficiente, es positiva e impide el pandeo de la hoja. La parte BC incrementa su tracción al valor $T_1 + \frac{T_2}{2}$.

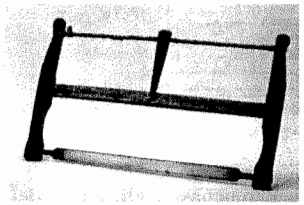


Figura 25-4.a)

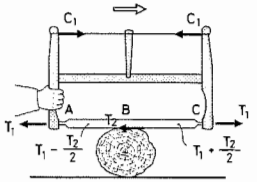


Figura 25-4.b)

Consideremos la figura 25-5.a) que representa una rueda de bicicleta. La llanta metálica y los radios no tienen rigidez suficiente para resistir la fuerza P transmitida por la horquilla del cuadro al cubo radial. Sin embargo, mediante el giro de los terminales roscados en los extremos de cada radio, éstos se tensan, poniéndose en tracción los radios y situando a la llanta en compresión. La carga P, al comprimir los

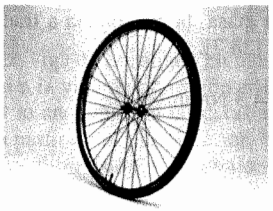


Figura 25-5.a)

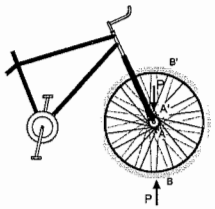


Figura 25-5.b)

radios de la zona en contacto con el suelo, acorta dichos radios, pero gracias a la tensión previa aplicada, siguen en tracción. Los radios de la zona opuesta, es decir de la superior, al descender el eje del cubo radial, se alargan e incrementan su tracción.

Finalmente la figura 25-6.a) muestra un ejemplo clásico de cómo una persona puede transportar una serie de libros simplemente aplicando con las manos una compresión. Obsérvese la analogía completa con una viga prefabricada por dovelas, con un tendón pretensado.

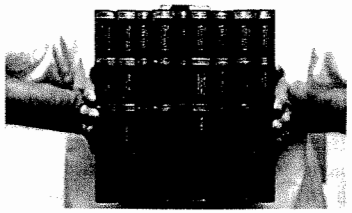


Figura 25-6.a)

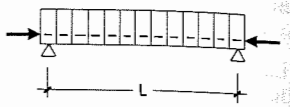


Figura 25-6.b)

Todos los ejemplos apuntados, usados durante muchos años en la vida diaria, muestran cómo el pretensado es una idea intuitiva. No lo es en cambio la técnica del hormigón pretensado, como veremos en los apartados siguientes.

25.3. CONCEPTOS ESTRUCTURALES DEL HORMIGÓN PRETENSADO

25.3.1. COMPENSACIÓN DE TENSIONES

La aplicación de las ideas intuitivas expuestas en el apartado anterior, como era lógico esperar tuvieron pronto su aplicación, a raíz de la invención del hormigón armado, a finales del siglo XIX.

Un elevado número de publicaciones y patentes, muchas de ellas procedentes de personas con escasísimos conocimientos de construcción, desarrollaron de una u otra forma la idea expuesta en la figura 25-7.

Un sistema elemental, muchas veces patentado, es el que exponemos a continuación.

Sea una viga de hormigón H-40, simplemente apoyada, y de sección 500 · 800 mm con luz de 10 m.

a) Si la consideramos como de hormigón en masa, la resistencia a tracción del hormigón H-40 viene dada por la fórmula [28.7].

$$f_{ck,flex} = 0{,}37\ \sqrt[3]{40^2} = 4{,}3\ \text{N/mm}^2$$

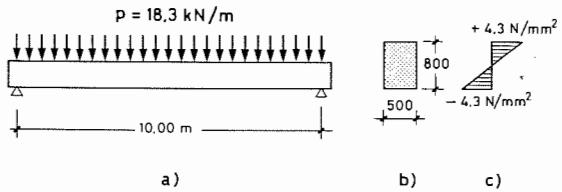


Figura 25-7

El momento flector en N·mm que produce la tensión de tracción de 4,3 N/mm² en la fibra inferior (Fig. 25-7) se obtiene de

$$4{,}3 = \frac{M \cdot 800/2}{\frac{500.800^3}{12}}$$

y expresando M en mkN, M = 229,3 mkN, se produce en el punto medio de la luz para una carga uniforme P = 18,3 kN/m. (Como el p.p. de la viga es de 9,6 kN/m, las acciones exteriores que producen la rotura corresponden sólo a 8,7 kN/m).

b) Supongamos que queremos soportar una carga p.m.l. de 100 kN/m, incluido el peso propio. Evidentemente la sección de hormigón en masa no puede soportarla. Bajo la carga de 100 kN/m, la pieza estaría sometida al momento

$$M = \pm\frac{1}{8}100 \cdot 10^2 = 1250\ mkN$$

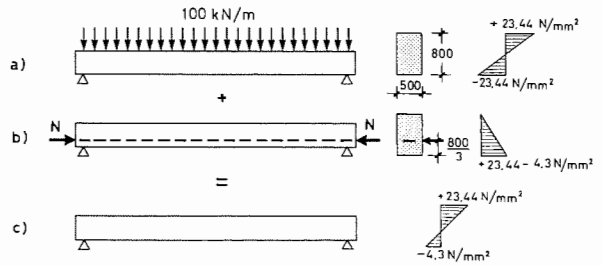


Figura 25-8

que originaría en la sección situada en el punto medio de la luz, las tensiones (Fig. 25-8.a).

$$\sigma = \pm\frac{1250 \cdot 10^6 \cdot 800/2}{\frac{1 \cdot 500 \cdot 800^3}{12}} = \pm\ 23{,}44\ N/mm^2$$

La viga de hormigón en masa no puede soportar tales tensiones. Sin embargo, si a la viga de hormigón en masa le aplicamos un tendón de acero, lo tesamos y lo anclamos en las caras extremas de la viga, todo ello a un tercio del canto a partir de la fibra inferior, la fuerza introducida creará un diagrama triangular de compresiones, con valor máximo en la fibra inferior y nulo en la superior.

Si la fuerza N en el tendón se dispone (fig. 25-8.b)) para que la compresión en la fibra inferior sea igual a (23,44 - 4,3) N/mm², el valor de N necesario, expresado en kN, será

$$N = 500 \cdot 800 \cdot \frac{1}{2}(23{,}44 - 4{,}3) \cdot 10^{-3} = 3828\ kN$$

Si ahora aplicamos la acción exterior de 100 kN/m, el diagrama final de tensiones resultante será el indicado en la figura 25-8.c), con compresión de 23,44 N/mm² en fibra superior y la tensión de resistencia a flexotracción en la inferior. La aplicación del pretensado, si se excluye el p.p. de la viga, ha

permitido pasar de una carga p de rotura de 8,7 kN/m, como sección de hormigón en masa, a otra de 100 - 9,6 = 90,4 kN/m cuando se emplea el pretensado. Su capacidad portante se ha incrementado en $\frac{90,4}{8,7} = 10,4$ veces.

La mayoría de los intentos de realización del hormigón pretensado, en su etapa inicial, giraron alrededor de casos como el expuesto. Todos ellos fracasaban en plazos muy cortos, debido a la ignorancia de los acortamientos del hormigón debidos a retracción y fluencia, que reducían seriamente la fuerza en el tendón y a la ignorancia del fenómeno de relajación de la tensión del acero, generalmente acero ordinario, que también reducía seriamente la fuerza en el tendón.

El nacimiento del pretensado como técnica real es debido a E. FREYSSINET (25.1), que intuyó con claridad las pérdidas de tensión y desarrolló materiales y técnicas para reducirlas e introdujo el empleo de aceros de alta resistencia.

25.3.2. COMPENSACIÓN DE DEFORMACIONES

Esta utilización de la técnica del pretensado es mucho menos intuitiva que la anterior pero también de un gran interés. Veamos su aplicación mediante un ejemplo.

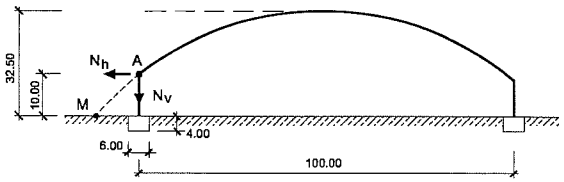


Figura 25-9

En la figura 25-9 se indica en sección transversal un hangar de 100 m de luz con cubierta formada por arcos parabólicos biarticulados. Las acciones sobre los pilares extremos, para una carga permanente de 10 kN/m (por m.l. de luz) y una acción variable (nieve) de 10 kN/m, p.m.l. de luz en proyección horizontal del arco, son las siguientes.

Las reacciones verticales N_v en los pilares valen

$$N_v = 50 \cdot 20 = 1000\ kN$$

La reacción horizontal N_h, al ser el arco parabólico (véase 16.2.11), vale

$$N_h = \frac{20 \cdot 100^2}{8 \cdot 22,5} = 1111\ kN$$

Si el terreno permite una presión admisible de 0,20 N/mm^2, tantearemos la superficie S de cimentación en m^2 para resistir la reacción vertical, siendo h la altura del cimiento en m y el peso específico del hormigón 24 kN/m^3, con 0,15 N/mm^2 de presión admisible.

$$\frac{N_v + h \cdot S \cdot 24}{S} = 150\ kN/m^2$$

de donde, adoptando h = 4 m,

$$S = 18,5\ m^2$$

Adoptando un macizo de cimentación de 6 x 3 m^2 en planta y 4 m de canto (ver figura 25-10), será válido si compensamos la reacción horizontal N_h = 1111 kN.

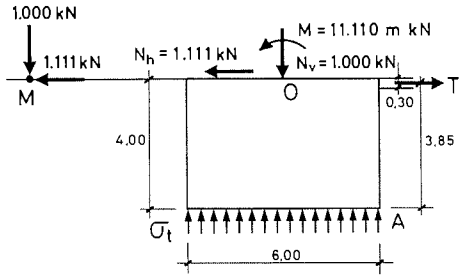


Figura 25-10

Si no la compensamos, el sistema M, N_v, N_h actuante sobre la cara superior de la zapata, sería sustituido por las fuerzas N_v, N_h actuando en M, donde OM = 11,11 m.

Resistir directamente tales acciones a tal distancia exigiría un cimiento costosísimo, por lo que adoptaremos un tirante enlazando los dos cimientos opuestos de forma que centren la presión σ_t de respuesta del suelo.

Planteando las condiciones de equilibrio

$$1000 + 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 24 = \sigma_t \cdot 3 \cdot 6 \qquad \sigma_t = 151,56\ kN/m^2$$

Tomando momentos en A

$$-T \cdot 3,85 + 1000 \cdot 3 + 11110 + 1111 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 24 - 151,56 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 3 = 0$$

Resultando $T = 4040\ kN$.

Veamos la materialización del tirante que ha de enlazar las dos zapatas opuestas, resistiendo la fuerza T de tracción.

Solución A. Tirante metálico formado con perfiles laminados con 260 N/mm^2 de límite elástico ($\gamma_G = 1,35$, $\gamma_Q = 1,5$, $\gamma_s = 1$). Como la carga permanente es igual a la sobrecarga, tomamos $\gamma = \frac{1,35 + 1,5}{2} = 1,43$.

$$E_s = 200.000\ N/mm^2$$

$$T_d = 1,43 \cdot 4040 = 5777,2\ kN$$

$$A_s = \frac{5777{,}2 \cdot 10^3}{260} = 22220\ mm^2$$

El alargamiento en servicio Δ de la semiluz de tirante correspondiente a una zapata resulta

$$\Delta = \frac{4040000\ (50000 - 3000)}{22.220 \cdot 200.000} = 42{,}7\ mm$$

Solución B. Tirante de hormigón armado con acero B 400 S. $\gamma_G = 1{,}35$ $\gamma_Q = 1{,}5$, $\gamma_s = 1{,}15$. Tal como se expone en el Capítulo 34

$$T_d = 1{,}43 \cdot 4040 = 5777{,}2\ kN$$

$$f_{yd} = \frac{400}{1{,}15} = 347{,}8\ N/mm^2$$

$$A_s = \frac{5777{,}2 \cdot 10^3}{347{,}8} = 16611 mm^2$$

El alargamiento en servicio Δ, en teoría, valdría en esta solución

$$\Delta = \frac{4040000\ (50000 - 3000)}{16611 \cdot 200.000} = 57{,}15\ mm$$

Sin embargo, al estar embebida la armadura de barras de acero B 400 S en un tirante de hormigón, el fenómeno de "tension-stiffening", que analizaremos en detalle en el Capítulo 34, reduce la tensión media de la armadura a lo largo de su longitud y, por lo tanto, reduce su alargamiento. Estimamos el alargamiento real como 0,6 del teórico.

$$\Delta = 0{,}6 \cdot 57{,}15 = 34{,}3\ mm$$

Solución C. Tirante de hormigón pretensado con armadura postesa. Acero de 1600 N/mm^2 de carga de rotura. $\gamma_G = 1{,}35$ $\gamma_Q = 1{,}50$, $\gamma_s = 1{,}15$.

Como en la solución B, $T_d = 5777{,}2\ kN$.

Por consideraciones de estado límite último,

$$A_{sp} = \frac{5777200}{1600/1{,}15} = 4153\ mm^2$$

Supongamos que empleamos hormigón H-50, con un módulo de deformación para cargas de larga duración que estimamos en $E_c = 20.000$ N/mm^2.

La fuerza de pretensado permanente tiene que ser tal que introduzca en el tirante una compresión igual a la tracción en servicio, 4040 kN. Aceptando que el acero lo

tesamos al 72% de su tensión de rotura y que las pérdidas de tensión sean del 17%[1], la tensión de pretensado permanente del tendón será

$$\sigma_{sp} = 0{,}72\ (1 - 0{,}17) \cdot 1600 = 960\ N/mm^2$$

Llamando A'_{sp} al área de acero del tendón en mm^2 necesaria para introducir la compresión de 4040 kN, se tiene

$$A'_{sp} \cdot 960 = 4040000$$

$$A'_{sp} = 4208\ mm^2$$

Por lo tanto, la consideración de crear las compresiones en servicio exige una armadura ligeramente superior a la del estado límite último.

Sea A_c el área de hormigón del tirante en mm^2. (Se desprecia la importancia del área ocupada por la armadura).

Supongamos que queremos reducir el alargamiento Δ a 1,7 mm, es decir a unas veinte veces menos del obtenido con tirantes de estructura metálica o de hormigón armado.

El área homogeneizada de hormigón será

$$A_{ch} = A_c + m \cdot A_{sp}$$

Con $E_c = 20.000\ N/mm^2$ y $E_s = 200.000\ N/mm^2$ $\qquad m = \frac{200.000}{20.000} = 10$

$$A_{ch} = A_c + 10 \cdot 4208 = A_c + 42080\ mm^2$$

y con ello

$$\Delta = \frac{4040000\ (50.000 - 3000)}{(A_c + 42080)\ 20.000} = \frac{9494000}{A_c + 42080}$$

y para $\Delta = 1{,}7$ mm, resulta

$$A_c = 5{,}5\ m^2$$

La sección de 5,5 m^2 la puede proporcionar, sin coste extra de hormigón, el propio pavimento de hormigón de la nave, alojando en él los tendones del tirante.

Si suponemos un suelo con módulo de balasto 0,08 N/mm^3, el giro de la zapata, en función del corrimiento Δ, vale[2]

1 Estos temas se exponen en detalle en el Capítulo 29.

2 Véase J. CALAVERA. "Cálculo de Estructuras de Cimentación, 3ª Edición. INTEMAC, Madrid 1991. Capítulo 4.

$$\alpha = \frac{\Delta}{3.850} = \frac{\sigma'_{t1} - \sigma'_{t2}}{k \cdot 6000}$$

donde σ'_{t1} y σ'_{t2} son las tensiones sobre el terreno.

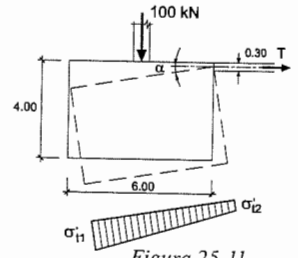


Figura 25-11

De acuerdo con la figura 25-11 y con la expresión de α

$$\sigma'_{t1} - \sigma'_{t2} = \frac{0{,}08 \cdot 6000}{3850} \Delta = 0{,}125\ \Delta\ N/mm^2$$

Pero como, según vimos al dimensionar, el cimiento

$$\frac{\sigma'_{t1} + \sigma'_{t2}}{2} = \sigma'_{t\ media} = 0{,}15\ N/mm^2$$

operando

$$\sigma'_{t1} = \frac{0{,}125\ \Delta + 0{,}300}{2}\ N/mm^2$$

$$\sigma'_{t2} = \frac{-0{,}125\ \Delta + 0{,}300}{2}\ N/mm^2$$

Para la solución A

(Tirante metálico)

$\Delta = 42{,}7\ mm$

$\sigma'_{t1} = 2{,}82\ N/mm^2$

$\sigma'_{t2} = -\ 2{,}52\ N/mm^2$

Solución no válida. Los valores de σ'_{t1} y σ'_{t2} no son reales pero indican que la resultante está muy lejos del tercio central de la zapata. (Realmente la resultante se sitúa fuera de la zapata).

Para la solución B

(Tirante de hormigón armado)

Como $\Delta = 34{,}3$, los resultados son:

$\sigma'_{t1} = 2{,}29\ N/mm^2$

$\sigma'_{t2} = -\ 2{,}00\ N/mm^2$

Solución no válida e indicadora de que la resultante cae fuera de la zapata.

Para la solución C

(Tirante de hormigón prentensado)

$\Delta = 1{,}7\ mm$

$\sigma'_{t1} = 0{,}26\ N/mm^2$

$\sigma'_{t2} = 0{,}04\ N/mm^2$

Como la presión admisible era de 0,2 N/mm² puede adoptarse 0,26 en borde sin problemas.

Obsérvese que es la posibilidad de **reducir las deformaciones**, que la solución de tirante pretensado aporta, la que permite resolver el problema[1].

25.4. TIPOS DE PRETENSADO

La técnica del hormigón pretensado ha evolucionado mucho y se ha diversificado desde su nacimiento.

Actualmente se utilizan básicamente dos técnicas generales, la segunda de las cuales presenta tres variantes[2].

25.4.1. HORMIGÓN PRETENSADO CON ARMADURAS PRETESAS.

En esencia, consiste en la aplicación del proceso indicado esquemáticamente en la figura 25-12.

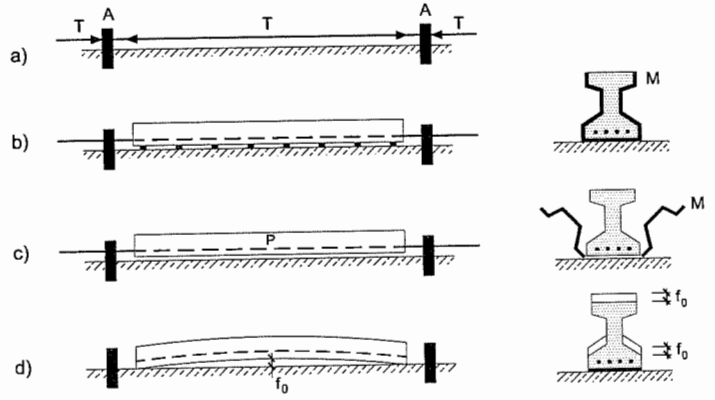


Figura 25-12

1 La ventaja de la menor deformabilidad de los tirantes pretensados fue ya conocida y utilizada desde el principio del pretensado. El ejemplo desarrollado no es más que una versión simplificada de la adoptada por el Prof. MAGNEL en 1946 en el proyecto de hangares en Bélgica.

2 Se excluye de lo que sigue la técnica del pretensado con armaduras fuera del canto de la pieza, como es el caso de los puentes atirantados.

En la etapa a), la armadura se tesa y se ancla en dos anclajes fijos a la "mesa de pretensado".

En la etapa b), o más frecuentemente ya en la a), se coloca el molde M. A continuación se vierte, compacta y cura el hormigón.

En la etapa c), una vez endurecido el hormigón y alcanzada una resistencia que garantice la posibilidad de anclaje de las armaduras pretesas por adherencia al hormigón, se transfiere la fuerza de la armadura de los anclajes A a la pieza P. Usualmente se emplea algún curado de tipo térmico o bien hormigones de muy alta resistencia, para reducir este plazo que, en la práctica, oscila de 14 horas como mínimo hasta 3 días como máximo.

Obsérvese que, para que se pueda transferir la fuerza de pretensado a la pieza, ésta debe poder acortarse y en el caso habitual de que la fuerza de pretensado no actúe en el c.d.g. de la sección, debe poder tomar la contraflecha instantánea de pretensado. Es por lo tanto necesario "abrir" los laterales del molde M antes de realizar la transferencia.

En la etapa d) se cortan los alambres o cordones y la pieza toma su contraflecha. A continuación se traslada y almacena en parque hasta el momento de su transporte a obra y montaje.

Esta técnica es normalmente empleada en prefabricación y, sucintamente expuestos, tiene las ventajas e inconvenientes siguientes.

Ventajas

1. Producción rapidísima y en serie. Todo el proceso de ejecución de la pieza dura entre 14 horas y 3 días. Usualmente se almacenan las piezas en parque, pero no son raros los casos en que se envían directamente a obra.
2. Producción industrializada, con posibilidad de alcanzar una alta calidad en los materiales y en la ejecución, fruto de la especialización del personal.
3. Si el curado térmico se realiza en ambiente húmedo, se consigue una importante reducción de las pérdidas de tensión debidas al acortamiento por fluencia del hormigón.

Inconvenientes

1. Se comprimen hormigones muy jóvenes, por lo que las pérdidas de tensión de las armaduras por acortamiento elástico instantáneo y por deformaciones diferidas del hormigón son elevadas.
2. Si se aplica curado térmico, se produce una pérdida adicional de tensión en las armaduras, de importancia apreciable, debida a la dilatación de la armadura antes de su adherencia al hormigón.
3. El inconveniente importante de la técnica de armaduras pretesas es que, en la práctica, es casi sinónimo de armadura constante en sección de extremo a extremo de la pieza y constante en cuanto a su posición en la sección de la pieza.

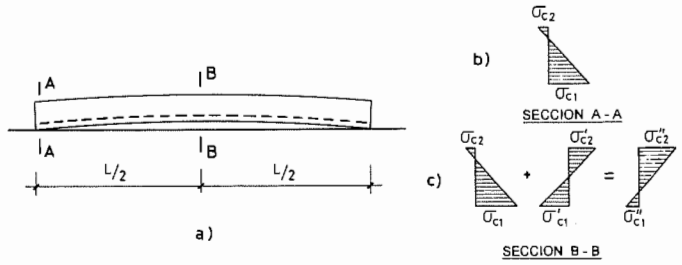


Figura 25-13

En la figura 25-13 se indica esquemáticamente este inconveniente. En el momento de la transferencia (Fig. 25-13.a)) la pieza toma contraflecha e inmediatamente por tanto, además del pretensado, actúa sobre ella su peso propio. Ello conduce a que en las secciones inmediatas a los extremos, como la A-A, sólo existan las tensiones debidas al pretensado, con valor σ_{c1} en fibra inferior y σ_{c2} en fibra superior. Estas tensiones son las que controlan el máximo pretensado que puede aplicarse a la pieza. Sin embargo en la sección central B-B, las tensiones extremas son $\sigma''_{c1} = \sigma_{c1} - \sigma'_{c1}$ y $\sigma''_{c2} = -\sigma_{c2} + \sigma'_{c2}$ que son claramente inferiores a las de la sección A-A y por tanto inferiores a las máximas admisibles. Lo ideal sería levantar la armadura, o reducir su sección, al alejarse del punto medio de la luz, con lo cual podrían aumentarse las tensiones de pretensado hasta alcanzar en el punto medio de la luz las máximas admisibles, sin riesgo de rebasarlas al acercarse a los extremos.

Esto realmente puede conseguirse y de hecho se realiza en la práctica, pero con problemas que complican y encarecen la producción industrial en serie. Existen para ello dos soluciones:

a) Una solución, que será expuesta con más detalle en el Capítulo 26, es la indicada en la figura 25-14 en la que los tendones se desvían, generalmente en dos puntos, tales como M y N, mediante anclajes al molde o a la solera de la mesa de prefabricación, capaces de resistir las fuerzas ascendentes provocadas en ellos por los tendones.

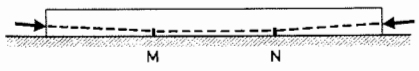


Figura 25-14

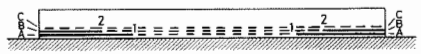


Figura 25-15

b) Otra solución es la indicada en la figura 25-15.

Los tendones se suponen esquemáticamente colocados en tres capas como un ejemplo general. La capa C se deja adherida de extremo a extremo, es decir en las condiciones ordinarias. En la capa B, desde los puntos 2 a los extremos, los tendones (alambres o cordones) se vendan o entuban en plástico de forma que

se impida su adherencia al hormigón. Análogamente se hace con los tendones de la capa A, que se entuban a partir del punto 1.

Con esta técnica, a efectos prácticos, el c.d.g. de la armadura varía a lo largo de la luz y también lo hace la fuerza de pretensado. Obsérvese que la solución no ahorra directamente armadura, puesto que la longitud total de tendones, adheridos o no, es siempre la misma.

Los dos sistemas expuestos en a) y b) son de gran interés técnico pero su empleo no es frecuente ya que los costes reales de aplicación sobrepasan generalmente las economías producidas en la sección y volumen de la pieza.

Las formas típicas de piezas pretensadas con esta técnica se indican en la figura 25-16.

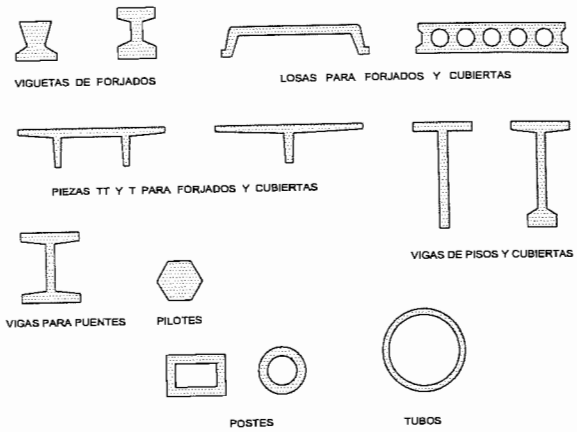
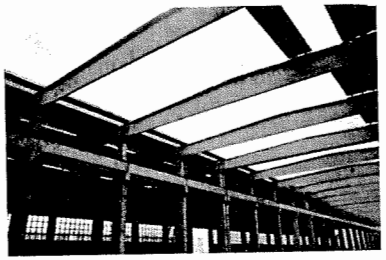


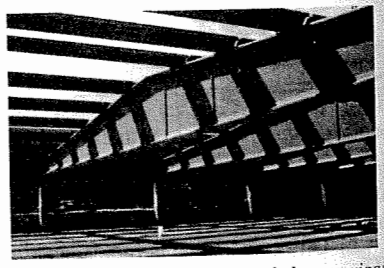
Figura 25-16

En las figuras 25-17 a 25-21 se reproducen algunas realizaciones.



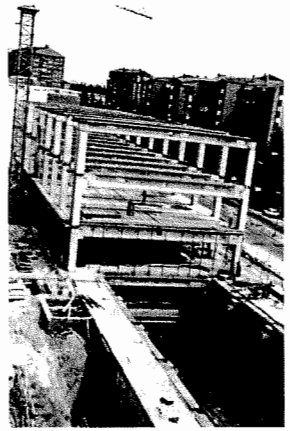
Naves prefabricadas de 20 m de luz y cuatro puentes grua para instalación de mesas universales de prefabricación (cortesía de CADE, S.A.)

Figura 25-17



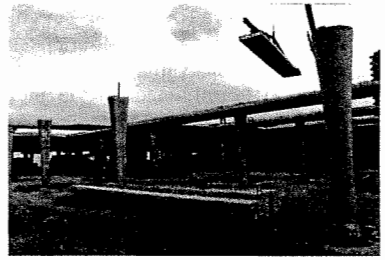
Estructura de cubierta de 30 m. de luz con vigas peraltadas para nave de Ausonia en Toledo (cortesía de PRAINSA)

Figura 25-18



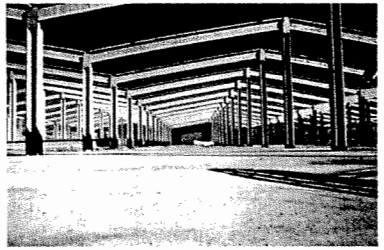
Edificio de 5 plantas en Tres Cantos. (Madrid). Luz 17,50 m. sobrecarga 2000 kg/m² prefabricación, incluso escaleras. (cortesía de ALVISA)

Figura 25-19



SISTEMA ESTRUCTURAL PARKING PREFABRICADO (cortesía del GRUPO CASTELO&PUJOL)

Figura 25-20



(cortesía de PACADAR)

Figura 25-21

25.4.2. HORMIGÓN PRETENSADO CON ARMADURAS POSTESAS.

25.4.2.1. Aspectos generales

En sus líneas esenciales la técnica utilizada se indica en la figura 25-22.

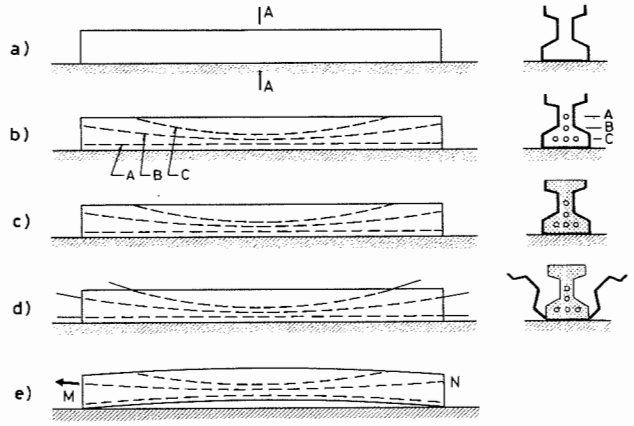


Figura 25-22

En la primera operación se coloca y arma el molde (Fig. 25-22.a)). A continuación se coloca la armadura pasiva de estribos y eventualmente longitudinal y se colocan y fijan las vainas de los tendones postesos (Fig. 25-22.b)). A continuación se procede al hormigonado de la pieza (Fig. 25-22.c)). Cuando el hormigón ha alcanzado una cierta resistencia, se envainan los tendones en sus vainas y se abre el molde (Fig. 25-22.d)). Cuando el hormigón ha alcanzado resistencia suficiente, se tesan los tendones, en general disponiendo un anclaje fijo en su extremo N y tesando contra la extremidad de la viga en el anclaje activo M. La pieza toma la contraflecha correspondiente.

El sistema tiene las ventajas e inconvenientes siguientes:

Ventajas

1. Al poder ser curvo el trazado de los tendones, éstos se levantan e incluso se cortan antes de llegar a los apoyos, adaptándose a las condiciones tensionales en todas las secciones sin los inconvenientes que vimos en las armaduras pretesas.
2. El tesado de los tendones se realiza en hormigones de mayor edad y resistencia que en el caso anterior, con la consiguiente reducción de pérdidas de tensión.
3. La inclinación de los tendones tiene un efecto reductor del esfuerzo cortante.
4. El sistema se adapta con facilidad a piezas hiperestáticas, cambios de curvatura, etc.

Inconvenientes

1. La colocación de tendones y su tesado son mucho menos industrializadas que en el caso de armaduras pretesas.
2. La ejecución está más próxima a las condiciones de una obra que a las de una instalación industrial.
3. El trazado curvo de los tendones introduce una mayor incertidumbre en la evaluación de las pérdidas de tensión.
4. Si, como veremos a continuación, se inyectan con lechada de cemento las vainas para proteger de la corrosión los tendones, el recubrimiento de éstos es de menor calidad que en el caso de tendones adheridos al hormigón de la pieza, como era el caso de armaduras pretesas.

25.4.2.2. Variantes del sistema

Básicamente se derivan de la forma de colocación de los tendones (fig. 25-23).

En la variante a), hoy por hoy la más común, la vaina se inyecta con lechada. En la variante b), que como veremos tiene un interés específico en algunas aplicaciones, la vaina no se inyecta y por lo tanto el tendón no está adherido a la pieza. La variante c) tampoco tiene adherido el tendón a la pieza, pero se consigue una buena protección contra la corrosión inyectando grasa soluble en agua en las vainas. Finalmente, la solución d) tiene las armaduras exentas, es decir situadas fuera de la pieza.

Figura 25-23

25.4.2.3. Formas típicas

Las formas típicas de piezas pretensadas con esta técnica se indican en la figura 25-24 y son de una extraordinaria variedad. En las fotografías se recogen algunas realizaciones notables.

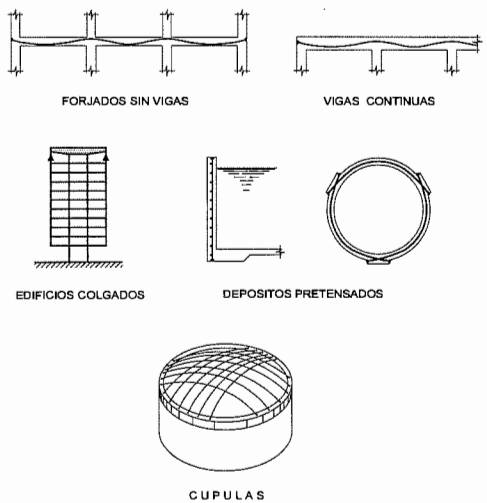
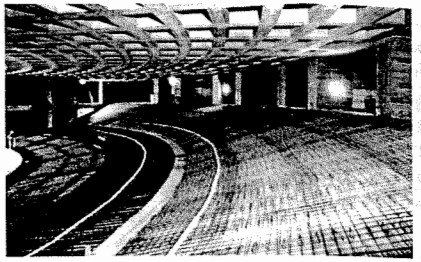


Figura 25-24

Las fotografías de las figuras 25-25 a 25-32 reproducen algunas realizaciones.

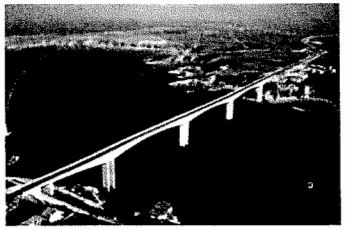
Torre de comunicaciones de la CNR (Toronto)

Figura 25-25



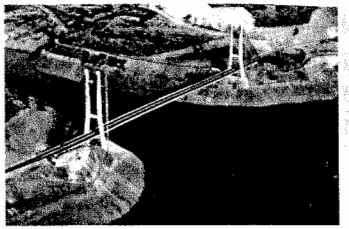
Losa de cubierta del auditorio del Centro Cultural de la Villa de Madrid. (La losa aligerada postesada, tiene planta de sector circular de 90°, con radio exterior de 36,20 m. 1,50 m. de canto. Arquitecto: Manuel Herrero Palacios. Ingeniero consultor: José E. Bofil. Ingeniero Jefe de Obra: Jesús Luzuriaga. Empresa constructora: Construcciones y Contratas, S.A.

Figura 25-26



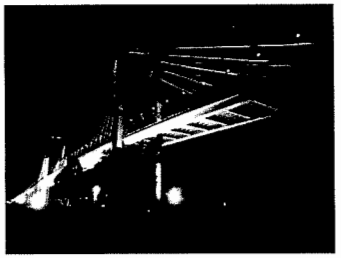
Puente de los Santos de Ribadeo, (Lugo)

Figura 25-27



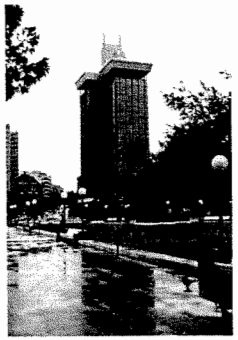
Puente de Barrios de Luna. 440 m. de luz.

Figura 25-28



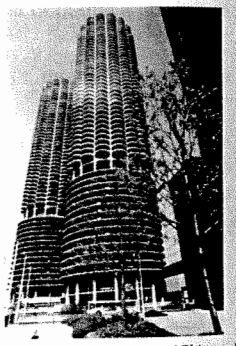
Puente del Centenario, (Sevilla)

Figura 25-29



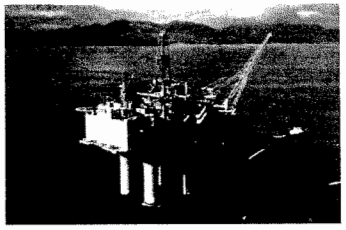
Torres de Jerez, (Madrid)

Figura 25-30



Edificio de Marina City, (Chicago)

Figura 25-31



Plataforma petrolífera

Figura 25-32

25.5. COMBINACIÓN DE DIFERENTES TIPOS DE PRETENSADO

Un ejemplo que muestra las grandes posibilidades que encierra la combinación de técnicas y tipos diferentes de pretensado es el que se indica en la figura 25-33.

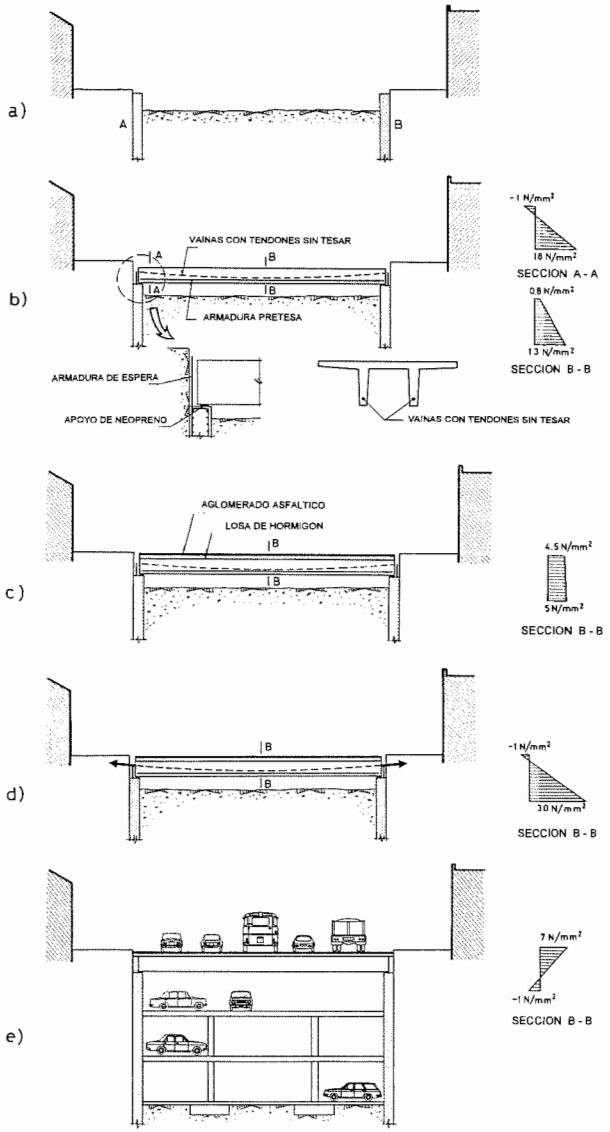


Figura 25-33

Se trata de realizar un aparcamiento subterráneo en una calle, reduciendo al mínimo posible la perturbación del tráfico por la ejecución de las obras.

Se emplea una solución de piezas prefabricadas TT, con armaduras pretesas y con otras postesas. Los tendones a postesar se introducen en sus vainas durante la prefabricación de las piezas, pero no se tesan hasta una posterior etapa en obra.

Etapa a). Se realizan dos muros pantalla y se excava la calle hasta una cota ligeramente inferior a la del nivel inferior de las piezas.

Etapa b). Se colocan las piezas descabezando un poco los muros pantalla. Las piezas han sido prefabricadas con hormigón H-50. Se supone que a las 14 horas, con curado al vapor, se obtienen ya 30 N/mm^2 de resistencia, con lo que el máximo pretensado vendrá limitado por la compresión en la fibra inferior a $f_{ck,t} = 0{,}6 \cdot 30 = 18$ N/mm^2 (Sección A-A). Naturalmente, la sección central (sección B-B) queda holgada debido a la acción en ella del peso propio.

Etapa c). Se vierte la losa armada de hormigón de 15 cm sobre las piezas prefabricadas y la capa de aglomerado sobre ella. Estas cargas producen tracciones en la fibra inferior de la sección compuesta y compresiones en la superior, con lo que las tensiones en la sección B-B cambian a 5 y 4,5 N/mm^2.

Etapa d). Dado el tiempo transcurrido, el hormigón ya ha alcanzado su resistencia nominal de 50 MPa y por lo tanto ahora admitirá en fibra inferior de la pieza una compresión de $0{,}6 \cdot 50 = 30$ N/mm^2. Las conseguimos tesando ahora los tendones que vienen alojados en sus vainas. A continuación se hormigona el enlace de la losa de hormigón con la cabeza del muro pantalla.

Etapa e). Es la de uso normal del tablero bajo carga de tráfico. Las plantas del aparcamiento se han resuelto por métodos usuales.

Obsérvese que el empleo de armaduras pretesas y postesas ha permitido compensar con el pretensado la carga de losa de hormigón y de aglomerado, incrementando además el pretensado para resistir las acciones de tráfico, que actúan, lo mismo que la carga de aglomerado, sobre la sección compuesta de piezas prefabricadas y losa de hormigón "in situ".

25.6. FÓRMULAS BÁSICAS DE UNA SECCIÓN PRETENSADA

Con independencia del tipo de pretensado empleado y sin entrar ahora en detalles que se expondrán en el Capítulo 30, veamos el estado tensional de una sección pretensada.

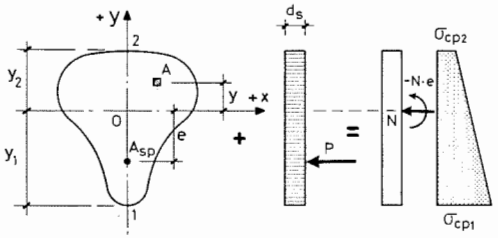


Figura 25-34

Sea la sección indicada en la figura 25-34 y sea 0 su c.d.g. al que asociamos los ejes indicados en la figura. Sea A_{sp} el c.d.g. de los tendones pretensados y P la componente horizontal de la fuerza de pretensado. Designaremos con signo positivo las compresiones y consideraremos la excentricidad e de la fuerza como positiva en el sentido de los ejes[1].

El estado de tensiones en la sección se rige por la fórmula de Navier, considerando la sección sometida a un esfuerzo de compresión P y a un momento flector $M = P \cdot e$. Para un elemento diferencial A, la tensión será

$$\sigma_{cp} = \frac{P}{A_c} + \frac{P \cdot e \cdot y}{I_c} \qquad [25.1]$$

donde

A_c Área de la sección

I_c Momento de inercia de la sección respecto al eje x-x [2].

En la práctica suelen interesar sólo las tensiones en las fibras extremas inferior 1 y superior 2, respectivamente, y aplicando [25.1]

$$\sigma_{cp1} = \frac{P}{A_c} + \frac{P \cdot e \cdot y_1}{I_c} \qquad [25.2]$$

$$\sigma_{cp2} = \frac{P}{A_c} + \frac{P \cdot e \cdot y_2}{I_c} \qquad [25.3]$$

Frecuentemente es útil presentar estas fórmulas de otra manera

$$\sigma_{cp1} = \frac{P}{A_c} + \frac{P\,e}{W_1} \qquad [25.4]$$

$$\sigma_{cp2} = \frac{P}{A_c} + \frac{P\,e}{W_2} \qquad [25.5]$$

y también teniendo en cuenta que $I_c = A_c \cdot r^2$, donde r es el radio de giro de la sección,

$$\sigma_{cp1} = \frac{P}{A_c}\left(1 + \frac{e y_1}{r^2}\right) \qquad [25.6]$$

1 En general en todo el libro se consideran positivas las comprensiones. La única excepción se hace para cuestiones relacionadas con las tensiones principales en esfuerzo cortante (Capítulo 39) y se avisará explícitamente.

2 No entramos ahora en más refinamientos. Luego analizaremos los distintos valores de A_c y de P a lo largo de la vida útil de la pieza..

$$\sigma_{cp2} = \frac{P}{A_c}\left(1 + \frac{ey_2}{r^2}\right) \qquad [25.7]$$

25.7. FORMAS DE CONSIDERACIÓN DEL PRETENSADO

Existen diferentes formas de considerar el pretensado, cada una de ellas útil en un cierto campo de aplicación.

a) **Consideración de la pieza pretensada como constituida por un material homogéneo**. Consideremos, por ejemplo, la pieza indicada en la figura 25-35, sometida a un pretensado centrado. La pieza se fisurará cuando, bien, bajo un

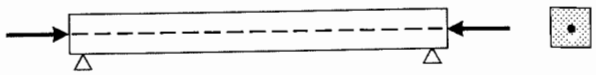


Figura 25-35

esfuerzo de tracción axil, un momento flector o cualquier combinación de ambos, se alcance en una fibra la resistencia a flexotracción del hormigón.

b) **Consideración de la pieza como un conjunto del hormigón y del tendón, separadamente considerados**. En la figura 25-36 representamos dos vigas idénticas y sometidas a idénticas cargas.

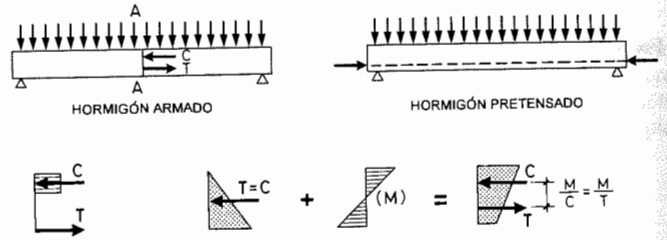


Figura 25-36

En el caso de la solución de hormigón armado, el momento aplicado en la sección A-A se compensa con un par C,T, donde C es la resultante de compresiones en el hormigón y T la de las tracciones en la armadura. En la práctica

$$C = T \approx \frac{M}{0{,}85\,d} \qquad [25.8]$$

donde z ≈ 0,85 d.

Al aumentar el momento, se incrementan C y T pero su brazo prácticamente no varía.

En la solución de hormigón pretensado, si no hay acciones exteriores, C = T y además coinciden en posición. Si las acciones exteriores producen un momento flector M_1 (Fig. 25-36), el diagrama final presenta unos valores de M y C **que no han variado** y en cambio las dos fuerzas C y T se han descentrado para crear un par que compense el momento de las acciones exteriores. El valor del brazo $z = \frac{M}{C} = \frac{M}{T}$.

Obsérvese que esta forma de consideración surge de considerar la pieza pretensada como la suma de la pieza de hormigón más el tendón, aisladamente considerados (fig. 25-37).

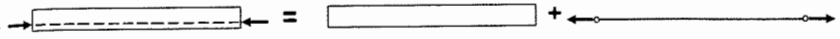


Figura 25-37

c) **Consideración del tendón como un cable antifunicular de una parte de las acciones exteriores**. La idea se esquematiza en la figura 25-38.

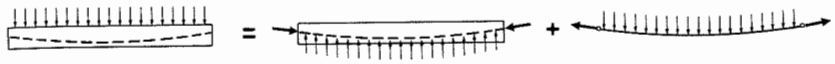


Figura 25-38

Cada una de estas formas de consideración es útil para ciertos tipos de problemas y serán utilizadas en los Capítulos siguientes.

BIBLIOGRAFÍA

(25.1) FREYSSINET, E. "A revolution in the Technique of the Utilization of Concrete". Institution of Structural Engineers. London. 1936.

CAPÍTULO 26

MATERIALES Y EQUIPOS PARA HORMIGÓN PRETENSADO CON ARMADURAS POSTESAS

26.1 GENERALIDADES

El concepto esencial del proceso se indica en la figura 26-1. Colocado el molde y la armadura pasiva, se colocan las vainas y en ellas se alojan los tendones.

Figura 26-1

A continuación se vierte, compacta y cura el hormigón. Habitualmente el hormigón se cura a temperatura ambiente, pero no es raro el empleo de curados acelerados, en particular con vapor[1]. Una vez se ha alcanzado la resistencia suficiente en el hormigón se tesan los tendones bien desde anclajes activos A, siendo pasivos los opuestos, C, bien tesando desde anclajes activos en ambos extremos. El hormigón en ese momento debe tener resistencia suficiente para los esfuerzos introducidos por el pretensado en las diferentes secciones y también para soportar las fuerzas concentradas bajo los anclajes.

1 Si se aplica vapor deben sellarse las vainas para impedir la entrada de vapor por ellas, ya que la dilatación del metal de las vainas es más rápida que la de hormigón que las rodea y puede fisurarlo. Si los tendones están ya en las vainas el vapor aceleraría además la corrosión.

En general el pretensado introducirá contraflechas en la pieza y por lo tanto antes del tesado deben retirarse las partes de los moldes que se opongan a la contraflecha.

Una vez tesados, los tendones se protegen, bien con lechadas (tendones adheridos) bien con grasas solubles o productos similares (tendones no adheridos). Existen también tendones que se suministran con protección de un tubo de material plástico, para el caso de tendones no adheridos.

26.2 MATERIALES Y EQUIPOS

La pieza indicada en la figura 26-2 contiene casi todos los elementos necesarios para un pretensado general. En el anclaje activo *A*, se dispone la boquilla de entrada

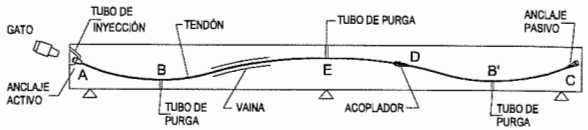


Figura 26-2

de la inyección. En los puntos bajos del trazado de las vainas se disponen tubos de purga, que se utilizan para desaguar las vainas y eventualmente para inyectar lechada desde ellos. Cuando la inyección los alcanza se obturan. En los puntos altos del trazado se disponen tubos de purga de la inyección, que sirven para eliminar aire de las burbujas de la inyección y comprobar el progreso adecuado de la misma. Una vez la inyección alcanza cada punto *E*, el tubo correspondiente se obtura para poder mantener la presión de inyección mientras la lechada avanza por la vaina. El acoplador *D* representa un hipotético empalme de tendones.

A continuación se describen los equipos y el proceso con mayor detalle.

26.2.1 VAINAS

En el caso de tendones no adheridos la solución más frecuente es el tubo de plástico. En el caso usual de tendones adheridos las vainas suelen ser de chapa galvanizada corrugada. (Fig. 26-3).

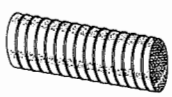


Figura 26-3

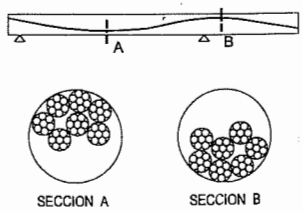


Figura 26-4

Las vainas suelen fabricarse en muchos casos en obra, pues su transporte es costoso y su manejo delicado. Los empalmes se hacen con cinta adhesiva. Debe considerarse que la estanquidad de la vaina es esencial, particularmente por impedir la entrada de lechada o mortero durante el hormigonado de la pieza, sin perder de vista que es inevitable el choque de los vibradores contra las vainas durante la compactación del hormigón. Ello requiere por tanto una rigidez adecuada, la cual también es necesaria para que la colocación de la vaina no exija excesivo número de separadores o puntos de suspensión.

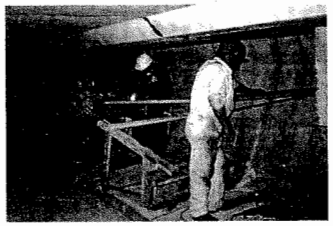
Por razones económicas se procura que la vaina sea lo más reducida posible, de acuerdo con la constitución del tendón. Sin embargo, no es aconsejable que el área de la sección transversal del tendón supere el 50% de la de la vaina, pues ello conduce a la formación de huecos en la vaina inyectada, con grave peligro para la durabilidad.

Es inevitable que, de acuerdo con la curvatura del tendón, los alambres o cordones se sitúen tal como se indica en la figura 26-4 en las secciones *A* y *B*[1].

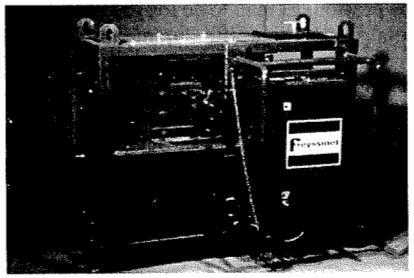
26.2.2 TENDONES

Básicamente los tendones se forman con grupos de cordones. Algunos sistemas de pretensado emplean tendones formados por alambres paralelos, como veremos más adelante. Existen también sistemas que emplean barras. Todos estos materiales son analizados en detalle en el Capítulo 32.

El enfilado de los alambres o cordones en las vainas se hace a veces por procedimientos manuales, pero generalmente las Empresas de Pretensado fabrican máquinas enfiladoras (fig. 26-5).



ENFILADORA BBR
(Cortesía de BBR, S.A.)
Figura 26-5



ENFILADORA FREYSSINET
(Cortesía de Freyssinet)
Figura 26-6

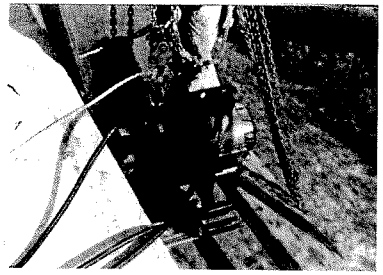
Tanto para la colocación de vainas como de tendones puede consultarse la referencia (26.1).

1 A veces se emplean "separadores" de alambres o cordones, formados por diafragmas perforados, generalmente de material plástico. Su uso es hoy reducido pues crean problemas para una correcta inyección de la vaina.

26.2.3 GATOS

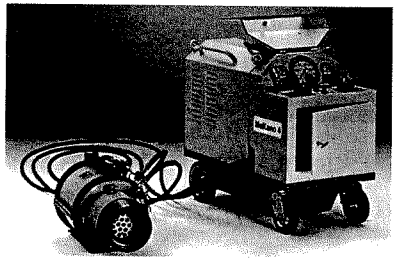
Son unos elementos esenciales de todo sistema de pretensado. Varían mucho según su potencia y hoy día muchos de ellos disponen de un mecanismo auxiliar, (con bomba de baja presión) que empuja y clava las cuñas, antes de reducir la tensión de los tendones, reduciendo así la penetración de las mismas por acoplamiento del anclaje.

GATO FREYSSINET TIPO C
(Cortesía de Freyssinet)
Figura 26-7

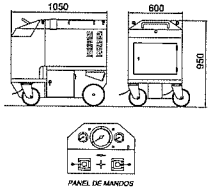


GATO STRONGHOLD G-500
(Cortesía de CTT-Stronghold, S.A.)
Figura 26-8

Las figuras 26-7, 26-8 y 26-9 muestran modelos de gatos y la 26-10 una bomba de presión. El mando de los gatos se realiza mediante bombas que suelen funcionar con alta presión de aceite durante el tesado y como hemos dicho con una presión mucho menor para clavado previo de las cuñas.



GATO y BOMBA MK4
(Cortesía de Mekano4, S.A.)
Figura 26-9



BOMBA MK4
(Cortesía de Mekano4, S.A.)
Figura 26-10

TABLA T-26.1

Caudal de aceite	7,6 l/min
Presión de trabajo máxima	710 bars
Refrigeración	Intercambiador con motor eléctrico y termostato
Válvulas	Válvula de control del pistón principal Válvula del pistón de empuje Válvula de presión máxima Válvula de descarga
Suministro eléctrico	3 fases 380 v + neutro + tierra 64 A, 50 Hz
Aceite	Aceite hidráulico ISO 46

El funcionamiento genérico de un gato se indica en la figura 26-11.

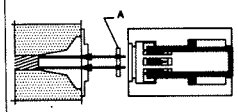
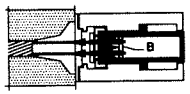
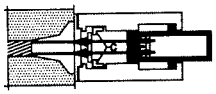
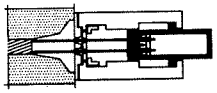
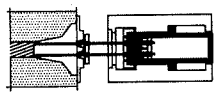
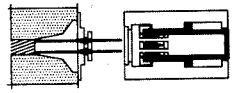
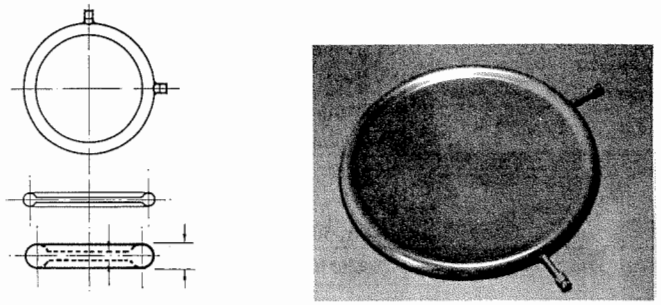
FASE	DIAGRAMA	DESCRIPCIÓN
1		Sobre la placa terminal del anclaje se coloca una pieza (A) destinada a la realización del enclavado de las cuñas, en la cual se enhebran los tendones
2		Se avanza el gato y los tendones quedan sujetos por las cuñas del gato (B)
3		Se da presión al gato y se tesan los tendones a la pieza y recorrido prefijados
4		El mecanismo de enclavado (C) avanza y empuja la pieza (A) enclavando las cuñas del anclaje
5		Eliminada la presión del gato cesa el apriete de sus cuñas
6		Se retira el gato que pasa a tesar otro anclaje

Figura 26-11

El tipo de gato descrito es básicamente el general para el pretensado con tendones, tanto adheridos como no adheridos.



a) b)

GATO PLANO FREYSSINET
(Cortesía de Freyssinet, S.A.)
Figura 26-12

Para algunas aplicaciones especiales pero de gran interés, se emplean los llamados "gatos planos" (fig. 26-12) que en definitiva son células de chapa que incrementan su espesor al inyectarse aceite a presión en su interior. Sus aplicaciones son muy variadas, tales como el pretensado contra macizos, el control de secciones de apoyo, el levantamiento de vigas para cambiar aparatos de apoyo, etc.

En todo caso, el proyectista debe tener una información suficiente de los tipos de gatos de posible empleo, pues sus características condicionan la separación y posición de los anclajes en el proyecto, para permitir la operación del gato.

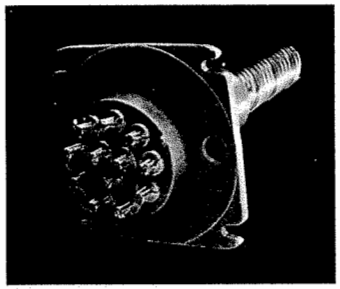
26.2.4 ANCLAJES

Es el elemento básico de todo sistema de pretensado y de acuerdo con la variedad de sistemas existe una gama muy amplia de anclajes.

26.2.4.1 Anclajes activos

Como ya se dijo son aquéllos desde los que se tesa el tendón.

La figura 26-13 muestra un anclaje monogrupo del tipo Freyssinet y la tabla adjunta contiene la información de la serie, que cubre un campo de fuerzas de pretensado desde 1.300 a 10.000 kN.



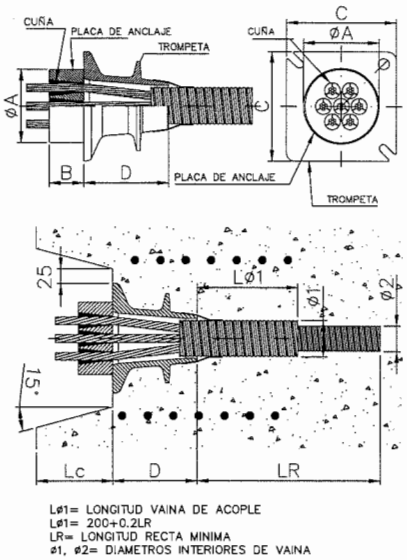
a)

TIPO DE ANCLAJE	FUERZA (kN) RG			PESO DEL CABLE	DIAMETRO INTERIOR DE LA VAINA	GATO DE PUESTA EN TENSION
	70 %	80 %	100 %	kg/m	mm	
7 K 13	899	1.027	1.284	5,60	50	K-100
7 K 15	1.274	1.456	1.820	7,91	65	K-200
12 K 13	1.540	1.761	2.201	9,60	65	K-200
12 K 15	2.183	2.495	3.119	13,56	85	K-350
19 K 13	2.440	2.788	3.485	15,20	85	K-350
19 K 15	3.457	3.951	4.939	21,47	95	K-500
27 K 13	3.467	3.962	4.953	21,60	95	K-500
37 K 15	4.750	5.430	6.787	29,60	110	K-700
27 K 15	4.913	5.615	7.019	30,51	110	K-700
37 K 15	6.733	7.695	9.619	41,81	130	K-1.000
55 K 13	7.623	8.712	10.890	44,00	130	K-1.000

b)

ANCLAJES MONOGRUPO DE FREYSSINET
(Cortesía de Freyssinet, S.A.)
Figura 26-13

La figura 26-14 contiene detalles del anclaje MS de MK4



LØ1= LONGITUD VAINA DE ACOPLE
LØ1= 200+0.2LR
LR= LONGITUD RECTA MINIMA
Ø1, Ø2= DIAMETROS INTERIORES DE VAINA

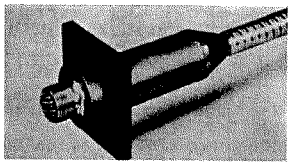
ANCLAJES MS DE MK4
(Cortesía de Mekano4, S.A.)
Figura 26-14

	Tipo tendón	Tipo trompeta	Ø A	B	C	D	Lc	LR	Ø1	Ø2	Radio mínimo de curvatura
Cable 13 mm (0,5")	3 - 0,5"	T1	71	48	108	100	120	400	41	41	3.000
	4 - 0,5"	T2	81	48	128	100	120	400	41	41	3.000
	5 - 0,5"	T3	91	48	145	105	120	600	48	45	3.000
	7 - 0,5"	T4	105	48	162	115	120	600	51	51	3.000
	9 - 0,5"	T5	125	48	194	150	120	600	62	62	3.000
	12 - 0,5"	T6	144	50	220	175	125	900	75	72	4.000
	15 - 0,5"	T7	161	55	254	200	130	900	85	85	4.000
	19 - 0,5"	T9	177	65	266	230	150	900	88	65	4.000
	24 - 0,5"	T15	196	66	300	350	150	1.200	90	90	4.500
	27 - 0,5"	T13	219	73	320	395	160	1.200	103	100	5.000
	31 - 0,5"	T17	225	80	355	415	170	1.200	103	100	5.000
Cable 15 mm (0,6")	3 - 0,6"	T2	82	50	128	100	120	400	41	41	3.000
	4 - 0,6"	T3	94	50	145	105	120	400	48	45	3.000
	5 - 0,6"	T4	106	50	162	115	120	600	51	51	3.000
	7 - 0,6"	T5	122	61	194	150	135	600	62	62	3.000
	9 - 0,6"	T6	144	60	220	175	135	900	75	72	4.000
	12 - 0,6"	T7	165	72	254	200	145	900	85	85	4.000
	15 - 0,6"	T8	186	78	282	235	155	1.200	93	90	4.500
	19 - 0,6"	T10	200	94	314	230	170	1.200	103	100	5.000
	24 - 0,6"	T14	245	95	375	340	170	1.500	110	110	5.000
	27 - 0,6"	T16	252	105	416	405	180	1.500	115	115	5.500
	31 - 0,6"	T18	260	115	416	405	195	1.500	120	120	6.000

Nota: Las dimensiones y características generales pueden ser modificadas sin previo aviso.
Datos en base a hormigón con resistencia mín. de 28 N/mm², fuerza de tesado del 85% de la carga de rotura.

ANCLAJES MS DE MK4
(Cortesía de Mekano4, S.A.)
Figura 26-14

Un sistema especial de anclaje es el indicado en la figura 26-15, del Sistema BBRV, que emplea como tendón un conjunto de alambres paralelos, que van remachados en sus puntas, recalcando sobre el anclaje. El sistema es especialmente útil cuando se desea evitar la pérdida de fuerza que suponen los sistemas de cuñas.



a)

TENDONES ESTANDAR (C. R. = 1700 N/mm²)

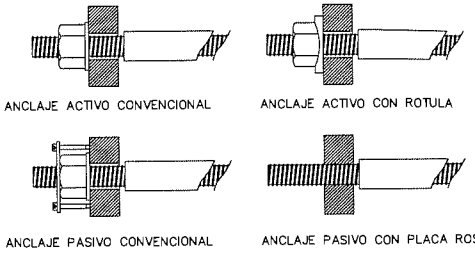
TIPO DE TENDÓN	NÚMERO DE ALAMBRES	SECCIÓN (mm^2)	PESO (kg/ml)	CARGA DE ROTURA (kN)	DIÁMETRO INTERIOR VAINA (mm) MONTADO EN FABRICA	A ENFILAR EN OBRA
35	7 ϕ 7	269	2,11	460	30	39
60	12 ϕ 7	462	3,62	780	39	46
100	19 ϕ 7	731	5,74	1.240	51	60
150	31 ϕ 7	1.193	9,36	2.030	54	63
200	42 ϕ 7	1.616	12,68	2.750	66	75
250	52 ϕ 7	2.001	15,70	3.400	75	84
300	61 ϕ 7	2.347	18,42	3.990	81	90
400	81 ϕ 7	3.117	24,46	5.300	90	102
500	102 ϕ 7	3.925	30,80	6.670	100	115
800	162 ϕ 7	6.234	48,92	10.600	126	141
1.000	204 ϕ 7	7.850	61,61	13.350	141	159
1.200	246 ϕ 7	9.466	74,29	16.100	155	173

b)

TENDONES DE ALAMBRES. SISTEMA BBRV
(Cortesía de BBR, S.A.)
Figura 26-15

Cuando el pretensado se realiza con barras (ver Capítulo 32), el anclaje se realiza mediante tuercas, roscando las puntas de las barras. Estos sistemas son especialmente indicados en tendones cortos, en los cuales los anclajes de cuñas conducirían a unas pérdidas de fuerza muy elevadas. En el caso de barras lisas, los fabricantes suelen disponer de procedimientos para que las roscas en los extremos no reduzcan la capacidad resistente de la barra. En el caso particular de las barras roscadas Dywidag, los resaltos pertenecen a un mismo filete de rosca (lo que exige una laminación muy especial) y pueden empalmarse con manguitos. (Volveremos sobre ello en el Capítulo 50).

Las figuras 26-16 y 26-17 muestran dos sistemas de anclaje para pretensado con barras.

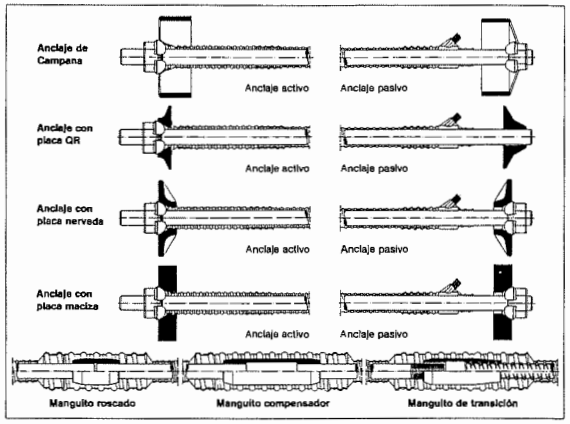


	Ø nominal	Ø real	Paso rosca	Placas A	Placas B	Placas C	Placas d	Tuercas E/C	Tuercas L	Arandelas D	Arandelas L	Rótula D	Rótula L_1	Rótula L_2	Rótula Radio
Estándar	25,0	25,6	6	100	100	40	35	47	32	50	5	70	8	33	80
	26,5	27,0	6	110	110	40	36	52	36	65	5	75	8	37	80
	32,0	32,7	6	125	125	50	41	56	40	70	5	80	8	41	96
	36,0	36,7	6	140	140	50	45	62	45	75	5	85	8	46	108
	40,0	40,9	8	150	150	60	52	65	50	80	5	90	10	51	120
	50,0	50,2	8	200	175	60	61	90	70	105	5	115	12	71	150
	75,0	73,0	6	300	250	75	82	135	100	---	---	---	---	---	---

Cotas en mm

ANCLAJES de BARRAS MACALLOY
(Cortesía de Mekano4, S.A.)
Figura 26-16

ANCLAJES Y MANGUITOS



Lista de anclajes y manguitos conectores

Tipo de armadura postesa		Barra lisa							Barras roscada						
N/mm²		835/1030			1080/1230		1420/1570		835/1030			885/1080	1080/1230		
kp/mm²		85/105			110/125		145/160		85/105			90/110	110/125		
Diámetro nominal	mm	26	32	36	26*	32	36	10,0	12,2	26,5	32,0	36,0	15,0	26,5	32,0	36,0
Codigo de la Armadura postesa		26 G	32 G	36 G	26 C	32 C	36 C	10 H	12 H	26 E	32 E	36 E	15 F	26 D	32 D	36 D
Anclajes																
Anclajes de placa nervada A, cuadrada			●	●		●	●				●	●			●	●
Anclajes de placa nervada B, cuadrada			●	●		●	●				●	●			●	●
Anclajes de placa nervada A, rectangular		●	●	●	●	●	●			●	●	●		●	●	●
Anclajes de placa nervada B, rectangular		●	●	●	●	●	●			●	●	●		●	●	●
Anclajes de placa maciza B, cuadrada			●	●		●					●	●			●	
Anclajes de placa maciza B, rectangular		●	●	●	●	●	●			●	●	●		●	●	●
Anclaje de Campana A		●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
Anclaje de Campana B		●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
Anclaje de placa QR, A, B					●	●	●							●	●	●
Manguitos																
Manguito roscado		●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
Manguito compensador		●	●	●	●	●	●			●	●	●		●	●	●
Manguito de transición		●	●	●	●	●	●			●	●	●		●	●	●

* Se suministra bajo pedido especial.

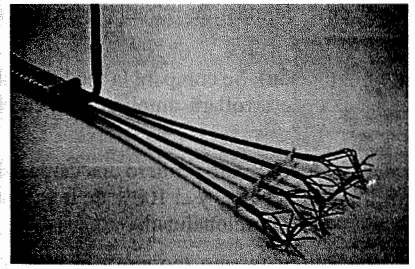
ANCLAJES DYWIDAG
(Cortesía de Dywidag-Sistem International)
Figura 26-17

Para el caso particular del pretensado de forjados sin vigas se requieren anclajes con soluciones específicas. Un ejemplo es el anclaje "TWO STRAND" para dos cordones desarrollado por VSL. (Fig. 26-18).

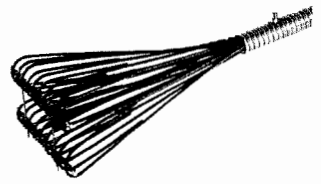
SISTEMA VSLAB+TM DE VSL
(Cortesía de "THE VSL GROUP")
Figura 26-18

26.2.4.2 Anclajes ciegos o pasivos

Tal como ya se indicó son aquéllos cuya única misión es exclusivamente la de anclaje sin que sea necesario el tesar desde ellos.



ANCLAJE PASIVO POR ADHERENCIA VSL TIPO H
(Cortesía de "THE VSL GROUP")
Figura 26-19

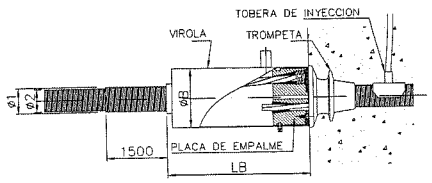


ANCLAJE PASIVO BBR
(Cortesía de BBR, S.A.)
Figura 26-20

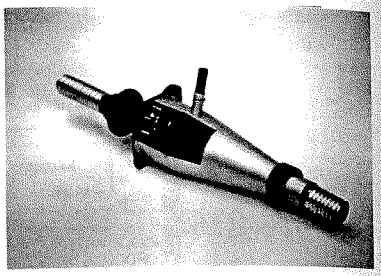
Las figuras 26-19 y 26-20 muestran dos sistemas.

26.2.5 ACOPLADORES O EMPALMES

Surgen de la necesidad de empalmar tendones, bien por excesiva longitud o más frecuentemente debido al proceso constructivo.



EMPALME MC de MK4
(Cortesía de Mekano4, S.A.)
Figura 26-21



ACOPLADOR VSL TIPO K
(Cortesía de "THE VSL GROUP")
Figura 26-22

Las figuras 26-21 y 26-22 muestran dos ejemplos.

26.3 CONTROL DE TESADO

El control de la operación del tesado se realiza simultáneamente por dos medios diferentes.

a) **Fuerza ejercida por el gato.** Todos los tipos de gatos llevan un manómetro que medirá la fuerza ejercida en una escala graduada o en un indicador digital. Es esencial disponer de un equipo de células de tarado para tarar frecuentemente los gatos.

b) **Recorrido de tesado. (Alargamiento del tendón).** Se compara la medida real en obra con el valor teórico. Este tema se desarrollará ampliamente en el apartado 29.3.2 del Capítulo 29.

La forma de realizar este control es en general aplicando primero una carga del 10% y midiendo el recorrido para el valor entre el 10% y el 100% de la fuerza aplicada. El alargamiento real se calcula por proporcionalidad.

De acuerdo con EHE, la diferencia entre el alargamiento teórico y el real no superará el 15% para cada tendón individual ni el 5% para el conjunto de tendones de la sección. El alargamiento teórico debe ser calculado de acuerdo con la sección y el módulo de deformación real del tendón. Para más detalles véase (26.2). El control del tesado debe quedar recogido en un Parte de Control de Tesado.

El tesado de una estructura debe ser objeto de un plan previo, denominado Plan de Tesado. Ello tiene interés para el cálculo correcto de las pérdidas de fuerza de pretensado como veremos en el Capítulo 29. Pero además, si el tesado no está

correctamente previsto, pueden ocurrir problemas como los indicados en la figura 26-23. Si no se tesa primero e inyectan las vainas de los tendones *A* y se espera a que gane resistencia la lechada, el tesado de los tendones *B* abollaría las vainas *A*.

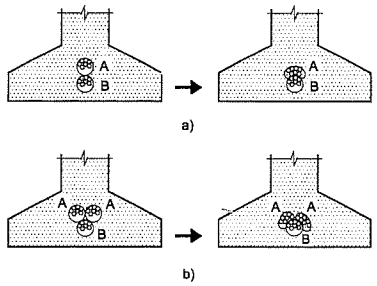


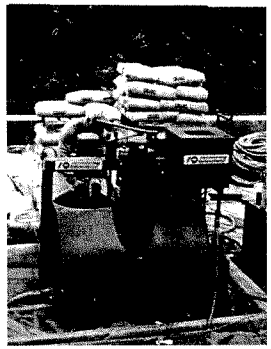
Figura 26-23

26.4 CONTROL DE LA INYECCIÓN

La calidad de la inyección es de gran importancia para la durabilidad de la pieza pretensada. Como hemos dicho, existen dos tipos generales de inyección: Uno es el de la lechada de cemento, que conduce a un tendón adherido al hormigón y otro es el de la inyección con grasas solubles o productos similares que si bien protegen a la armadura de la corrosión, no crean adherencia entre el tendón y el hormigón. El empleo de tendones no adheridos tiene campos específicos de aplicación, como veremos más adelante. En lo que sigue nos referimos a las inyecciones con lechada de cemento.

Las condiciones de la lechada se definen en EHE y en (26.3). Regularmente debe comprobarse la viscosidad con el cono de Marsch y la estabilidad (exudación y variación de volumen) mediante el método expuesto en el Anejo 6° de EHE.

La inyección de la lechada se realiza mediante una bomba de inyección. La figura 26-24



EQUIPO DE INYECCIÓN VSL
(Cortesía de "THE VSL GROUP")
Figura 26-24

muestra el equipo MX7 de STRONGHOLD, que con dos depósitos de mezcla permite un bombeo continuo. Normalmente estos equipos pueden alcanzar presiones de 12 a 15 atmósferas, aunque como veremos ésta no es la presión aconsejable usualmente. El caudal de bombeo suele oscilar según los modelos de 30 a 90 l/min.

El empleo de la lechada tiene tres ventajas principales:

- Coloca al tendón en un medio alcalino que le protege de la corrosión.
- Solidariza al tendón, a través de la adherencia tendón-lechada, lechada-vaina y vaina-hormigón, con el hormigón de la pieza, con ventajas importantes en cuanto a fisuración y tensión última de la armadura frente a otras soluciones.
- Al rellenar la vaina impide la entrada de agua en ella. Esta agua, aparte del riesgo de corrosión para el tendón, entraña en climas fríos el riesgo de que su dilatación al congelarse fisure el hormigón que rodea la vaina.

Conviene que la inyección se haga antes de dos días a partir de la fecha en que fue colocado el tendón y antes de 24 horas a partir de su tesado. Si se prevé la necesidad de plazos más prolongados, debe aplicarse al tendón alguna protección, o rellenar la vaina con grasa soluble que se lava con agua a presión antes de proceder a la inyección.

Frecuentemente se usan agentes expansivos añadidos a la lechada, con el fin de evitar la formación de coqueras o huecos, al menos de tamaño importante. Sin embargo, la expansión no debe superar el 10%, ya que podría provocar la fisuración del hormigón que rodea la vaina. Debe controlarse que el momento en que se produce la expansión asegure que se produce en la vaina y no en la mezcladora.

Todos los equipos de inyección poseen un sistema de filtrado de la lechada para asegurar la eliminación de grumos.

Probablemente la clave de la buena calidad de la inyección está en la relación *A/C* de la lechada, que no debe superar el valor 0,45. En vainas muy grandes (superiores a 125 ó 150 mm de diámetro) por razones económicas de ahorro de cemento, suele añadirse arena, es decir se inyecta mortero y no lechada.

La calidad y la facilidad de la inyección depende de que las vainas sean realmente estancas. Si hay dudas deben comprobarse con aire comprimido o agua a presión. Esto también sirve para detectar posibles obstrucciones y se debe realizar previamente al enfilado del tendón en la vaina.

En los puntos bajos del trazado del tendón deben disponerse llaves de purga para evacuar la posible agua antes de inyectar y que permiten, si es necesario, inyectar desde los puntos bajos a lo largo de la vaina.

En los puntos altos se disponen llaves de purga para evacuar el aire y controlar la progresión de la inyección, como ya dijimos .

Las boquillas de inyección se disponen en los anclajes y en el caso de tendones largos, en algunos puntos bajos, como hemos dicho, funcionando también como llaves de purga.

La inyección debe comenzarse en cada tendón, con una presión del orden de 0,3 N/mm^2. Lentamente se eleva la presión hasta un máximo de 1 N/mm^2. Esto permite una inyección sin huecos y con una velocidad de avance aceptable, del orden de

5 a 10 m/minuto. La consistencia de la inyección que rebosa por los tubos de purga situados en los puntos altos debe ser igual que la que tiene en la boquilla de inyección.

Una vez llena la vaina y cerrados todos los tubos de purga debe mantenerse la presión durante medio minuto como mínimo a un minuto como máximo, para asegurar la eliminación de huecos. Después de esto se cierra la boquilla.

En vainas superiores a 125/150 mm de diámetro, es conveniente, para compensar el asiento plástico de la lechada, proceder a una segunda inyección dos horas después de finalizada la primera.

En el caso de conductos verticales, para evitar los problemas del asiento plástico y la exudación, debe disponerse un recipiente provisional en la cabeza del

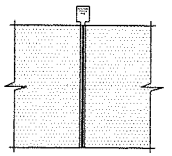


Figura 26-25

tendón en el que se concentren estos fenómenos. (Fig. 26-25).El volumen de lechada en este recipiente naturalmente se retira al finalizar la inyección.

El proceso de inyección debe quedar siempre reflejado en un Parte de Control de la Inyección.

El tiempo necesario para la inyección viene dado por la fórmula.

$$T_{iny} = \frac{A_v \cdot L_v}{1.000 Q_{iny}} \qquad [26.1]$$

donde

T_{iny} = Tiempo total de inyección del tendón, en minutos.

A_v = Área de la sección transversal de la vaina en mm^2.

L_v = Longitud de la vaina en m.

Q_{iny} = Caudal de la bomba de inyección en l/min. (Para la presión empleada).

Un método práctico de controlar la inyección de una vaina, es redactar el gráfico que relaciona las presiones de inyección con la duración de la misma.

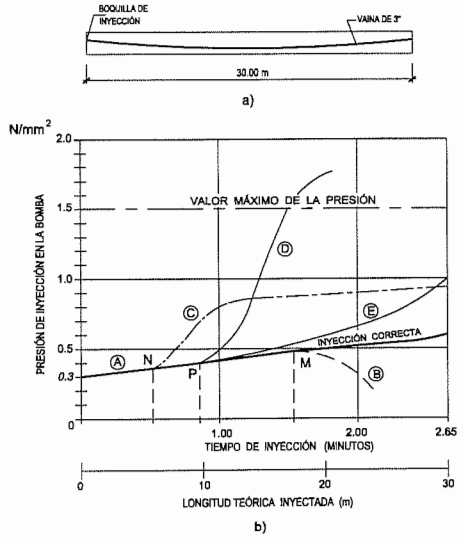


Figura 26-26

Para el ejemplo de la figura 26-26, asimilando la longitud de vaina a 30 m y con una bomba con $Q_{iny} = 50$ *l/min*, el tiempo total de inyección es, de acuerdo con [26.1]

$$T_{iny} = \frac{\frac{\pi\, 75^2}{4} \cdot 30}{1.000 \cdot 50} = 2{,}65 \text{ minutos}$$

Una inyección correcta sería la reflejada por la línea *(A)*, o una próxima a ella.

Una línea como la *(B)* indica una pérdida importante en el punto *M*.

Una línea como la *(C)* indica que la inyección ha sido correcta, pero hubo un atasco en el punto *N*.

Una línea como la *(D)* indica un atasco grave en el punto *P* y una presión necesaria para la inyección, que supera la admisible.

Finalmente, una curva como la *(E)* indica que la lechada está perdiendo fluidez, aunque la inyección es correcta.

Obsérvese que la posición de los puntos *M, N, P* sólo puede calcularse a partir del volumen inyectado, información que suministra el equipo de inyección.

Para más detalles, véase (26.3) y (26.4).

BIBLIOGRAFÍA

(26.1) H.P.5-79 "Recomendaciones para la colocación y disposición de armaduras". ATEP. Madrid, 1979.

(26.2) H.P.2-73 "Recomendaciones para la ejecución y el control del tesado de las armaduras postesas". ATEP. Madrid, 1973.

(26.3) H.P.3-73 "Recomendaciones para la ejecución y control de la inyección". ATEP. Madrid, 1973.

(26.4) GERWICK B.C. "Construction of prestressed concrete structures". Wiley-Interscience. New York, 1971.

CAPÍTULO 27

MATERIALES Y EQUIPOS PARA HORMIGÓN PRETENSADO CON ARMADURAS PRETESAS

27.1 GENERALIDADES

Las piezas pretensadas prefabricadas presentan una de las características esenciales para una prefabricación eficaz, como es la producción en serie de grandes piezas iguales. Por este motivo, desde el principio del desarrollo de la técnica del hormigón armado, se comenzó a prefabricar piezas de este tipo. La aparición de la técnica del pretensado con armaduras pretesas adherentes, en conjunción con el desarrollo de mesas largas de prefabricación, favoreció aún más la aplicación de las técnicas de prefabricación a este tipo de piezas.

Nos referimos especialmente a la prefabricación en instalaciones industriales fijas que son las que permiten una producción realmente industrializada con una calidad muy controlada y uniforme. La prefabricación a pie de obra en instalaciones provisionales, casi nunca representa un proceso industrializado y no difiere en casi ningún aspecto de la construcción "in situ". No debe olvidarse tampoco que una instalación industrial fija sólo produce piezas de garantía si simultáneamente emplea proyectos correctos, instalaciones adecuadas, y materiales y procesos eficazmente controlados, lo cual no puede alcanzarse sin personal técnico altamente especializado.

27.2 PREFABRICACIÓN GENERAL DE PIEZAS PRETENSADAS EN MESAS

En lo que sigue, describiremos el proceso usual de fabricación en mesas de piezas de hormigón pretensado.

La figura 27-1 muestra unos esquemas típicos de mesas para fabricación de piezas de hormigón pretensado en línea.

En los principios de esta técnica, como las piezas tenían cuantías bajas y dimensiones reducidas, ello conducía a que al anclar los tendones (fig. 27-1 a)) la resultante de las fuerzas de pretensado fuera de escasa importancia, y la altura del c.d.g. de los tendones tesos sobre la mesa era también reducida. Ello permitió que durante un cierto tiempo las cabezas de anclaje pudieran solucionarse con perfiles metálicos hormigonados en macizos autorresistentes.

El crecimiento de la fuerza de pretensado y de la altura de su resultante sobre la mesa fueron creciendo continuamente y la solución 27-1 a) resultaba muy costosa y técnicamente problemática.

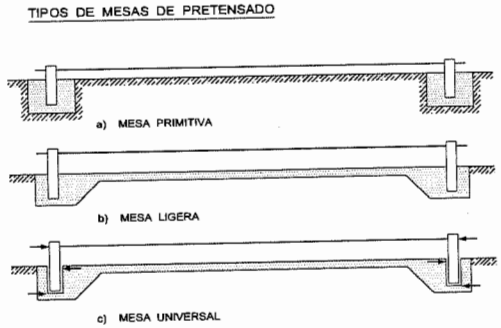


Figura 27-1

La solución fue la creación de las llamadas "mesas ligeras", que equilibraban el tiro de los tendones anclados con la transmisión por la solera de hormigón de la mesa, que unía los dos macizos extremos (fig. 27-1 b))[1].

Esta solución resolvía técnicamente el problema planteado, pero exigía dejar hormigonados a lo largo de todo el ancho de la mesa, en ambos macizos extremos, pesadas cabezas de anclaje, preparadas para la máxima densidad de tendones por metro de ancho de mesa. Esto era naturalmente muy costoso.

Una segunda evolución fue la llamada "mesa universal". Su diferencia con la versión anterior es que las cabezas metálicas de anclaje no están hormigonadas en la mesa, sino que son independientes de ella.

Se dispone el número de cabezas necesario para anclar la densidad de armaduras precisa en cada zona, en el ancho de la mesa. Las cabezas se guardan en un almacén, y se colocan en la mesa sólo las necesarias. Las cabezas se alojan en fosos transversales extremos (fig. 27-1 c)).

Una tercera evolución es la "mesa universal de longitudes múltiples", que se indica en la figura 27-2. La mesa permite colocar cabezas de anclaje, gracias no sólo a

[1] El sistema es conocido en inglés como "long line"

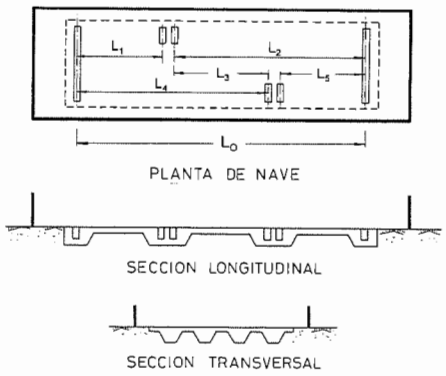


Figura 27-2

los fosos extremos de los macizos, sino a otros intermedios, de ancho parcial. En el caso de la figura 27-2 permite por tanto tesar tendones de longitudes L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 y L_0. Esto es de especial interés, ya que a veces en una mesa de este tipo, es necesario fabricar un número de piezas cuya suma de longitudes no alcanza la total de la mesa. Tesar los tendones entre cabezas alojadas en los fosos extremos, obliga como veremos a dejar tendones cortados a longitudes inferiores a L_0, que deben ser enrollados en espera de una futura utilización mediante acopladores de empalme, que más adelante describiremos.

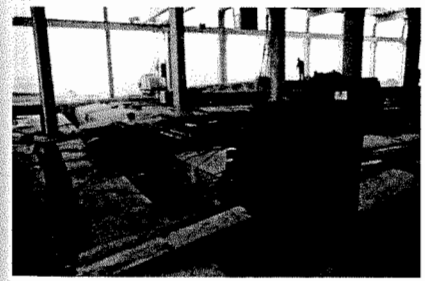


Figura 27-3

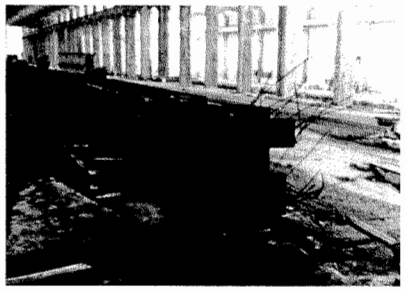


Figura 27-4

Las figuras 27-3 y 27-4 muestran una vista general y detalles de una cabeza de este tipo. Obsérvese que los tendones se anclan en anclajes terminales ("barriletes") que apoyan en una placa de acero (placa de destesado). Ésta se apoya mediante tres tornillos de punta avellanada en las propias cabezas. Aflojando los tornillos se producirá, en el momento adecuado, la transferencia de la fuerza de pretensado de las cabezas de anclaje provisional a las piezas.

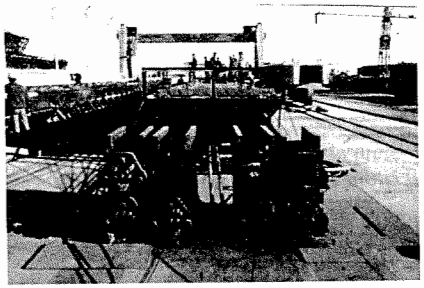


Figura 27-5

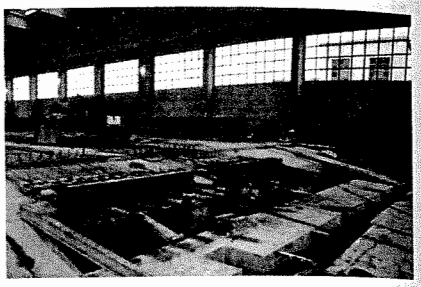


Figura 27-6

La figura 27-5 presenta una vista general de una mesa de este tipo, en este caso al aire libre. Como puede verse se están fabricando piezas en π y se emplean para anclar los tendones cuatro cabezas con seis placas de destesado.

Las mesas de este tipo son muy versátiles y permiten la fabricación de piezas de características muy diversas. En ellas pueden instalarse equipos específicos como el indicado en la figura 27-6, destinado a la fabricación de viguetas. El anclaje de los tendones en las placas de destesado (fig. 27-4) se hace mediante anclajes metálicos (fig. 27-7) parecidos a los que se usan para armaduras postesas, pero que en este caso llevan

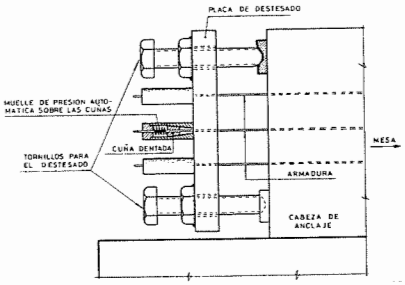


Figura 27-7

Figura 27-8

además un muelle que, tan pronto como el gato reduzca fuerza sobre el tendón, enclavan las cuñas, reduciendo la penetración.

Antes hemos hablado de que la mesa universal de longitudes múltiples reduce la necesidad de tesar tendones con la longitud de mesa completa para fabricar piezas que no ocupen la longitud entera. Ello reduce también, si bien no elimina, la necesidad de utilizar trozos de tendón, ya cortados, es decir no procedentes de rollos. Para poderlos usar en tesados largos, en particular para longitud completa de mesa, se usan los

acopladores o "barriletes" de empalme (fig. 27-8) fabricados sobre la idea de los de anclaje simple (fig. 27-7).

Los tendones, de extremo a extremo de la mesa, ocupan la posición correspondiente a su situación en la sección transversal de la pieza de hormigón. Sin embargo, tal como se indica en la figura 27-9, al llegar a las cabezas de anclaje los tendones deben converger en dirección vertical y horizontal para llegar a las placas de destesado. Ello se consigue por

Figura 27-9

las placas de desvío, *P*, una delante de cada cabeza. Los tendones atraviesan las placas por taladros de bordes avellanados y en ellos se desvían hacia la cabeza. El desvío debe ser moderado, generalmente no superior a 20°, y en todo caso produce una pérdida de tensión en el tendón.

La figura 27-10 muestra una placa de desvío. Como está sometida a esfuerzos importantes debe ser rígida y estar debidamente arriostrada.

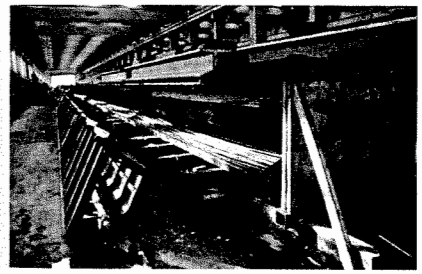


Figura 27-10

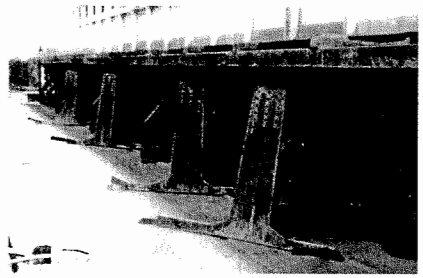


Figura 27-11

La separación de piezas se hace con placas separadoras, que llevan no sólo los taladros de los tendones empleados en un caso concreto, sino taladros en todas las posibles posiciones de tendones que se den con el perfil de pieza adoptado (fig. 27-11).

El tesado de los cordones se realiza con gatos especiales ya que con las mesas actuales, que sobrepasan ya los 300 m de longitud, el recorrido de tesado puede alcanzar los dos metros. No sirven por tanto los gatos habituales de tesado de armaduras postesas. (Fig. 27-12). De todas formas, en mesas muy largas es frecuente el tesado de los tendones por ambos extremos. Un sistema interesante es el que se indica en planta en la fig. 27-13.

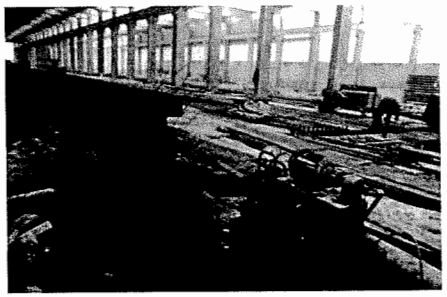


Figura 27-12

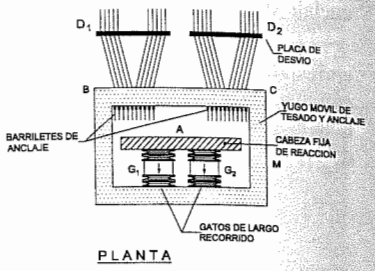


Figura 27-13

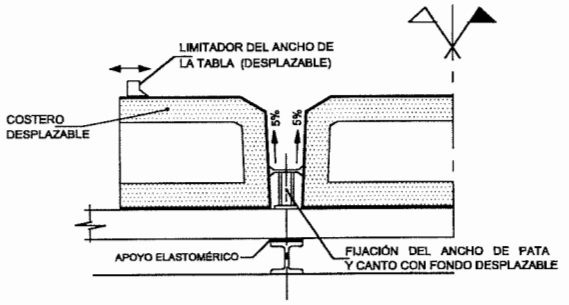


Figura 27-14

El proyecto de los moldes es un aspecto de especial interés y de gran importancia y requiere proyectistas muy especializados y con la adecuada experiencia práctica. La figura 27-14 muestra un molde extensible en cantos y anchos para piezas en π. Las pendientes transversales del nervio del 5%, son un mínimo absoluto ya que a pesar del agente desencofrante empleado, se produce una apreciable resistencia al despegue e izado de la pieza con el puente grúa.

El molde debe proyectarse siempre pensando que la pieza, al transferirse el pretensado, toma la contraflecha correspondiente. Si el molde impide esa deformación, impide también la transferencia del pretensado al hormigón. Por tanto en secciones en las que los moldes coarten la contraflecha, es necesario hacer moldes que permitan desmoldeos parciales previos a la transferencia. Las figuras 27-15 y 27-16 muestran casos reales.

Los moldes se colocan en segmentos de cierta longitud, en contacto entre extremos, materializando un molde continuo de extremo a extremo de la mesa. La división en piezas se realiza colocando placas (fig. 27-11) separadoras, por parejas, a distancias de 8 a 20 cm según el canto y tipo de pieza. Es necesario considerar que el corte de tendones se realiza normalmente con cizalla y hace falta por tanto un cierto espacio entre placas separadoras para poder introducirla.

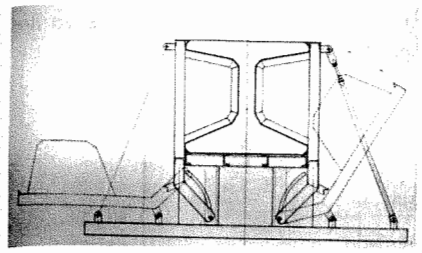


Figura 27-15

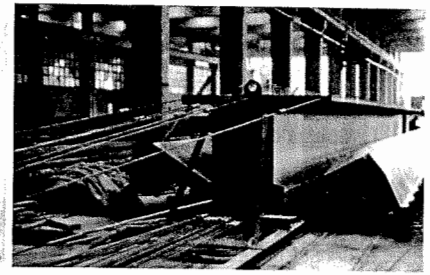


Figura 27-16

Las placas separadoras deben quedar libres entre sí, pues cualquier unión entre ellas, haría que al destesar la mesa, las zonas de tendones entre placas no se destesarán.

Los moldes se apoyan en travesaños, apoyados a su vez generalmente en placas de elastómero con el fin de que no se pierda energía de vibración a través de la solera.

Una vez cortados los tendones, la pieza está ya completamente pretensada y puede ser trasladada al parque.

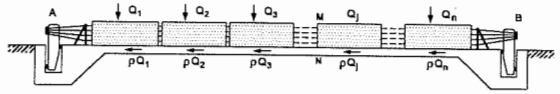


Figura 27-17

Sin embargo es necesario considerar la situación indicada en la figura 27-17: Si destesamos en el extremo *A* de la mesa, y la fuerza total de pretensado después de la transferencia es P_t, a esa fuerza se oponen las fuerzas de rozamiento entre moldes y mesa, iguales a ρQ_1, ρQ_2, ρQ_3.... siendo ρ el coeficiente de rozamiento y Q_1, Q_2, Q_3... los pesos de cada pieza con su molde. El empleo de placas de elastómeros reduce mucho el valor de ρ. En todo caso, en la pieza *i*, la fuerza de pretensado **realmente** actuante en el extremo *MN* de la pieza *J* es $P - \sum_{i=1}^{i=j-1} \rho\, Q_i$ que puede ser muy inferior a P_t. Deben cortarse tendones empezando por *A* y hacia el otro extremo, de forma que vayan desapareciendo rozamientos.

En mesas muy largas puede ser necesario destensar por ambos extremos y comenzar a cortar tendones también por ambos.

Realizada la operación de destesado y corte de alambres, la única operación que resta es el transporte de la pieza al parque. Aunque en el parque sería una medida

excelente prolongar el curado por riego durante algunos días, cuando se aplica el tratamiento por vapor es bastante corriente que no se realice ningún curado complementario y los resultados son aceptables.

Todas las operaciones descritas pueden realizarse aproximadamente en los siguientes tiempos (en la práctica, algunas operaciones se solapan):

Limpieza de mesa	0,5 h
Colocación y alineación de moldes	3,0 h
Aplicación de desencofrantes	
Colocación de armaduras	
Tesado y anclaje	
Vertido y compactación del hormigón	1,5 h
Período de espera	2,0 h
Tratamiento por vapor	6,0 h
Destesado y corte de armaduras	0,5 h
Transporte de piezas a parque	2,0 h
TOTAL	15,5 horas

Resulta posible, pues, realizar un ciclo de fabricación diario, con lo que se consigue un rendimiento muy elevado de la instalación. En algunos casos, incluso en países muy industrializados y con climas fríos, no se aplican tratamientos térmicos, empleándose cementos de muy alta resistencia y un ciclo de fabricación de dos a tres días, según la estación del año. La situación en este tema es muy dispersa de unos fabricantes a otros.

Un método que puede resultar interesante en épocas largas en zonas amplias de países cálidos es el curado mediante el calor del sol, cubriendo las piezas con plásticos transparentes. El sistema ha sido empleado con éxito en Israel (27.1).

Los métodos de tratamiento térmico pueden ser muy variados, pero describiremos solamente el de calefacción por vapor a presión atmosférica, por ser el de empleo más generalizado, ya que une las ventajas de una gran flexibilidad de aplicación con las de un curado húmedo.

En esquema, el sistema consiste en una caldera de producción de vapor y un sistema de tuberías que se disponen a lo largo de la mesa, con perforaciones para la salida de vapor situadas a distancias calculadas para obtener una distribución uniforme de temperaturas. Tanto las piezas como las tuberías se disponen bajo un túnel formado con lonas o plásticos para concentrar el vapor en contacto con las piezas a un volumen reducido y evitar costes inútiles. El tratamiento se indica en la figura 27-18 y se compone de un tiempo de espera desde la colocación del hormigón, una subida de temperatura a un ritmo de unos 20/30 °C por hora, un período a temperatura constante y un período de bajada de temperatura.

El tiempo de espera es esencial, pues una aplicación prematura del vapor puede producir reducciones grandes e irrecuperables de la resistencia del hormigón. El

mecanismo de este fenómeno ha sido estudiado por ALEXANDERSON (27.2). Téngase, además, en cuenta que, durante el tiempo de espera, la temperatura del hormigón ya sube apreciablemente, debido a las reacciones químicas del fraguado.

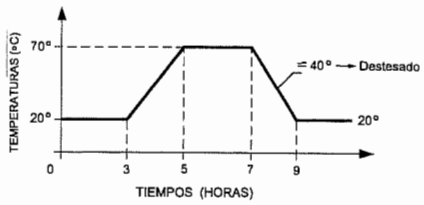


Figura 27-18

No puede establecerse un tipo general y único de ciclo de tratamiento por vapor, pues está fuertemente condicionado por la longitud de la mesa, la disposición de moldes y, sobre todo, por el tipo de cemento. Un cambio de tipo de cemento obliga a reestudiar el ciclo. En general, el curado al vapor permite alcanzar, en pocas horas, la resistencia que con un curado normal se alcanza en una semana. Puede producir una reducción muy ligera de las resistencias a largo plazo. Véase (27.3) y (27.4).

Normalmente, durante la bajada de temperatura del hormigón y antes de que la misma se iguale de nuevo con la del ambiente, se procede a la transferencia, es decir, al paso de la fuerza de pretensado de las armaduras ancladas en la cabeza de la mesa, al hormigón, mediante el anclaje por adherencia. La operación se realiza mediante el destesado, actuando sobre los tornillos de las placas de destesado o sobre los gatos de cabeza de mesa, según el tipo de instalación. Es esencial que la operación se realice lentamente para evitar cualquier efecto dinámico en la operación de anclaje, que, como veremos, aumentaría de forma importante la longitud de transmisión, reduciendo la eficacia del pretensado[1]. (Véase el Capítulo 32).

De todas formas, debe siempre enjuiciarse con cuidado cualquier proceso de transferencia teóricamente "instantánea". Si los tendones son cordones de siete alambres y se cortan con sierra, el corte paulatino de los alambres incrementa fuertemente la tensión de los restantes, que experimentan alargamientos absolutos apreciables, que al referirse a longitudes vistas de tendón de 8 a 20 cm suponen grandes alargamientos unitarios, con lo que la transferencia no debe considerarse realmente instantánea.

La razón de realizar esta operación durante la bajada de temperatura y no al final de ese período reside en el interés de introducir compresiones en el hormigón antes de su enfriamiento completo para evitar la tendencia que de otra forma tendrían las piezas a fisurarse por tracción. (Véase el Capítulo 29).

2 Antes de realizar la transferencia, debe verificarse, mediante la rotura de probetas curadas en el mismo ambiene que las piezas, que se ha alcanzado la resistencia necesaria en el hormigón.

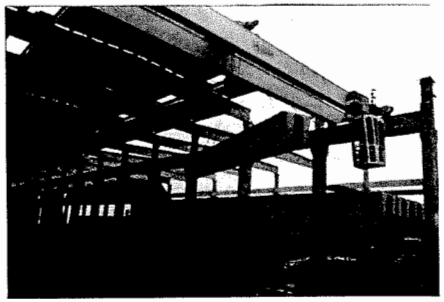


Figura 27-19

La figura 27-19 indica la carga en camión en la nave, para un transporte directo a obra, lo cual no es lo normal pero se realiza a veces. Usualmente la pieza se almacena en parque y el manejo se realiza con puentes grúa, pórticos o plumas según los casos (figs. 27-20 y 27-21).

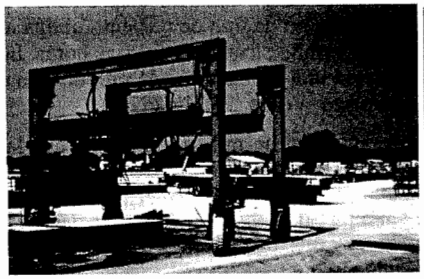


Figura 27-20

Figura 27-21

El proceso descrito es el más general que cabe. En muchos casos, especialmente en los casos de fabricantes de una sola línea de productos, el proceso particular se simplifica mucho. Las figuras 27-22 y 27-23 indican vistas de una mesa de fabricación exclusiva de losas.

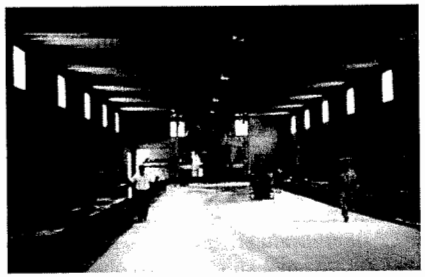


Figura 27-22

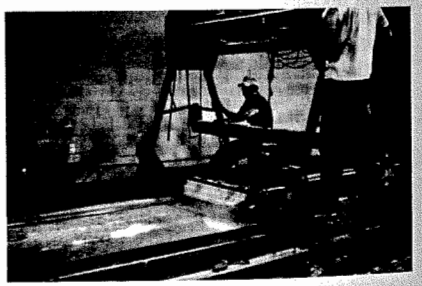


Figura 27-23

Una exposición general del sistema puede seguirse en (27.5).

27.3 EMPLEO DE MÁQUINAS DE ENCOFRADO DESLIZANTE

Estas máquinas, conocidas habitualmente como "ponedoras", permiten fabricar sin moldes fijos.

En el caso particular de las piezas pretensadas, la máquina, que lleva incorporada una tolva de alimentación (fig. 27-24), recorre la mesa desde una cabeza a la otra. Los alambres son mantenidos en posición por una guía situada en la parte frontal de la máquina.

Los perfiles de posible producción se indican de manera orientativa en la figura 27.25.

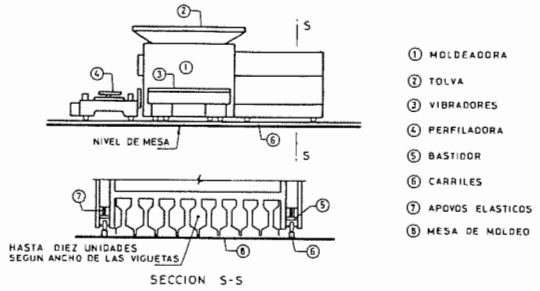


Figura 27-24

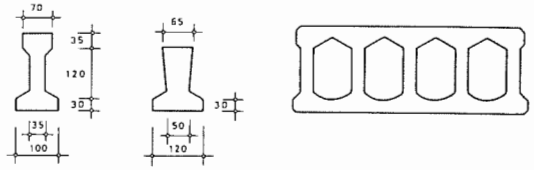


Figura 27-25

La calidad es satisfactoria, ya que no sólo la superficie superior, sino también las laterales, quedan rugosas, permitiendo una excelente adherencia al hormigón "in situ", mejor que si esas superficies hubieran sido moldeadas. El proceso fabrica una pieza continua de uno a otro extremo de la mesa, ya que no hay separadores. Una vez realizada la transferencia, se procede al corte de las piezas (hormigón y armaduras) mediante una sierra de disco de diamante, viajera a lo largo de la mesa.

Obsérvese que este procedimiento no produce, de manera apreciable, anclaje por impacto, ya que no hay físicamente ningún tramo de alambre desnudo entre una pieza y la contigua.

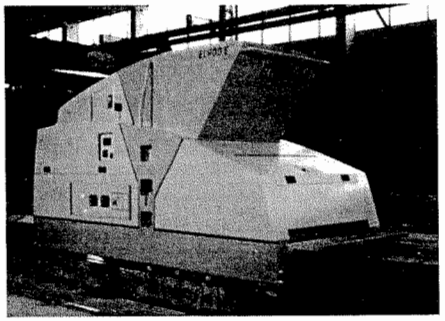
El sistema es igualmente aplicable a piezas de hormigón armado fabricadas en línea. La velocidad de avance de las máquinas oscila de 1 a 1,5 m/minuto, según las marcas y tipos de perfil y según la plasticidad del hormigón que se emplee.

El ciclo de producción, excepto en lo alterado por la ausencia de moldes, es el mismo indicado en 27.2.

27.4 PIEZAS FABRICADAS POR EXTRUSIÓN

El procedimiento de extrusión se realiza actualmente con maquinaria muy especializada. Esencialmente consiste en compactar un hormigón de muy baja relación agua/cemento y de reducido descenso de cono, mediante husillos sin fin que comprimen y hacen avanzar el hormigón en los moldes.

La figura 27-26 representa una máquina de este tipo. El producto más habitual obtenido por extrusión es la losa alveolar (Hollow-Core). En la figura 27-27 se representan perfiles de posible fabricación con la máquina ELEMATIC EL 900 E.



Máquina para producir piezas por extrusión. Modelo ELEMATIC EXTRUDER EL 900 E de PCE Engineering (Cortesía de PCE Engineering)
Figura 27-26

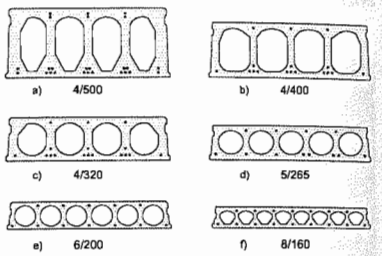


Figura 27-27

BIBLIOGRAFÍA

(27.1) JAEGERMAN, C.H.; PUNDAK, B.; RAVINA. "Métodos de curado acelerado para elementos de hormigón prefabricados en un clima cálido". VII Congreso Internacional de Prefabricados de Hormigón. Barcelona, 1972.

(27.2) ALEXANDERSON, J. "Efectos físicos del curado térmico del hormigón". VII Congreso Internacional de Prefabricados de Hormigón. Barcelona, 1972.

(27.3) "Accelerated curing of concrete at atmospheric pressure. State of the Art". ACI 517.2R-80.

(27.4) "Acceleration of concrete hardening by thermal curing". F.I.P. March 1982.

(27.5) FOGARASI, G. "Prestressed concrete technology". AKADEMIAI KIADÓ. Budapest, 1986.

CAPÍTULO 28

PROPIEDADES GENERALES DEL HORMIGÓN. DEFORMACIONES. FLUENCIA. RETRACCIÓN. TEMPERATURA

28.1 GENERALIDADES

En lo que sigue se expone un conjunto de propiedades del hormigón relacionadas con su resistencia y deformación. Se analizan en particular las deformaciones por fluencia, retracción y variaciones de temperatura. Estos temas serán completados más adelante, en especial en el Capítulo 31.

La documentación que aquí se incluye es bastante más amplia que la que figura en EHE y procede, básicamente, de estudios del CEB. En particular se ha profundizado tanto en el problema de las deformaciones como en las modificaciones introducidas en su determinación por estar sometida la pieza a temperaturas diferentes de la estándar de 20 °C.

28.2 RESISTENCIAS Y MÓDULO DE DEFORMACIÓN DEL HORMIGÓN

28.2.1 RESISTENCIA A COMPRESIÓN

La resistencia a compresión se especifica en los proyectos según su valor característico f_{ck}, medido en probetas cilíndricas de 15 cm de diámetro y 30 cm de altura, curadas a no menos del 95% de humedad relativa y a 20 ± 2 °C y ensayadas en estado saturado[1].

1 Por supuesto, la estructura real suele estar en otras condiciones. Volveremos sobre todo esto más adelante.

En lo anterior se entiende por valor característico el asociado a un 95% de nivel de confianza, es decir, corresponde a aquel valor por debajo del cual sólo es esperable que caiga un 5% de la población. Ampliaremos esto en el Capítulo 31.

28.2.2 RESISTENCIA A TRACCIÓN

Salvo que se indique otra cosa esta expresión se refiere a la resistencia a tracción axil[1]. Manejaremos un valor límite superior y un valor límite inferior, ambos entendidos como valores característicos.

$$f_{ctk,mín} = 0{,}21\sqrt[3]{f^2_{ck}} \qquad [28.1]$$

$$f_{ctk,máx} = 0{,}39\sqrt[3]{f^2_{ck}} \qquad [28.2]$$

Estos valores corresponden a niveles de confianza de 0,95 y 0,05, respectivamente.

En sentido estricto, deberíamos, como en el caso de la resistencia a compresión, emplear un valor medio. Este puede ser estimado mediante la fórmula

$$f_{ctm} = 0{,}30\sqrt[3]{f^2_{ck}} \qquad [28.3]$$

([28.1], [28.2] y [28.3] vienen expresadas en N/mm²). En la Tabla T-28.1 figuran los valores correspondientes.

TABLA T-28.1

Clases de hormigón	H-12	H-16	H-20	H-25	H-30	H-35	H-40	H-45	H-50	H-60	H-70	H-80	H-100
fck	12	16	20	25	30	35	40	45	50	60	70	80	100
fctm	1,6	1,9	2,2	2,6	2,9	3,2	3,5	3,8	4,1	4,6	5,1	5,6	6,5
fctk,mín	1,1	1,3	1,5	1,8	2,0	2,2	2,4	2,7	2,8	3,1	3,5	3,8	4,4
fctk,máx	2,1	2,5	2,9	3,3	3,8	4,2	4,7	4,9	5,4	6,1	6,8	7,4	8,6

Para el cálculo de flechas en piezas sometidas a flexión, la resistencia que debe manejarse es la resistencia a flexotracción. Este valor está fuertemente influido por muchas variables, en especial por el canto de la pieza.

El MODEL CODE indica la fórmula general siguiente:

$$f_{ck,flex} = f_{ctm}\left(\frac{16{,}75 + h^{0,7}}{h^{0,7}}\right) \qquad [28.4]$$

1 No existe norma española para su determinación. Puede usarse la Norma RILEM CPC 7.

donde el canto h viene expresado en mm y como $f_{ctm} = \frac{0{,}30}{0{,}21}\cdot f_{ctk,mín}$ se tiene

$$f_{ck,flex} = 1{,}43\left(\frac{16{,}75 + h^{0,7}}{h^{0,7}}\right) f_{ctk,mín} \qquad [28.5]$$

La fórmula [28.5] se representa en la figura 28-1.

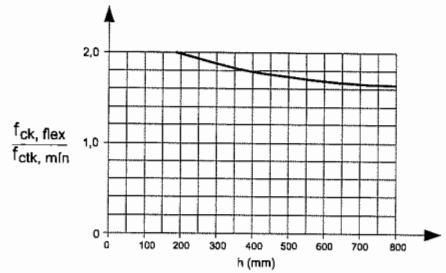


Figura 28-1

Dada la escasa variabilidad de la relación puede adoptarse, simplificadamente

$$f_{ck,flex} = 0{,}39\sqrt[3]{f^2_{ck}} \qquad [28.6]$$

que corresponde aproximadamente a un canto medio de 300 mm.

Otra expresión, debida a FAVRE y sus colaboradores (28.1), es

$$f_{ck,flex} = \left(0{,}6 + \frac{0{,}4}{\sqrt[4]{h}}\right) f_{ctm} \qquad [28.7]$$

donde f_{ctm} es la resistencia media a tracción axil y h el canto en metros.

Con $f_{ctm} = 0{,}30\sqrt[3]{f^2_{ck}}$, según [28.3], para $h_{medio} \approx 0{,}3\ m$, se tiene

$$f_{ck,flex} \approx 0{,}30\sqrt[3]{f^2_{ck}} \qquad [28.8]$$

valor semejante a [28.6].

28.2.3 MÓDULO DE DEFORMACIÓN

Para hormigón con árido cuarcítico, el módulo de deformación puede ser estimado mediante la fórmula del CEB

$$E_{ci} = 10.000\, f_{cm}^{1/3} \quad [1] \qquad [28.9]$$

Para el cálculo de flechas y otros propósitos es más lógico referirse al valor medio de la resistencia que de acuerdo con el MODEL CODE 90 puede estimarse mediante la fórmula

$$f_{cm} = f_{ck} + 8$$

donde f_{cm} y f_{ck} deben expresarse en N/mm² [2].

Adoptando de acuerdo con el MODEL CODE la relación $f_{cm} = f_{ck} + 8$, se obtiene

$$E_{ci} = 10.000\ (f_{ck} + 8\ )^{1/3} \qquad [28.10]$$

donde f_{ck} y E_{ci} vienen en N/mm².

[28.11] es la expresión adoptada por EHE.

E_{ci} es el valor del módulo tangente. Para cálculos simplificados en los que no se consideren las deformaciones plásticas instantáneas, puede tomarse el módulo secante

$$E'_{ci} = 8.500\, f_{cm}^{1/3} = 8.500\ (f_{ck} + 8\ )^{1/3} \qquad [28.11]$$

En la figura 28-2 se representan ambas expresiones y también la adoptada por el EUROCÓDICO EC-2, que sustituye el coeficiente 8500 por 9500.

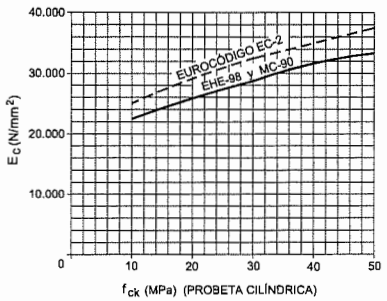


Figura 28-2

1 Para muchos casos interesa el c'alculo de E_{ci} en función del valor medio de la resistencia a compresión del hormigón.

2 Esta fórmula está deducida a partir de extensas investigaciones experimentales y es preferible a la adoptada desde los años 60 por la normativa española, incluso hasta EH-91.

Lo anterior es válido, como hemos dicho para árido cuarcítico. Si el árido es de otro tipo, los valores anteriores de E_c y E_{ci} deben multiplicarse por el coeficiente α_β indicado en la tabla T-28.2.

TABLA T-28.2

ÁRIDO		VALORES DE α
CUARCITA		1
ARENISCA		0,70
CALIZA	NORMAL	0,90
	DENSA	1,2
(1) OFITA, BASALTO, Y OTRAS ROCAS VOLCÁNICAS	POROSO	0,9
	NORMAL	1,2
(2) GRANITO Y OTRAS ROCAS PLUTÓNICAS		1,1
DIABASAS		1,3

(1) En este grupo se incluyen rocas como la riolita, dacita, andesita y ofita. Las rocas pertenecientes a este grupo (ofita, basalto y otras rocas volcánicas) presentan normalmente una baja porosidad y elevada densidad, pero pueden presentarse casos con porosidades relativamente altas, reflejadas por ejemplo en coeficientes de absorción del 3,5% ó superiores. Por ello, la tabla indica, además del valor 1,2 para el caso normal, el valor 0,9 para el caso de porosidad elevada.

(2) En este grupo se incluyen rocas como la sienita y diorita.

Recuérdese que f_{ck} corresponde a probeta en estado saturado[1].

28.2.4 DESARROLLO DE LA RESISTENCIA A COMPRESIÓN CON EL TIEMPO

El valor de f_{ck} a una edad determinada, depende de muchas variables, en particular del tipo de cemento, la temperatura y la humedad ambiente.

Para $T = 20\ ºC$ y $HR \geq 95\%$, la variación de resistencia con el tiempo viene dada por

$$f_{cm}(t) = \beta_{cc}(t)\, f_{cm,28} \qquad [28.12]$$

siendo

$$\beta_{cc}(t) = e^{\,s\left[1-\left(\frac{28}{t}\right)^{1/2}\right]} \qquad [28.13]$$

y, por tanto,

$$f_{cm}(t) = f_{cm,28} \cdot e^{\,s\left[1-\left(\frac{28}{t}\right)^{1/2}\right]} \qquad [28.14]$$

1 El paso de saturación a estado seco en el hormigón supone un aumento de resistencia del orden del 20% y una reducción de E_{ci} del orden del 10%.

donde

$f_{cm,28}$ = Resistencia media a compresión a 28 días en condiciones normalizadas.

$f_{cm\,(t)}$ = Resistencia media a compresión a la edad de t días.

t = Edad en días, corregida en su caso de acuerdo con [28.14].

s = Coeficiente dependiente del tipo de cemento.

s = 0,20 para cementos de alta resistencia y endurecimiento rápido. (Se entienden como tales los de las clases 42,5 R, 52,5 ó 52,5 R).

s = 0,25 para cementos de endurecimiento normal o rápido. (Los de clase 32,5 R y 42,5).

s = 0,38 para cementos de endurecimiento lento. (Los de clase 32,5).

Si la temperatura del hormigón es distinta de 20 °C, en algún periodo, la edad t en [28.12] debe sustituirse por una edad corregida t_T, que viene dada por la fórmula

$$t_T \sum_{i=1}^{i=n} \Delta t_i \, e^{-\left[\frac{4.000}{273 + T(\Delta t_i)} - 13{,}65\right]} \qquad [28.15]$$

donde

t_T = Temperatura corregida.

$T(\Delta t_i)$= Temperatura durante el período Δt_i.

Δt_i = Tiempo durante el que actúa la temperatura $T(\Delta t_i)$.

La expresión [28.15] es la adoptada por el MODEL CODE 90. Está basada en el concepto de madurez, pero deducido a partir de las teorías de activación de energía para la hidratación del cemento. Es una versión mucho más perfeccionada del concepto de madurez que la clásica, pero, al igual que ésta, sólo es aplicable a cementos portland o a lo sumo con bajos contenidos de adición. Véase la referencia (28.2).

28.2.5 DESARROLLO DEL MÓDULO DE DEFORMACIÓN CON EL TIEMPO

Para una edad t, diferente de 28 días, el módulo de deformación puede estimarse mediante la fórmula

$$E_{ci}\,(t) = \beta_E\,(t)\,E_{ci} \qquad [28.16]$$

siendo

$$\beta_E\,(t) = \left[\,\beta_{cc}\,(t)\,\right]^{0,5} \qquad [28.17]$$

donde $\beta_{cc}\,(t)$ viene dada, como vimos, por [28.13] con análogas consideraciones a las que allí se hicieron para el caso de temperaturas diferentes a 20 °C y tipo de cemento.

28.3 DEFORMACIONES DEL HORMIGÓN

Su cálculo es de gran importancia para muchas cuestiones, pero en especial para una evaluación correcta de las pérdidas de tensión en las piezas pretensadas. La tabla T-28.3 contiene una clasificación general.

TABLA T-28.3

DEFORMACIONES	DEPENDIENTES DE LA TENSIÓN		INDEPENDIENTES DE LA TENSIÓN
	INSTANTÁNEAS	DIFERIDAS (fluencia)	
Reversibles	Elásticas	Elásticas diferidas	Termohigrométricas
Irreversibles	Remanentes	Plásticas diferidas	Retracción

Deformaciones reversibles

Son aquéllas que, al cesar la tensión que las ha producido, se recuperan bien instantáneamente (elásticas), o bien de forma diferida.

Deformaciones irreversibles

Son las que se producen bajo el efecto de las tensiones, bien en forma instantánea (plasticidad instantánea), bien a lo largo del tiempo (plasticidad diferida).

Deformaciones de fluencia

Es el aumento en el tiempo de las deformaciones producidas por tensiones permanentes. Abarca, pues, tanto la elasticidad diferida como a la plasticidad diferida. Frecuentemente, se considera incluida también la plasticidad instantánea, ya que ésta no se produce realmente de tal forma.

Deformaciones termohigrométricas

Son las producidas en el hormigón endurecido por los cambios de temperatura y humedad.

Deformaciones de retracción

Son las sufridas por el hormigón durante su período de endurecimiento.

28.4 FLUENCIA, RETRACCIÓN Y TEMPERATURA

La deformación total en el instante t, de un hormigón sometido a carga en el instante t_0, bajo una tensión constante $\sigma_c\,(t_o)$, se descompone de la forma siguiente:

$$\varepsilon_c\,(t) = \varepsilon_{ci}\,(t_0) + \varepsilon_{c\varphi}\,(t) + \varepsilon_{cs}\,(t) + \varepsilon_{c,T} \qquad [28.18]$$

donde

$\varepsilon_{ci}\,(t_o)$ = Deformación instantánea bajo carga.

$\varepsilon_{c\varphi}(t)$ = Deformación de fluencia hasta el instante $t > t_0$.

$\varepsilon_{cs}(t)$ = Deformación de retracción hasta el instante $t > t_0$.

$\varepsilon_{c,T}$ = Deformación debida a la variación térmica.

28.4.1 FLUENCIA

Para tensiones inferiores a $0{,}45\, f_{cm}(t_o)$, puede aceptarse proporcionalidad entre la tensión y la deformación de fluencia[1].

Para una tensión $\sigma_c(t_0)$ aplicada en el instante t_0 y mantenida constante, en el instante $t > t_0$, se tiene:

$$\varepsilon_{c\varphi}(t,t_0) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_{ci,28}} \cdot \phi\ (t,t_0) \qquad [28.19]$$

donde:

$\phi(t, t_o)$ = Coeficiente de fluencia.

$E_{ci,28}$ = Módulo de deformación a 28 días a 20 °C y $HR \geq 95\%$ obtenido mediante [28.10].

$$\varepsilon_{c\varphi}(t,t_0) = \sigma_c(t_0)\left[\frac{1}{E'_{c,i}(t_0)} + \frac{\phi(t,t_0)}{E_{ci}}\right] \qquad [28.20]$$

que puede ser representada simbólicamente por

$$\varepsilon_{c\varphi}(t, t_0) = \sigma_c(t_0)\, J(t, t_0) \qquad [28.21]$$

donde:

$J(t, t_o)$ = Función fluencia, que proporciona la deformación total diferida por unidad de tensión.

$E'_{ci}(t_o)$ = Módulo de deformación a la edad t_0, calculado con la expresión [28.17].

E'_{ci} = Módulo de deformación a 28 días medido en probeta y condiciones estándar.

El coeficiente de fluencia $\phi(t, t_o)$ puede estimarse para T = 20 °C y cualquier humedad relativa mediante la expresión[2]

$$\phi(t, t_0) = \phi_0\, \beta_c(t - t_0) \qquad [28.22]$$

donde

1 Debe prestarse atención a que con los sistemas actuales de cálculo, especialmente si los coeficientes de ponderación γ_f se reducen a valores próximos a los mínimos permitidos y se utilizan cuantías próximas a la crítica superior, las tensiones en servicio pueden superar apreciablemente el límite $0{,}4\, f_{cm}(t_0)$. Véase referencia (28.3). EI MODEL CODE 90 y, sobre todo, la referencia (28.4) dan procedimientos de corrección, pero extraordinariamente complejos.

2 Obsérvese que la expresión no es aditiva, es decir, la fluencia entre dos instantes t_1 y t_2 no es $\phi(t_2, t_1)$ sino $\phi(t_2, t_0)$-$\phi(t_1,t_0)$.

$$\phi_0 = \phi_{HR} \cdot \beta(f_{cm}) \cdot \beta(t_0) \qquad [28.23]$$

siendo

$$\phi_{HR} = 1 + \frac{100 - HR}{9{,}9 e_f^{1/3}} \qquad [28.24]$$

$$\beta(f_{cm}) = \frac{16{,}8}{\sqrt{f_{ck} + 8}} \qquad [28.25]$$

$$\beta(t_0) = \frac{1}{0{,}1 + (t_0)^{0{,}2}} \qquad [28.26]$$

con los significados siguientes:

HR = Humedad relativa del ambiente en que está situada la estructura, en %.

e_f = Espesor ficticio = $\frac{2A_c}{u}$ siendo A_c el área de la sección transversal de la pieza y u la parte de perímetro que está en contacto con la atmósfera. (e_f en mm).

f_{cm} = Resistencia del hormigón a 28 días de edad en probeta y condiciones estándar.

t_0 = Instante de la puesta en carga, expresado en días a partir de la fecha de hormigonado. (t_0 se corrige, si ha lugar, de acuerdo con [28.16] y [28.29]).

(La edad t de cálculo, no se corrige en ningún caso).

En la fórmula [28.22], el factor $\beta_c(t - t_o)$ viene dado por

$$\beta_c(t - t_0) = \left[\frac{(t - t_0)}{\beta_H + t\text{-}t_0}\right]^{0{,}3} \qquad [28.27]$$

siendo

$$\beta_H = 150\left\{1 + \left[1{,}2 \cdot \frac{HR}{100}\right]^{18}\right\}\frac{e_f}{100} + 250 \leq 1.500 \qquad [28.28]$$

con los mismos significados anteriores.

La tabla T-28.4 procedente de EHE proporciona los valores de $\phi(t - t_o)$ para t_0 variable y t hasta 10.000 días para los casos más habituales. (Está basada en una temperatura de 20 °C).

TABLA T-28.4

Valores del coeficiente de fluencia $\phi\,(t, t_0)$

Edad puesta en carga t_0 (días)	Humedad relativa (%)											
	50			60			70			80		
	Espesor medio (mm)											
	50	150	600	50	150	600	50	150	600	50	150	600
1	5,4	4,4	3,6	4,8	4,0	3,3	4,1	3,6	3,0	3,5	3,1	2,7
7	3,8	3,1	2,5	3,3	2,8	2,3	2,9	2,5	2,1	2,5	2,2	1,9
14	3,3	2,7	2,2	2,9	2,4	2,0	2,5	2,2	1,8	2,2	1,9	1,7
28	2,9	2,4	1,9	2,6	2,1	1,8	2,2	1,9	1,6	1,9	1,7	1,5
60	2,5	2,1	1,6	2,2	1,9	1,5	1,9	1,7	1,4	1,6	1,4	1,3
90	2,3	1,9	1,5	2,0	1,7	1,4	1,8	1,5	1,3	1,5	1,3	1,2
365	1,8	1,4	1,2	1,6	1,3	1,1	1,4	1,2	1,0	1,2	1,0	0,9
1800	1,3	1,1	0,8	1,1	1,0	0,8	1,0	0,9	0,7	0,8	0,7	0,7

(*) La tabla no considera la resistencia del hormigón. Está calculada para $f_{ck} \approx 37{,}5$ MPa.

a) Corrección del coeficiente de fluencia según la temperatura de curado y el tipo de cemento

Ambos efectos pueden ser considerados modificando el instante de carga t_0, mediante la fórmula.

$$t_0 = t_{0,T}\left[\frac{9}{2 + (t_{0,T})^{1,2}} + 1\right]^{\alpha} \geq 0{,}5 \text{ días} \qquad [28.29]$$

donde:

$t_{0,T}$ = Edad corregida de carga, de acuerdo con la fórmula [28.16].

α = Coeficiente de valor:

$\alpha = -1$ para cementos de endurecimiento lento.

$\alpha = 0$ para cementos de endurecimiento normal o rápido.

$\alpha = 1$ para cementos de endurecimiento rápido y alta resistencia.

b) Corrección del coeficiente de fluencia por temperatura durante el período de aplicación de la carga

El efecto de la temperatura durante el período de curado inicial, fue tenido en cuenta mediante la fórmula [28.29] del apartado a) anterior.

Si la temperatura durante el período de aplicación de la carga es constante, pero diferente de 20 °C, su efecto sobre la fluencia puede ser calculado, en primer lugar, usando el coeficiente $\beta_{H,T}$ en lugar de β_H en [28.28], siendo

$$\beta_{H,T} = \beta_H \cdot \beta_T \qquad [28.30]$$

donde β_H viene dado por [28.28] y β_T por la expresión

$$\beta_T = e^{\left(\frac{1.500}{273 + T} - 5{,}12\right)} \qquad [28.31]$$

donde T es la temperatura en °C.

En segundo lugar, el coeficiente ϕ_{HR} de [28.24] debe ser sustituido por

$$\phi_{HR,T} = e^{0{,}015(T-20)} + (\phi_{HR} - 1) \cdot e^{0{,}015\sqrt[5]{(T-20)^6}} \qquad [28.32]$$

donde ϕ_{HR} viene dado por [28.24] y T se expresa en °C.

Los nuevos coeficientes $\beta_{H,T}$ y $\phi_{HR,T}$, sustituyen a β_H y ϕ_{HR} en [28.28] y [28.24], respectivamente, para el cálculo de $\phi\,(t, t_o)$ mediante [28.23].

c) Corrección del coeficiente de fluencia por una variación de temperatura, durante el período de carga

Si durante el período de carga se produce una variación de temperatura ΔT, su efecto instantáneo en la fluencia puede calcularse mediante la expresión[1]:

$$\phi\,(t,t_0,T) = \phi_0 \cdot \beta_c\,(t - t_0) + \Delta\,\phi_{\Delta T,trans} \qquad [28.33]$$

donde ϕ_0 y $t\,\beta_c\,(t - t_o)$ fueron ya indicados en [28.23] tenida en cuenta la variación a temperatura constante diferente a 20 °C, según el párrafo anterior, para ϕ_0 y $\beta_c\,(t - t_o)$ y el valor de $\Delta\phi_{\Delta T,trans}$, viene dado por

$$\Delta\phi_{\Delta T,trans} = 0{,}0004(T - 20)^2 \qquad [28.34]$$

28.4.2 RETRACCIÓN

El acortamiento total por retracción, para $T = 20$ °C, puede estimarse a partir de la expresión

$$\varepsilon_{cs}\,(t,t_r) = \varepsilon_{cs,0} \cdot \beta_s\,(t - t_r)^{\,2} \qquad [28.35]$$

donde:

$\varepsilon_{cs,0}$ = Coeficiente base de retracción.

$\beta_s\,(t - t_r)$ = Coeficiente de desarrollo de la retracción en el tiempo.

1 Lo que sigue se refiere al efecto instantáneo de la variación térmica sobre la fluencia. El efecto debido a la duración a partir de ese instante, se rige por lo expuesto en b).

2 Obsérvese que la expresión no es aditiva, es decir, la retracción entre dos instantes t_1 y t_2 no es $\varepsilon_{cs}(t_1, t_2)$ sino $\varepsilon_{cs}(t_2,t_0) - \varepsilon_{cs}(t_1, t_o)$.

t = Edad del hormigón en el momento para el que se calcula la retracción. (Sin corregir).

t_r = Edad a la que comienza la retracción (normalmente $t_r \approx 1$ día, pues los curados de tipo habitual a temperatura ambiente, no afectan apreciablemente al valor de la retracción). (Sin corregir)

En [28.35] se tiene

$$\varepsilon_{cs,0} = \varepsilon_s(f_{cm}) \cdot \beta_{HR} \qquad [28.36]$$

donde:

$$\varepsilon_s(f_{cm}) = \left[160 + 10\,\beta_{sc} \left(9 - \frac{f_{cm}}{10} \right) \right] \cdot 10^{-6} \qquad [28.37]$$

f_{cm} = Resistencia media del hormigón en N/mm² en condiciones normalizadas a 28 días. (Puede aceptarse a falta de otra información $f_{cm} = f_{ck} + 8$)

β_{sc} = Coeficiente dependiente del tipo de cemento. (Ver 28.2.4)

β_{sc} = 4 para cementos de endurecimiento lento.

β_{sc} = 5 para cementos de endurecimiento normal o rápido.

β_{sc} = 8 para cementos de endurecimiento rápido y alta resistencia.

(EHE adopta $f_{cm} = f_{ck} + 8$ y supone $\beta_{sc} = 5$, llegando a $\varepsilon_s\,(f_{cm}) = (570 - 5 f_{ck})\ 10^{-6}$

$$\beta_{HR} = -1{,}55 \left[1 - \left(\frac{HR}{100} \right)^3 \right] \quad \text{para } 40\% \le HR < 99\%$$

$$0{,}25 \text{ para } HR \ge 99\% \qquad [28.38]$$

siendo HR la humedad relativa ambiente en %

$\beta_s\,(t - t_r)$ viene dada por la expresión

$$\beta_s\,(t - t_r) = \left[\frac{(t - t_r)}{0{,}035\ e_f^2 + t - t_r} \right]^{0{,}5} \qquad [28.39]$$

donde e_f es el espesor ficticio en mm.

TABLA T-28.5

Valores del coeficiente de retracción $\varepsilon_{cs}(t,t_r) \cdot 10^{-6}$

t - t_r (días)	Humedad relativa (%)											
	50			60			70			80		
	Espesor medio (mm)											
	50	150	600	50	150	600	50	150	600	50	150	600
14	-193	-69	-17	-173	-61	-15	-145	-51	-13	-107	-38	-10
30	-262	-99	-25	-235	-89	-23	-197	-75	-19	-146	-55	-14
90	-369	-166	-44	-331	-149	-39	-277	-125	-33	-206	-93	-24
365	-466	-292	-87	-417	-262	-78	-350	-219	-65	-260	-163	-49
1825	-507	-434	-185	-454	-388	-165	-381	-326	-139	-283	-242	-103
10000	-517	-499	-345	-463	-448	-309	-388	-375	-259	-288	-279	-192

(*)La tabla no considera la resistencia del hormigón.Está caculada para $f_{ck} \approx 37{,}5$ MPa.

Para la mayoría de los casos habituales en la práctica, la tabla T-28.5 procedente de EHE proporciona directamente los valores de $\varepsilon_{c,s}$. (Está basada en una temperatura de 20 °C y cemento de endurecimiento normal).

a) Corrección de la retracción para temperaturas diferentes de 20 °C

Si la temperatura durante el desarrollo de la retracción es diferente de 20 °C, su efecto sobre ella puede ser estimado mediante la expresión

$$\alpha_{rT} = 0{,}0350 \left[e_f \right]^2 e^{-0{,}06(T-20)} \qquad [28.40]$$

donde T viene en °C y h en mm.

El coeficiente α_{rT} reemplaza al término $0{,}035\ \ e^2_f$ en la expresión [28.39]. Al mismo tiempo la influencia en $\varepsilon_s\,(f_{cm})$, se obtiene sustituyendo β_{HR} en [28.36], por

$$\beta_{HR,T} = \beta_{HR} \cdot \beta_{rT} \qquad [28.41]$$

donde β_{HR} se expuso en [28.38] y β_{rT} viene dada por

$$\beta_{rT} = 1 + \left(\frac{8}{103 - HR} \right) \left(\frac{T - 20}{40} \right) \qquad [28.42]$$

siendo HR = humedad relativa en % y T en °C.

Con [28.40] se calcula $\beta_s\,(t - t_r)$ y con [28.39], [28.40] [28.42] y [28.37] se calcula [28.36].

BIBLIOGRAFÍA

(28.1) FAVRE, R., KOPRNA, M., y RADOJICI, A.; "Effets différés, fissuration et deformations des structures du beton". Georgi Saint-Saphorin. Lausanne. 1980.

(28.2) FERNÁNDEZ GÓMEZ, J.; "Estudio experimental de la evolución de las características mecánicas del hormigón curado en diversas condiciones". Tesis Doctoral bajo la dirección de J. CALAVERA. Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos de Madrid. Madrid, 1986.

(28.3) CALAVERA, J.; "Los coeficientes de seguridad en teoría clásica y en teoría de estados límites". Hormigón y Acero. N° 110. Madrid, 1974.

(28.4) "Evaluation of the time dependent behavior of concrete". Bulletin d'information. N° 199. CEB. August, 1990.

ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR BIBLIOTECA UNIVERSITAT DE LLEIDA

CAPÍTULO 29

PÉRDIDAS DE LA FUERZA DE PRETENSADO. FUERZA FINAL DE PRETENSADO

29.1 INTRODUCCIÓN

Sea cualquiera la técnica de pretensado que se emplee y en particular con independencia de que se empleen armaduras pretesas o postesas, es inevitable que se produzcan pérdidas apreciables en la tensión de las armaduras y por tanto en la fuerza de pretensado. Ello conduce en definitiva a una evolución decreciente del pretensado en el tiempo, que debe ser cuidadosamente considerada en el cálculo.

Algunas de las pérdidas son intrínsecas y propias de las armaduras. Otras son producidas en éstas por las deformaciones que sufre el hormigón.

29.2 TENSIÓN INICIAL DE PRETENSADO

De acuerdo con EHE, la fuerza inicial de pretensado, P_o, ha de ocasionar en las armaduras activas una tensión no superior al menor de los límites siguientes:

$$0{,}75\, f_{pmáxk} \qquad [29.1]$$

$$0{,}90\, f_{pk} \qquad [29.2]$$

donde

$f_{pmáxk}$ = Carga unitaria máxima característica

f_{pk} = Límite elástico característico

De forma temporal, la tensión podrá alcanzar los valores:

$$0{,}85\, f_{pmáxk} \qquad [29.3]$$

$$0{,}95\, f_{pk} \qquad [29.4]$$

siempre que inmediatamente después de anclar las armaduras en el hormigón se respeten los límites [29.1] y [29.2].

Como, sea cualquiera la técnica de pretensado, suele ser necesario controlar los alargamientos de tesado (recorrido de tesado) de las armaduras, y por otra parte se desea que en servicio la pieza presente un comportamiento esencialmente lineal, es conveniente añadir que después del tesado y anclaje en las armaduras postesas, e inmediatamente después de la transferencia en las pretesas, el valor de la fuerza de pretensado no supere además el límite:

$$0{,}85\, f_{p0,1k} \qquad [29.5]$$

donde $f_{p0,1k}$ es la tensión que en el diagrama característico de las armaduras corresponde a la deformación remanente del 0,1%. El límite [29.5] corresponde en la práctica a una tensión que está en la rama recta del diagrama tensión-deformación de la armadura.

Por las mismas razones antedichas bajo la acción del gato el valor P_o no debe conducir a una tensión superior a:

$$0{,}90\, f_{p0,1k} \qquad [29.6]$$

(Estas condiciones son establecidas por el MODEL CODE 90 (29.1)).

29.3 PÉRDIDAS DE LA FUERZA DE PRETENSADO CUANDO SE EMPLEAN ARMADURAS POSTESAS

El conjunto de las pérdidas suele oscilar del 15 al 25%. Conviene dividirlas para su consideración en dos grupos:

a) **Pérdidas instantáneas de fuerza**. Son habitualmente debidas a los tres fenómenos siguientes:
   - Pérdida por rozamiento a lo largo de los conductos o sillas de apoyo.
   - Pérdida por penetración de cuñas.
   - Pérdida por acortamiento elástico instantáneo del hormigón.

b) **Pérdidas diferidas de fuerza**. Son también habitualmente debidas a tres fenómenos:
   - Retracción del hormigón ocurrida con posterioridad al tesado y anclaje de las armaduras.
   - Relajación de las armaduras desde el instante de su anclaje.

   - Fluencia del hormigón, ocurrida en una etapa inicial bajo las tensiones producidas por la acción del pretensado y eventualmente del peso propio de la pieza y en otra posterior por las ya dichas más las acciones exteriores aplicadas.

Debe señalarse ya que el fenómeno de pérdida de la fuerza de pretensado por relajación de las armaduras ni es un caso de relajación pura -pérdida de tensión de la armadura a longitud constante- ni es tampoco un caso de fluencia pura del acero -incremento de longitud a tensión constante. Se trata en realidad de una pérdida debida a un fenómeno muy complejo de evolución de la armadura anclada en un hormigón que fluye, bajo una tensión de la armadura que a su vez decrece con el tiempo.

En lo que sigue analizamos detalladamente cada una de las pérdidas.

29.3.1 PÉRDIDAS INSTANTÁNEAS DE FUERZA

a) **Pérdida ΔP_1 debida al rozamiento en el conducto**. En lo que sigue nos referimos a conductos, bien adherentes, como en el caso de las vainas metálicas corrugadas o lisas, bien no adherentes como es el caso de los conductos de material plástico. El caso del rozamiento en sillas en la técnica de pretensado exterior, aunque obedece a las mismas bases requiere siempre un estudio adaptado al tipo de sillas empleado.

   El rozamiento en los conductos se produce tanto en las partes curvas como en las rectas, tal como a continuación veremos.

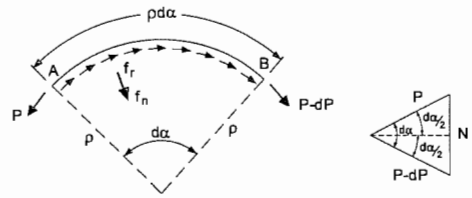


Figura 29-1

Consideremos (Fig. 29-1) el tramo curvo AB de longitud diferencial, de un tendón de pretensado, al que en su extremo libre A se le aplica una fuerza de tesado P. A lo largo del arco AB se desarrollarán fuerzas de rozamiento f_r debidas al rozamiento entre el tendón y el conducto. Estas fuerzas tendrán un valor $f_r = f_n \cdot \mu$, donde f_n es la fuerza normal al conducto, debida a la presión del tendón sobre él y μ el coeficiente de rozamiento entre los materiales del tendón y del conducto. Si ρ es el radio de curvatura de la zona considerada y N la resultante de las fuerzas f_n, el diagrama vectorial de la figura conduce a

$$N = P \operatorname{sen} \frac{d\alpha}{2} + (P - dP) \operatorname{sen} \frac{d\alpha}{2}$$

y por tanto

$$N = 2P \operatorname{sen} \frac{d\alpha}{2} \qquad [29.7]$$

Al tratarse de una longitud diferencial de área puede aceptarse

$$\operatorname{sen} \frac{d\alpha}{2} \approx \frac{d\alpha}{2}$$

y [29.7] se transforma en

$$N = Pd\alpha$$

La fuerza de rozamiento es la integral de todas las $f_r = \mu f_n$ y ha de ser igual a dP. Por tanto

$$dP = \mu P d\alpha$$

o bien

$$\frac{dP}{P} = \mu d\alpha$$

e integrando

$$\int_B^A \frac{dP}{P} = \mu \int_0^\alpha d\alpha$$

y en definitiva resulta

$$P_B = P_A \, e^{-\mu\alpha}$$

con α expresado en radianes.

En la práctica, no sólo se produce rozamiento en las zonas curvas del tendón, sino también una ondulación accidental parásita, tanto en tramos curvos como rectos, debido a defectos de alineación de las vainas, tales como p. ej. el indicado en la figura 29-2.

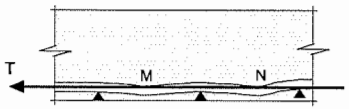


Figura 29-2

Si la distancia entre los separadores del conducto no es reducida, éste flotará antes del hormigonado. En el propio proceso de hormigonado en particular debido al peso del hormigón fresco y a la acción de los vibradores, se producirán nuevos desalineamientos y cuando se tese el tendón, éste rozará con el conducto en las zonas tales como las M y N de la figura.

Sobre una longitud de tendón dx, llamemos k al coeficiente de desviación angular accidental parásita por unidad de longitud. Podemos plantear análogamente al caso anterior la ecuación diferencial

$$dP = k\mu P dx$$

o bien

$$\frac{dP}{P} = k\mu dx$$

e integrando entre A y B, se obtiene análogamente

$$P_B = P_A \, e^{-k\mu x} \qquad [29.8]$$

La expresión general para las pérdidas en un tendón con arcos α_i y longitud total x desde el anclaje de tesado a la sección considerada, será:

$$\Delta P_1 = P_0 \left[1 - e^{-\mu (\Sigma \alpha_i + kx)}\right] \qquad [29.9]$$

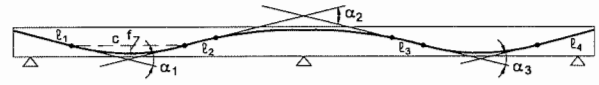


Figura 29-3

En la figura 29-3 se indica un caso general de trazado de un tendón con tramos rectos y curvos. En los tramos curvos, si la relación de flecha a cuerda es inferior a 0,045, se puede considerar $\alpha = \frac{8f}{c}$.

EHE recomienda valores de μ y k. Tanto el MODEL CODE 90 como el EUROCÓDIGO EC-2 proporcionan también datos. Los que se exponen a continuación proceden del MODEL CODE 90.

1 Esta fórmula es de presentación diferente a la de EHE, que es $\Delta P_1 = P_0 \left[1 - e^{-\mu (\Sigma \alpha_i + kx)}\right]$. La de [29.9] procede del MODEL CODE 90, y permite un tratamiento más preciso del problema.

a-1) Armaduras postesas inyectadas.

Debe distinguirse entre el valor del coeficiente físico de rozamiento, μ_o, y el real, μ, pudiendo aceptarse

$$\mu = \chi_o \mu_o$$

donde χ_o es un coeficiente que depende del porcentaje de área del conducto ocupado por el tendón.

Para porcentajes de ocupación del 50 ó 60%, χ_o oscila de 1,30 a 1,35. Para esta situación y sin formación de óxido apreciable pueden aceptarse los valores siguientes:

	μ_o	μ
Alambres trefilados	0,13	0,17
Torzales y cordones	0,15	0,19
Barras redondas lisas	0,25	0,33
Barras redondas corrugadas	0,50	0,65

No es raro encontrar en las mediciones del recorrido de tesado en obra, variaciones que corresponden a valores de μ diferentes de los de la tabla hasta en el 50%, y mayores si la oxidación es apreciable.

Los valores de k oscilan de 0,005 m^{-1} en los casos de control de calidad de ejecución intenso a 0,01m^{-1} en los casos de control de calidad normal.

a-2) Armaduras postesas no adherentes. De acuerdo con el MODEL CODE 90, y en ausencia de una información específica y contrastada se pueden aceptar los valores de μ y k siguientes:

- Cordones unifilares, situados en vainas de plástico, como es usual en placas sobre apoyos aislados, depósitos, etc.

μ 0,05 a 0,07

k 0,006 a 0,01 m^{-1}

- Tendones engrasados, constituidos por varios alambres o cordones

μ 0,13 a 0,17

k 0,004 a 0,008 m^{-1}

- Tendones no engrasados, constituidos por varios alambres o cordones

Pueden usarse los valores expuestos en a-1) para el caso de tendones inyectados.

a-3) Tendones de pretensado exterior, formados por varios cordones, apoyados sobre sillas de acero, con radio de 2,5 a 4,0 m.

- Cordones sin engrasar, sobre silla de acero

μ 0,25 a 0,30

k 0

- Cordones engrasados, sobre silla de acero

μ 0,20 a 0,25

k 0

- Cordones sin engrasar, situados dentro de vainas de plástico, sobre silla de acero

μ 0,12 a 0,15

k 0

- Haz de cordones plastificados, sobre silla de acero

μ 0,05 a 0,07

k 0

En los casos de conductos con poca longitud y sin grandes desvíos curvos, es usual tesar los tendones desde un solo extremo. Si estas condiciones no se dan, será necesario tesar el tendón desde ambos extremos. (Ver el apartado b) que sigue).

En la figura 29-4 se indica un caso genérico, con tramos de tendón *MN*, *PQ* y *RS* rectos y tramos curvos *NP* y *QR*.

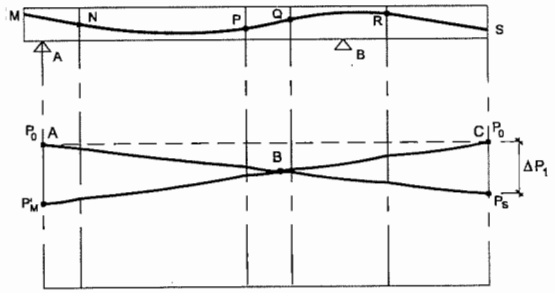


Figura 29-4

Si se procede al tesado desde el extremo M solamente, la fuerza de pretensado descenderá a lo largo de la longitud de la pieza, hasta el valor mínimo P_S, en el otro extremo. Si la pérdida $P_o - P_S$ es importante, una solución es proceder a realizar un segundo tesado, ahora desde el extremo S, con fuerza $P'_S = P_o$. Si no se hubiera realizado el primer tesado, la variación de fuerza P sería la línea que varía desde la fuerza $P'_S = P_o$ en S a P'_M en el extremo M. Si se realizan los dos tesados, la curva de variación de la fuerza de tesado P será la ABC, con una apreciable reducción de las pérdidas.

De hecho, las pérdidas pueden reducirse aún más, si bien con operaciones que suponen un incremento apreciable del coste de tesado. Basta para ello tesar por ambos extremos hasta el límite provisional establecido por [29.3] y [29.4] y reducir luego la tensión del tendón, por ej. a $0{,}6\, f_{pmáx}$, elevarla a continuación al valor final [29.1], [29.2], anclando finalmente los tendones.

Llamaremos P_1 a la fuerza de pretensado después de producida la pérdida de fuerza ΔP_1.

b) Pérdida ΔP_2 debida a la penetración de cuñas[1]

A continuación del tesado del tendón, se procede al anclaje de éste. Salvo en algunos sistemas particulares de pretensado, tal como vimos en el Capítulo 27, el anclaje se realiza mediante cuñas (divididas en dos o tres piezas circunferencialmente) que actúan sobre el tendón. Para la entrada en acción de las cuñas es necesario un cierto deslizamiento de éstas, que sucede una vez el gato reduce la fuerza aplicada al tendón. La penetración de cuñas δ_c es un dato que debe ser proporcionado por el fabricante de anclajes, basado en ensayos independientes. En la práctica suele oscilar de 3 a 12 mm según el sistema de anclaje. (Es menor cuando el gato posee dispositivo auxiliar de empuje y clavado previo de las cuñas).

Esta penetración, a efectos de cálculo, se refiere sólo al extremo de tesado, es decir al anclaje activo, ya que en el extremo opuesto, es decir en el anclaje pasivo si tiene cuñas, tal penetración se produce también, pero bajo la fuerza actuante del gato y no origina por tanto ninguna pérdida de fuerza. En caso de tesado por ambos extremos, se produce naturalmente en ambos.

La penetración de la cuña ocasiona una pérdida de fuerza ΔP_2. Si el rozamiento entre el tendón y el conducto es muy bajo, como por ejemplo en el caso de tendones no adheridos y con grasa soluble para evitar el rozamiento, el acortamiento producido del tendón es sensiblemente uniforme a lo largo de toda su longitud ℓ_t y la pérdida de fuerza ΔP_2 vendrá dada por

$$\Delta P_2 = \frac{\delta_c}{\ell_t} \cdot E_P \cdot A_P \qquad [29.10]$$

1 En esta pérdida consideramos también el "asiento" elástico instantáneo del anclaje en el hormigón de la pieza. Es un dato que debe ser facilitado por el fabricante.

y

$$P_2 = P_0 - \Delta P_1 - \Delta P_2 = P_1 - \Delta P_2 = P_1 - \frac{\delta_c \cdot E_p \cdot A_P}{\ell_t} \qquad [29.11]$$

y se produce uniformemente a lo largo de la longitud ℓ_t del tendón. (Este es el caso considerado por EHE).

En este caso, la pérdida suele ser despreciable en la práctica, salvo para tendones muy cortos.

Sin embargo, en los casos usuales de rozamiento entre tendón y conducto, la situación es diferente, tal como se indica en la figura 29-5.

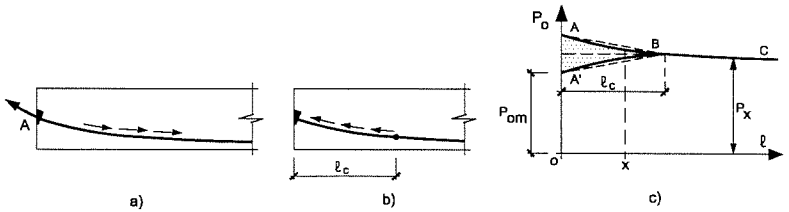


Figura 29-5

Cuando se tesa el tendón, se producen unas fuerzas de rozamiento (fig. 29-5a)) que se oponen al alargamiento del cable y reducen la fuerza de pretensado a medida que el punto considerado del tendón se aleja del anclaje.

En cambio, cuando se suelta el tendón y hasta que se enclavan las cuñas (fig. 29-5b)) el corrimiento del tendón moviliza fuerzas de rozamiento de sentido contrario, hasta una distancia ℓ_c, en la que las fuerzas de rozamiento producen ya una fuerza total en el tendón igual a la diferencia entre la fuerza de tesado P_o y la correspondiente al punto distante ℓ_c del anclaje.

Esto se indica en la figura 29-5c). En los casos habituales, en una distancia ℓ_c a partir del anclaje las fuerzas de tesado, que inicialmente seguían la ley ABC, se reducen en dicha longitud a la ley $A'BC$.

Las tensiones en el tendón de acuerdo con la ley ABC vienen dadas según [29.9] por la fórmula

$$\sigma_P(x) = \sigma_o \cdot e^{-\mu(\alpha + kx)} \qquad [29.12]$$

Producida la penetración de cuñas, las tensiones modificadas σ_{mp} correspondientes al tramo $A'B$ serán

$$\sigma_{mp}(x) = \sigma_{mp}(\ell_c) e^{-[\mu(\alpha(\ell_c) + k\ell_c) - \mu(\alpha(x) - kx)]} \qquad [29.13]$$

$$\sigma_{mp}(\ell_c) = \sigma_o e^{-\mu(\alpha(\ell_c) + k\ell_c)}$$

y por tanto

$$\sigma_{mp}(x) = \sigma_o e^{-\mu[2\alpha(\ell_c) + 2k\ell_c - \alpha(x) - kx]} \qquad [29.14]$$

La penetración del anclaje δ_c, corresponde a la diferencia de alargamientos del tendón según la curva de fuerza teórica AB y la real $A'B$. Es decir:

$$\delta_c = \int_o^{\ell_c} \left[\varepsilon_p(x) - \varepsilon_{mp}(x)\right] dx$$

y sustituyendo

$$\delta_c = \int_o^{\ell_c} \left[\frac{\sigma_p(x)}{E_p} - \frac{\sigma_{mp}(x)}{E_p}\right] dx$$

o bien, expresando δ_c en función de las fuerzas de pretensado

$$\delta_c = \int_o^{\ell_c} \left[\frac{P_p(x)}{A_p E_p} - \frac{P_{mp}(x)}{A_p E_p}\right] dx \qquad [29.15]$$

La expresión [29.15] equivale a

$$\delta_c = \frac{S_{AA'B}}{A_p E_p} \qquad [29.16]$$

donde $S_{AA'B}$ es el área rayada del triángulo curvilíneo en la figura 29-5c).

En la práctica se consigue, en ausencia de datos más precisos proporcionados por el fabricante de los anclajes, una buena aproximación asimilando el triángulo curvilíneo $AA'B$ al rectilíneo $AA'B$ indicado de trazos en la figura.

El área rayada puede expresarse como

$$S_{AA'B} = \frac{1}{2}(P_o - P_{om}) \cdot \ell_c \qquad [29.17]$$

El valor P_{om} viene dado, de acuerdo con [29.14] por

$$P_{om} = P_o e^{-\mu\left(2\cdot\frac{\alpha}{\ell}\cdot\ell_c + k\ell_c\right)} \qquad [29.18]$$

En la expresión anterior, se ha supuesto que la variación angular del tendón, α, en la longitud ℓ_c, es la media $\frac{\alpha}{\ell}$, (α ángulo total de giro del tendón, ℓ, longitud total del tendón), por dicha longitud.

Operando

$$P_{om} = P_o e^{-2\mu\ell_c\left(\frac{\alpha}{\ell} + k\right)}$$

y por tanto

$$\Delta P_2 = P_o - P_{om} = P_o\left[1 - e^{-2\mu\ell_c\left(\frac{\alpha}{\ell} + k\right)}\right] \qquad [29.19]$$

(ℓ_c, ℓ y k en m, m y m^{-1}, respectivamente).

Por tanto [29.16] puede escribirse

$$\delta_c = \frac{P_o\ \ell_c}{2A_p E_p}\left[1 - e^{-2\mu\ell_c\left(\frac{\alpha}{\ell} + k\right)}\right]$$

Utilizando el desarrollo en serie de McLAURIN de e[1].

$$e^{-2\mu\ell_c\left(\frac{\alpha}{\ell} + k\right)} \approx 1 - 2\mu\ell_c\left(\frac{\alpha}{\ell} + k\right)$$

y sustituyendo

$$\delta_c = \frac{\mu P_o\ \ell_c^2}{A_p E_p}\left(\frac{\alpha}{\ell} + k\right) \qquad [29.20]$$

de donde

$$\ell_c = \sqrt{\frac{1000\delta_c A_p \cdot E_p}{P_o\mu\left(\frac{\alpha}{\ell} + k\right)}} \qquad [29.21]$$

(El coeficiente 1000 del numerador permite introducir k y ℓ en m en la fórmula tal como es habitual. El resto de las unidades en N y mm. (ℓ_c en mm).

1 El desarrollo correspondiente es $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$

Debe prestarse atención a la relación del valor de ℓ_c con la longitud total del tendón y con los momentos flectores a lo largo de la luz. En la figura 29-6 se indican tres situaciones diferentes. Para ley simétrica de momentos respecto al punto medio de la luz, se tiene:

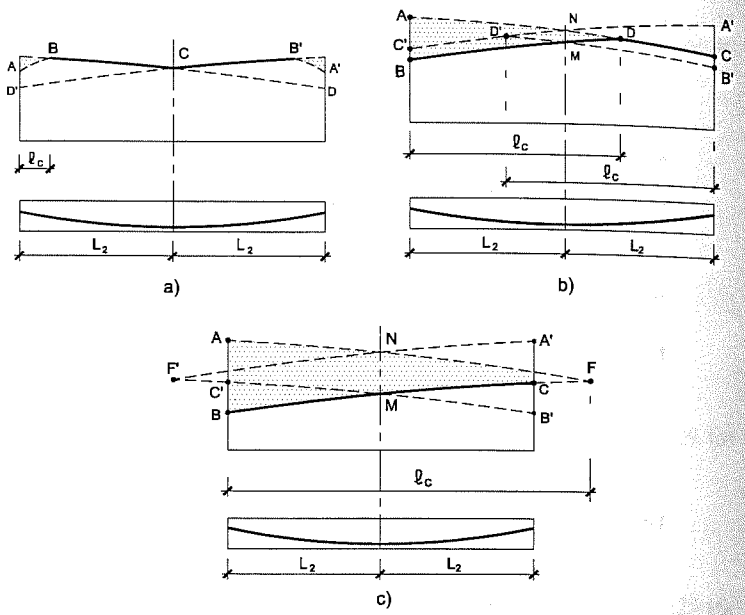


Figura 29-6

- Si $\ell_c \leq \ell / 2$ (Fig. 29-6a)), el procedimiento mejor es tesar el tendón desde ambos extremos para reducir al mínimo las pérdidas de fuerza. La curva de fuerzas es la *ABCB'A'*. (Si la pieza es simétrica en geometría y carga, esto no mejora la fuerza de pretensado en la sección central[1].

- Si $\ell \geq \ell_c > \ell / 2$ (Fig. 29-6b)), es mejor tesar el tendón desde un sólo extremo. La curva de fuerzas es en ese caso la curva *BDC*. Si se tesa también desde el extremo derecho sería la *BMB'*.

- Si $\ell_c > \ell$ (Fig. 29-6c)) de nuevo es mejor tesar desde un sólo extremo con lo que la curva será la *BC*. Si se tesa también desde el extremo derecho, sería la *BMB'*.

1 Dependiendo de los casos de carga, del coste del tesado en ambos extremos y de la necesidad de emplear anclajes activos en ambos extremos, en lugar de activo en uno y pasivo (más barato) en el otro, esta operación puede no presentar interés.

Tampoco debe olvidarse la posibilidad ya expuesta anteriormente de retesar para reducir pérdidas.

En cualquier caso, tal como se observa en la fig. 29-6, **la penetración de cuñas conduce a que la máxima fuerza de pretensado no se produzca en el tendón a la salida de su anclaje**, sino a una cierta distancia de éste.

Véase, como complemento, el caso particular expuesto en el ejemplo 29.1 en que se tesa la mitad de los cordones desde cada lado.

En los casos en que surgen desviaciones imprevistas en el rozamiento en las operaciones de pretensado en obra, puede resultar imposible alcanzar la pieza especificada de pretensado, con las tensiones máximas indicadas. Si el procedimiento de pretensado y las armaduras activas empleadas lo permiten, pueden emplearse tensiones iniciales mayores, siempre que no se exceda el valor $0{,}95\, f_{p0,1k}$, de acuerdo con las recomendaciones del MODEL CODE 90 siguientes:

Valores máximos de fuerza al tesar

Tesando desde un sólo extremo

$$\begin{cases} \beta \leq 0{,}28 & 0{,}9\, f_{p0,1k} \\ 0{,}28 < \beta \leq 0{,}40 & 0{,}8\, f_{p0,1k} \\ 0{,}40 < \beta \leq 0{,}60 & 0{,}75\, f_{p0,1k} \end{cases}$$

Tesando desde ambos extremos

$$\begin{cases} \beta \leq 0{,}55 & 0{,}9\, f_{p0,1k} \\ 0{,}55 < \beta \leq 0{,}80 & 0{,}8\, f_{p0,1k} \\ 0{,}80 < \beta \leq 1{,}20 & 0{,}75\, f_{p0,1k} \end{cases}$$

donde $\beta = \mu(\alpha + kx)$

Si tesando desde un extremo β se piensa que pueda resultar inferior a 0,60, o a 1,20 tesando desde ambos extremos, debe estudiarse en el proyecto la conveniencia de colocar vainas adicionales para eventualente colocar en ellas y tesar tendones adicionales.

c) Pérdida ΔP_3 debida al acortamiento elástico instantáneo del hormigón.

c-1) Caso de tendones rectos y anclados todos simultáneamente. De acuerdo con la fórmula general de la sección pretensada, la tensión en el hormigón a nivel del c.d.g. de la armadura activa, para $y = e_o$, resulta

$$\sigma_{cp,t} = \frac{A_p\, \sigma_{pt}}{A_{c,o}} \left[1 + \left(\frac{e_o}{r_o} \right)^2 \right] \quad [29.22]$$

1

1 Como ampliaremos en el Capítulo 31, para las características de la sección empleamos el subíndice o para la sección neta de hormigón, es decir la total menos el área ocupada por las vainas. Empleamos la notación ´ para la sección con vainas inyectadas con productos adherentes, es decir la total menos el área de la armadura y el subíndice *h* para la sección homogeneizada. (Área de hormigón más *m* veces la de la armadura o bien área total más (*m-1*) veces la de armadura).

En el caso de armaduras pretesas, designamos con el subíndice o la sección neta.

En [29.22] σ_{pt} es la tensión de la armadura después de transmitida la fuerza de pretensado al hormigón, y por lo tanto después del acortamiento elástico de éste.

Como el acortamiento (pérdida de alargamiento) de la armadura ha de ser igual al acortamiento del hormigón que la rodea, bajo la compresión [29.22], ello equivale a

$$\frac{\sigma_{pat} - \sigma_{pt}}{E_p} = \frac{\sigma_{cp,t}}{E'_{ci}} \qquad [29.23]$$

donde σ_{pat} es la tensión del tendón antes de anclarlo y E'_{ci} es el módulo elástico secante a la edad y con la humedad y temperatura correspondientes, al instante del tesado. (Adoptamos este valor para incluir el acortamiento por plasticidad instantánea, que se produce también bajo la acción del gato). (Ver 28.2.3).

Sustituyendo [29.22] en [29.23] y operando con $\frac{A_p}{A_c} = q$ y $\frac{E_p}{E'_{ci}} = m_p$

$$\sigma_{pt} = \frac{\sigma_{pat}}{1 + m_p\left[1 + \left(\frac{e_o}{r_o}\right)^2\right]}$$

y como

$$\Delta P_3 = A_p\left[\sigma_{pat} - \sigma_{pt}\right]$$

sustituyendo

$$\Delta P_3 = A_p\left[\frac{\sigma_{pat} \cdot m_p\left[1 + \left(\frac{e_o}{r_o}\right)^2\right]}{1 + m_p\left[1 + \left(\frac{e_o}{r_o}\right)^2\right]}\right] \quad [1] \qquad [29.24]$$

que puede expresarse como

$$\Delta P_3 = A_p \cdot \sigma_{pt} \cdot m_p\left[1 + \left(\frac{e_o}{r_o}\right)^2\right] = m_p A_p \cdot \sigma_{cp} \qquad [29.25]$$

1 Obsérvese que [29.24] es la fuerza que corresponde a la tensión del hormigón en el c.d.g. de la armadura activa, **después de ocurrido el acortamiento elástico**. EHE utiliza una expresión análoga, pero empleando la tensión en el c.d.g., **antes del acortamiento elástico**. La diferencia numérica es escasa, pero la conceptual es importante.

donde σ_{cp} es la tensión del hormigón en el c.d.g. de la armadura activa debida al pretensado.

Como $A_p \cdot \sigma_{pat} = P_2$

$$\Delta P_3 = P_2 \cdot \frac{m_p\left[1 + \left(\frac{e_o}{r_o}\right)^2\right]}{1 + m_p\left[1 + \left(\frac{e_o}{r_o}\right)^2\right]} \qquad [29.26]$$

y $P_3 = P_2 - \Delta P_3$

o bien

$$P_3 = \frac{P_2}{1 + m_p\left[1 + \left(\frac{e_o}{r_o}\right)^2\right]} \qquad [29.27]$$

c-2) Caso de tendones rectos tesados consecutivamente. En este caso, los acortamientos elásticos producidos al anclar un tendón, destesan en parte los anteriormente anclados.

Supongamos una fuerza de pretensado formada por *n* tendones, que se tesan consecutivamente.

De acuerdo con lo anterior, si la tensión inicial σ_{pat} es la misma para todos los tendones, la pérdida que tenemos producida en el tendón *j* ya anclado por el tesado de un tendón *k* cualquiera que se tesa posteriormente será

$$\Delta\sigma_{pjk} = \sigma_{pat} \cdot \frac{m_p}{n}\left(1 + \frac{e_{sj}\, e_{sk}}{r^2}\right) \quad [1]$$

La pérdida de tensión total en el tendón *j* producida por el tesado de todos los tendones posteriores, resulta

$$\Delta\sigma_{pj} = \sigma_{pat} \cdot \frac{m_p}{n}\left[\left(1 + \frac{e_{sj}\, e_{s(j+1)}}{r^2}\right) + \left(1 + \frac{e_{sj}\, e_{s(j+2)}}{r^2}\right) + \ldots + \left(1 + \frac{e_{sj}\, e_{sn}}{r^2}\right)\right]$$

1 Para no complicar las notaciones, en el resto de este apartado omitimos el subíndice *o* para las características de la sección neta.

o lo que es lo mismo

$$\Delta\sigma_p = \frac{\sigma_{pat}\, m_p}{n}\left[n - j + \frac{e_{sj}}{r^2}\left[\left(e_{s(j+1)} + e_{s(j+2)} + \ldots + e_{s(j+n)}\right)\right]\right] \qquad [29.28]$$

La **pérdida media de fuerza** en los n tendones, vale por tanto

$$\Delta P_3 = A_p\, \sigma_{pat}\, \frac{m_p}{n^2} \sum_{j=1}^{j=n} \left[n - j + \frac{e_{sj}}{r^2}\left[e_{s(j+1)} + e_{s(j+2)} + \ldots e_{sn}\right]\right]$$

Si todos los tendones además de ser rectos tienen la misma excentricidad, entonces $e_{sj} = e_s(j+1) \ldots = e_{sn}$, resulta

$$\Delta P_3 = A_p\, \sigma_{pat} \cdot m_p \left[1 + \left(\frac{e_s}{r}\right)^2\right] \cdot \frac{n-1}{2n} \qquad [29.29]$$

y como de acuerdo con [29.2]

$$\sigma_{pat}\, m_p \left[1 + \left(\frac{e_s}{r}\right)^2\right] \approx m\sigma_{cp}$$

donde σ_{cp} en la tensión en el hormigón a nivel del c.d.g. de la armadura activa se tiene en definitiva

$$\Delta P_3 = A_p m \cdot \sigma_{cp} \cdot \frac{n-1}{2n} \qquad [29.30]$$

que es la fórmula adoptada por EHE.

(Recuérdese la observación hecha en el apartado b) sobre el hecho de que EHE emplea la tensión en el c.d.g. antes del acortamiento elástico).

Si n es muy grande, [29.30], se aproxima a

$$\Delta P_3 = A_p \frac{m\, \sigma_{cp}}{2}$$

El valor de P_3 es por tanto

$$P_3 = P_2 - \Delta P_3 \qquad [29.31]$$

c-3) Caso de procesos de tesado de tendones rectos que producen asimetrías de fuerzas de pretensado respecto al plano medio de la pieza. Esta situación, que debe ser siempre cuidadosamente considerada al establecer el Plan de Tesado, sitúa a la pieza en flexión esviada. Se presenta cuando algunos de los tendones no sólo tienen excentricidad e_{sy} en la dirección y del plano medio de la pieza, sino también en la dirección perpendicular x.

En este caso, la expresión [29.28] si llamamos e_{sxi} a la excentricidad en dirección x y r_x al radio de giro de la sección respecto al eje y, se transforma en

$$\Delta\sigma_{sy} = \sigma_{pat} \cdot \frac{m_p}{n}\left[n - j + \frac{e_{sj}}{r^2} e_{s(j+1)} + e_{s(j+2)} + \ldots + e_{s(s+n)}\right] +$$

$$+ \frac{e_{sxj}}{r_x^2}\left[e_{sx(j+1)} + e_{sx(j+2)} + \ldots + e_{sx(j+n)}\right] \qquad [29.32]$$

y la pérdida media de fuerza en los n tendones, vale por tanto

$$\Delta P_3 = A_{sp} \cdot \sigma_{pat} \cdot \frac{m_p}{n^2} \sum_{j=1}^{j=n} \left[n - j + \frac{e_{sj}}{r^2}\left(e_{s(j+1)} + e_{s_{j+2}} + \ldots e_{s(j+n)}\right)\right] +$$

$$+ \frac{e_{sxj}}{r_x^2}\left[e_{sx(j+1)} + e_{sx(j+2)} + \ldots + e_{sx(j+n)}\right] \qquad [29.33]$$

c-4) Caso general. Tendones curvos tesados consecutivamente. En este caso de acuerdo con la expresión [29.28], de la pérdida de tensión en el tendón j producida por el tesado de todos los tendones posteriores, si despreciamos el rozamiento entre tendón y conducto (que puede ser estimado por los procedimientos ya vistos), el valor medio de la pérdida en el tendón j, al tesar posteriormente el tendón k, viene dado por

$$\Delta\sigma_{s,j,k,} = \frac{\sigma_{pat} m_p}{nL}\int_o^L \left(1 + \frac{e_{sj} \cdot e_{sk}}{r^2} dx\right) \qquad [29.34]$$

y operando

$$\Delta\sigma_{s,j,k,} = \sigma_{pat} \cdot \frac{m_p}{n}\left(1 + \frac{1}{r^2}\int_o^L e_{sj} \cdot e_{sk}\, dx\right) \qquad [29.35]$$

El valor medio de la pérdida en el tendón j vendrá dado por tanto

$$\Delta\sigma_{sj} = \sigma_{pat} \cdot \frac{m_p}{n} \cdot \left[n - j + \frac{1}{r^2}\int_o^L e_{sj}\left[e_{s(j+1)} + e_{s(j+2)} + \ldots + e_{sn}\right] dx\right] \qquad [29.36]$$

Con [29.36] se deduce inmediatamente la pérdida media de tensión en los cables curvos

$$\Delta P_3 = A_{sp}\,\sigma_{pat}\cdot\frac{m_p}{n^2}\sum_{j=1}^{j=n}\left[n-j+\frac{1}{r^2}\int_0^L e_{sj}\left[e_{s(j+1)}+e_{s(j+2)}+\ldots+e_{sj}\right]dx\right] \quad [29.37]$$

donde x es la distancia desde el extremo de tesado a cualquier punto del tendón y L la longitud de la proyección horizontal de la longitud del tendón.

Como en los casos anteriores

$$P_3 = P_2 - \Delta P_3 \quad [29.38]$$

(Si hay tendones rectos y curvos, el cálculo debe hacerse con [29.37] para todos ellos).

c-5) Aproximación práctica. En la práctica suele usarse la fórmula [29.30], que es la adoptada por EHE, como una aproximación aceptable y razonablemente simple. Para casos especiales las fórmulas expuestas permiten un cálculo más refinado de la pérdida de la fuerza de pretensado. Si el número de tendones y de niveles de colocación son muchos, el cálculo manual es muy trabajoso y se impone el uso de programas informáticos.

29.3.2 RECORRIDO DE TESADO EN ARMADURAS POSTESAS

Se define como tal el recorrido experimentado por el tendón bajo la fuerza de tracción aplicada sobre él por el gato, es decir antes de producirse la pérdida de fuerza debida a la penetración de cuñas. Normalmente en la operación de tesado de un tendón se realizan dos comprobaciones independientes: Una es la medición a través de la escala de medida del gato, de la fuerza aplicada al tendón. Esta es una operación simple, pero solamente da información sobre la fuerza de pretensado del tendón a poca distancia del extremo tesado. A partir de una cierta distancia, las pérdidas por rozamiento modifican apreciablemente esta fuerza, tal como ya hemos visto.

La segunda comprobación, más compleja, consiste en el control del recorrido de tesado.

Bajo la acción del gato, el recorrido de tesado viene expresado por

$$\Delta\ell = \frac{P_m\cdot\ell}{A_p\cdot E_p} \quad [29.39]$$

donde P_m es el valor medio de la fuerza de tesado a lo largo del tendón. Puede estimarse a partir del hecho de que este valor medio viene dado por la expresión

$$P_m = \frac{S(P)}{\ell_t} \quad [29.40]$$

donde

$S(P)$ es el área bajo la curva de la fuerza de pretensado a lo largo del tendón. (Ver figura 29-4).

ℓ_t es la longitud total del tendón.

EHE establece como tolerancia en el recorrido de tesado el valor de ±15% en cualquier tendón individual y del 5% para el conjunto de tendones correspondientes a cualquier sección de la pieza.

En relación con lo anterior debe considerarse que existen muchas fuentes de incertidumbre en la estimación del recorrido de tesado, tales como las siguientes:

- Los valores de μ y k indicados en 29.3.1 son valores indicativos solamente. La información fundada en ensayos independientes, procedente de los fabricantes de conductos y tendones es de importante consideración en cada caso.
- En [29.39], el valor de A_p debe corresponder al real que puede diferir del nominal de acuerdo con las tolerancias normalizadas.
- También en [29.39], el valor de E_p, debe ser el real y además debe pedirse al fabricante de los tendones, información experimental basada en ensayos independientes sobre la posible diferencia entre el valor E_p noval (primera aplicación de carga) y el repetitivo (posteriores aplicaciones de carga).

En todo caso, si el recorrido excede las tolerancias indicadas, tenidas en cuenta las consideraciones anteriores, una posible técnica de corrección es proceder a retesados tal como los que se indicaron en 29.3.1, para eliminar cualquier fuente accidental de problemas en el alargamiento del tendón.

Para más información, véase (29.2), (29.3) y (29.4).

29.3.3 PÉRDIDAS DIFERIDAS DE FUERZA.

Como ya se dijo, a continuación del anclaje de los tendones, y del acortamiento elástico instantáneo del hormigón, la retracción de éste y su fluencia bajo la acción del pretensado y de las otras acciones aplicadas producen acortamientos en la pieza, que a su vez originan pérdidas de alargamiento en el tendón y por lo tanto una reducción de la fuerza de pretensado.

Es importante distinguir lo siguiente:

- Para tendones adheridos, las pérdidas debidas a retracción y fluencia deben calcularse a partir de las deformaciones de la fibra de la sección de hormigón a nivel del tendón.
- Para tendones no adheridos la pérdida ha de calcularse a partir de la deformación general de la pieza.

Además de lo anterior debe considerarse la pérdida de tensión y por tanto de fuerza de pretensado, producida por la relajación de la armadura.

Como ya se dijo en 29.3.b), la interacción de la retracción y fluencia del hormigón, con la relajación de la armadura de pretensado, hace que el fenómeno sea muy complejo.

Una fórmula, frecuentemente utilizada, que proporciona la pérdida conjunta de fuerza, debida a los tres fenómenos mencionados es la siguiente: (Véase una versión preferible en [29.43] a continuación)

$$\Delta P_{dif} = A_p \frac{m_p \varphi_{(t,t_o)} \sigma_{cp} + E_p \varepsilon_{cs(t,t_o)} + 0{,}80 \Delta\sigma_{pr}}{1 + m_p \cdot q \left[1 + \left(\frac{e_o}{r_o}\right)^2\right]\left[1 + \chi \varphi_{(t,t_o)}\right]} \qquad [29.41]$$

donde:

$m_p = \dfrac{E_p}{E'_{ci}}$

e'_o = excentricidad del centro de gravedad de las armaduras activas respecto al centro de gravedad de la sección neta de hormigón (incluido el relleno de las vainas si es adherente) más las eventuales armaduras pasivas longitudinales.

$\Delta\sigma_{pr}$ = Pérdida de tensión debida a la relajación pura en la armadura. Puede estimarse mediante la expresión:

$$\Delta\sigma_{pr} = \rho_t \cdot \frac{P_o}{A_p} \qquad [29.42]$$

(ρ_t es la relajación pura a tiempo infinito y P_o el valor característico de la fuerza inicial de tesado).

q = cuantía geométrica de la armadura activa referida a la sección neta del hormigón.

r_o = radio de giro de la sección neta de hormigón más las eventuales armaduras pasivas longitudinales.

χ = coeficiente de envejecimiento que puede obtenerse en los gráficos GT-66 a GT-77.

$\varphi_{(t,to)}$ = coeficiente de fluencia, de acuerdo con 28.4.1, correspondiente a la humedad y temperatura corregidas, si ha lugar.

$\varepsilon_{cs(t,to)}$ = acortamiento de retracción, de acuerdo con 28.4.2, correspondiente a la humedad y temperatura corregidas, si ha lugar.

σ_{cp} = tensión en el hormigón a nivel del c.d.g. de las armaduras activas.

La fórmula [29.41] es, con una presentación ligeramente diferente, la adoptada por EHE y también por el EUROCÓDIGO EC-2.

Sin embargo, deben hacerse algunas consideraciones adicionales sobre ella:

- Es necesario en el cálculo de $\varphi_{(t,to)}$ y $\varepsilon_{cs(t,to)}$, introducir las correcciones debidas a los cambios de humedad y temperatura en el período considerado.

- La tensión σ_{cp} del hormigón a nivel del c.d.g. de las armaduras activas, **debe ser la debida al pretensado, peso propio si ha lugar y las acciones cuasipermanentes actuantes.**
- La estimación de la relación como 0,8 veces el valor [29.42], como pérdida por relajación es sólo una simplificación. Puede mejorarse a partir de los datos de relajación facilitados por el fabricante de las armaduras para distintas tensiones y diferentes temperaturas, todo ello tenida en cuenta la edad t_o de tesado.
- Tanto EHE como el EC-2 adoptan como valor del coeficiente χ de envejecimiento el de 0,8. Los gráficos GT-66 a GT-80 permiten una estimación más precisa. Están tomados del Manual del CEB (29.5) y fueron elaborados por R. FAVRE y sus colaboradores de la Universidad de Lausanne. De hecho figuran en su libro (29.6) en el que se desarrolla también la fórmula [29.41] . Estos gráficos permiten considerar el espesor medio de la pieza y la humedad.
- Es interesante expresar la fórmula [29.41] de esta manera, tal como se indica a continuación.

  De acuerdo con [29.25]

$$q\left[1 + \left(\frac{e_o}{r_o}\right)^2\right] = \frac{\sigma_{cp}}{\sigma_{pt}}$$

y por tanto [29.41] puede expresarse como

$$\Delta P_{dif} = A_p \frac{m_p \varphi(t,t_o)\sigma_{cp} + \sum_{i=j}^{n} \frac{E_p}{E'_{ci}} \cdot \Delta\sigma'_{cp,i} \varphi(t,t_i) + E_p \cdot \varepsilon_{cs}(t,t_o) + k\Delta\sigma_{pr}}{1 + m \frac{\sigma_{cp}}{\sigma_{pt}}\left[1 + \chi\varphi(t,t_o)\right]} \qquad [29.43]$$

donde σ_{cp} es la tensión en el hormigón a nivel del c.d.g. de las armaduras, debida a la acción del pretensado y σ'_{cp} la debida a las acciones exteriores cuasipermanentes (incluido el peso propio) actuantes.

Esta forma de expresión permite apreciar claramente, dentro de su carácter aproximado, el origen de la fórmula. El numerador proporciona debidamente la suma de las pérdidas de fuerza debidas a fluencia, retracción y relajación, incluso para variaciones de tensión en el c.d.g. de la armadura activa debidas a la aplicación de cargas que producen tensiones, $\sigma_{cp,i}$ en el instante i, pero sin corregir el efecto reductor de su interacción.

El denominador, a través del factor $\dfrac{m_p \sigma_{cp}}{\sigma_{pt}}$ que puede escribirse $\dfrac{\sigma_{cp}/E'_{ci}}{\sigma_{pt}/E_p} = \dfrac{\varepsilon_{c,t}}{\varepsilon_{p,t}}$

es la **relación de la deformación correspondiente al acortamiento elástico instantáneo del hormigón, a la deformación (alargamiento) que la armadura pretensada tiene en ese momento**. Valores bajos de esa relación (bajas compresiones de pretensado) corresponden a reducciones pequeñas de tensión de la armadura y a escasos acortamientos del hormigón debidos al

pretensado, con lo que el fenómeno de reducción por la interacción fluencia-retracción-relajación es despreciable. Valores altos (como suelen ser en la práctica) corresponden a fenómenos de reducción importantes. El factor $(1 + \chi\varphi(t,to))$ a través de los gráficos GT-66 a GT-80 permite tener en cuenta los efectos diferidos de la compresión σ_{cp}, a lo largo del tiempo, en función del espesor medio y humedad de la pieza.

El valor de σ_{cp} en el denominador es el debido exclusivamente a la fuerza de pretensado, sin considerar las otras acciones. Véase (29.6).

Obsérvese que la fórmula [29.43] permite tratar por separado en el numerador la edad de aplicación del pretensado y la de las restantes acciones. Tanto EC-2 como EHE dan por supuesto que las acciones se aplican todas a la vez que el pretensado, cosa que en general sólo ocurre con el peso propio.

Un tema no tratado y sumamente opinable es la aplicación de [29.43] cuando el resultado de las tensiones en el hormigón en el c.d.g. de la armadura activa, es negativo.

En lo que sigue, si la tensión es de compresión o de tracción sin rebasar la resistencia a flexotracción [28.6], introducimos la resultante de tensiones en cada período de aplicación con su signo. Si la tracción supera el límite indicado, el término correspondiente a este período se considera nulo.

EJEMPLO 29.1

Sea una viga de 26 m de longitud total, con sección transversal la de la figura, hormigón H-50, con cemento de alta resistencia y endurecimiento rápido, pretensada con armaduras postesas adherentes, cuyo trazado parabólico se indica en la figura 29-7. El pretensado se realiza a 10 días de edad, momento en el que la resistencia característica del hormigón es $f_{ck} = 32\ MPa$. Desde esa edad hasta su colocación definitiva a los 100 días de edad, la viga está en un ambiente de temperatura media 10ºC y HR=80%. Una vez colocada, la temperatura media será en adelante de 20ºC y la HR del 50%.

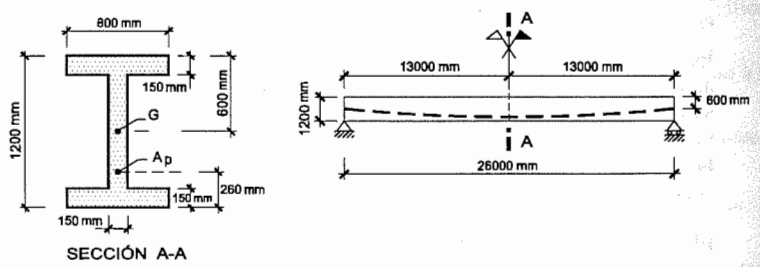


Figura 29-7

Los datos del pretensado son los siguientes:

Tendones. Formados por 2 tendones de 10 cordones cada uno Y 1770S7 de área 150 mm² de 16 mm de diámetro. Carga característica de rotura 265 kN (ver Tabla T-32.14) y módulo de elasticidad noval de 190.000 N/mm².

Tesados a 0,75 · 265 = 198,75 kN.

Para la relajación puede adoptarse la curva de la figura 32-20b) (Capítulo 32).

Excentricidad. $e = -336\ mm$

Vainas con inyección posterior. $\mu = 0{,}15$ $k = 0{,}008\ m^{-1}$

El sistema de pretensado presenta una penetración de cuñas de 3 mm.

Por razones constructivas cada tendón se tesa desde una extremidad.

La viga está destinada a soportar una carga básicamente de uso, con valor cuasipermanente despreciable.

SE PIDE:

a) Pérdidas instantáneas de fuerza en la sección central.

b) Tensiones en las fibras extremas de la sección central después del acortamiento elástico instantáneo.

c) Alargamiento de tesado de los tendones.

d) Pérdidas diferidas de fuerza en la sección central.

SOLUCIÓN:

Los valores propios de la sección neta son:

$I_o = 0{,}757 \cdot 10^{11}\ mm^4$

$W_{0,1} = W_{0,2} = 0{,}00126 \cdot 10^{11}\ mm^3$

$A_{c,o} = 375.000\ mm^2$

$r_o = 449$ mm

Peso propio: 9,375 kN/m

Llamemos P_o a la fuerza inicial de pretensado de un tendón.

a) Pérdidas instantáneas de fuerza en la sección central.

$$P_o = 10 \cdot 198{,}75 = 1.987{,}5\ kN \qquad \sigma_{po} = \frac{1.987{,}5 \cdot 10^3}{10 \cdot 150} = 1.325\ N/mm^2$$

a-1) Pérdida ΔP_1 debida al rozamiento en las vainas.

El ángulo de las tangentes en el extremo del tendón y en su punto medio es de 0,052 radianes. Con $\mu = 0{,}15$ y $k = 0{,}008\ m^{-1}$, asimilando la longitud de la mitad del tendón a 13,00 m, aplicando [29.9] se obtiene

$$\Delta P_1 = 1.987{,}5\left[1 - e^{-0{,}15(0{,}052+0{,}008\cdot 13)}\right]$$

resultando

$$\Delta P_1 = 0{,}023 \cdot 1.987{,}5 = 45{,}95\ kN \quad (2{,}3\%\ de\ P_o)$$

(Para la longitud total resulta $\Delta P_1 = 0{,}0457 \cdot 1.987{,}5 = 90{,}87\ kN$ 4,57% de P_o)

$$P_1 = 1.987{,}5 - 45{,}95 = 1.941{,}55\ kN$$

a-2) Pérdida ΔP_2 debida a la penetración de cuñas.

De acuerdo con [29.21] se obtiene:

$$\ell_c = \sqrt{\frac{1.000 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 150 \cdot 190.000}{1.987{,}5 \cdot 10^3 \cdot 0{,}15\left(\frac{0{,}052}{13} + 0{,}008\right)}} = 15.459\ mm$$

$$\ell_c = 15{,}46\ m$$

De acuerdo con [29.19], en la sección central

$$\Delta P_2 = 1.987{,}5\left[1 - e^{-2\cdot 0{,}15\cdot 15{,}46\left(\frac{0{,}052}{13} + 0{,}008\right)}\right]$$

(Pérdida en el extremo de tesado)

resultando

$$\Delta P_2 = 0{,}0542 \cdot 1.987{,}5 = 107{,}72\ kN \quad (5{,}42\%\ de\ P_o)$$

Como se tesa un tendón desde cada extremo resultan, después de la penetración de cuñas, las fuerzas indicadas en la figura 29-8.

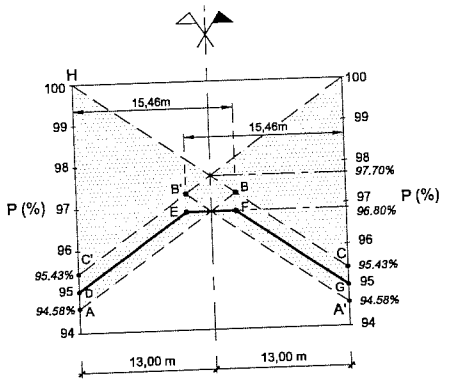


Figura 29-8

Haciéndolo así, *ABC* es la línea de fuerzas de los 10 tendones tesados desde el extremo izquierdo y *A'B'C'* la de los tesados desde el extremo derecho. La línea de fuerzas medias es por tanto la *DEFG*.

La fuerza de pretensado en la sección central vale de acuerdo con la figura 29-8, es

$$P_2 = 0{,}968 \cdot 2 \cdot P_0 = 0{,}968 \cdot 3.975 = 3.848\ kN,$$

es decir que en ella $2(\Delta P_1 + \Delta P_2) = 127\ kN$ (3,2% de P_o).

a-3) Pérdida ΔP_3 debida al acortamiento elástico instantáneo del hormigón.

De acuerdo con [29.30], (se supone que los tendones de cada lado se anclan simultáneamente),

$$\Delta P_3 = 3.848 \cdot \frac{m_p\left[1 + \left(\frac{e_o}{r_o}\right)^2\right]}{1 + m_p\left[1 + \left(\frac{e_o}{r_o}\right)^2\right]} \cdot \frac{2-1}{2 \cdot 2}$$

Con $E'_{ci} = 8.500(32 + 8)^{1/3} = 29.070\ N/mm^2$

$$m = \frac{190.000}{29.070} = 6{,}53$$

$$q = \frac{20 \cdot 150}{375.000} = 0{,}008$$

$$\frac{e_o^2}{r_o^2} = \frac{336^2}{449^2} = 0{,}56$$

resultando

$\Delta P_3 = 78{,}0\ kN$ $\quad$ (1,96% *de* P_o)

$P_3 = 3.848 - 78{,}0 = 3.770\ kN$

b) Tensiones en las fibras extremas después del acortamiento elástico instantáneo.

Se supone que los 10 tendones que se tesan desde cada extremo, se tesan simultáneamente. Se aplica por tanto la fórmula [29.30]. De [29.25]

$$\sigma_{cp} = \sigma_{pt} \cdot q \left(1 + \frac{e_o \cdot y_o}{r_o^2}\right)$$

$$\sigma_{pt} = \frac{3.770 \cdot 10^3}{20 \cdot 150} = 1.256\ N/mm^2$$

y por tanto las tensiones en los pilares inferior y superior respectivamente, son

$$\sigma_{cp,1} = 1.256 \cdot 0{,}008 \left(1 + \frac{336 \cdot 600}{449^2}\right) = 20{,}1\ N/mm^2$$

$$\sigma_{cp,2} = 0$$

En el c.d.g. de la armadura

$$\sigma_{cp} = 1.256 \cdot 0{,}008 \left(1 + \frac{336^2}{449^2}\right) = 15{,}7\ N/mm^2$$

Además de esto, actúa en la sección central el momento flector del peso propio

$$M = \frac{1}{8} \cdot 9{,}375 \cdot 26^2 = 792{,}2\ mkN$$

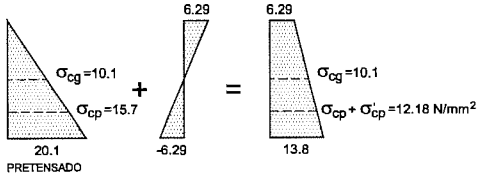
que produce en las fibras extremas las tensiones, con

$$W'_{0,1} = W'_{0,2} = 0{,}00126 \cdot 10^{11}\ mm^3$$

$$\sigma_c = \pm \frac{792.200.000}{126.000.000} = \pm 6{,}29\ N/mm^2$$ [1]

En el c.d.g de la armadura

$$\sigma'_{cp} = -\frac{792.200.000 \cdot 336}{75.700.000.000} = -3{,}52\ N/mm^2$$



TENSIONES EN LA SECCIÓN CENTRAL (N/mm²) BAJO PRETENSADO Y PESO PROPIO

Figura 29-9

c) Alargamiento de tesado de los tendones.

De acuerdo con [29.39] y [29.40], considerando la línea *HBC* (Fig. 29-8) de los tendones tesados desde el extremo izquierdo.

$$S(P) = \frac{0{,}9543 + 1}{2} \cdot P_o \cdot 26$$

y con $P_o = 1.987{,}5\ kN$

$$S(P) = 50.494\ mkN$$

y de acuerdo con [29.39]

$$\Delta\ell = \frac{50 \cdot 494.000.000}{10 \cdot 150 \cdot 190.000} \cdot 26.000 = 177\ mm$$

d) Pérdidas diferidas de fuerza

Emplearemos la fórmula [29.43], aplicándola por separado a los períodos:

- Desde el tesado ($t = 10$ días) hasta la colocación en obra ($t = 100$ días).

1 No es realmente correcto emplear, como hacemos, sino que para las acciones exteriores, incluso claro está el peso propio, debería emplearse el homogeneizado, como veremos en el Capítulo 30. Lo hacemos así en este capítulo por simplificar la exposición.

- Desde los 100 días hasta plazo infinito.

d-1) Pérdidas diferidas desde el tesado a la colocación en obra. Temperatura 10ºC y HR 80%.

- Cálculo de φ (100,10)

$$E'_{c,i}\,(10) = 8.500(32+8)^{1/3} = 29.070\ N/mm^2$$

$E'_{c,i} = 8.500(32+8)^{1/3} = 32.902\ N/mm^2$ (Valor a 28 días, en el que se basa la formulación).

El valor del espesor ficticio e_f es

$$e_f = \frac{2 \cdot 375.000}{5.300} = 141mm$$

Para 10 días, $t_T = 10 \cdot e^{-\left[\frac{4.000}{273+10} - 13,65\right]} = 6,2$ días

Dado el tipo de cemento, de acuerdo con [28.29] y $\alpha = 1$, la edad de tesado, corregida la temperatura, es

$$t_o = 6,2\left[\frac{9}{2+(6,2)^{1,2}} + 1\right] = 11 \text{ días}$$

Durante el período hasta la edad de 100 días, la temperatura es de 10ºC en lugar de los 20ºC de las fórmulas generales y la HR del 80%. De acuerdo con [28.30]

$$\beta_{H,T} = \beta_H \cdot \beta_T$$

$$\beta_H = 150\left\{1 + \left[1,2 \cdot \frac{80}{100}\right]^{18}\right\}\frac{141}{100} + 250 = 563$$

$$\beta_T = e^{\left[\frac{1.500}{273+10} - 5,12\right]} = 1,20$$

y además con

$$\beta_{H,T} = 563 \cdot 1,20 = 676$$

$$\phi_{HR} = 1 + \frac{100-80}{9,9 \cdot 141^{1/3}} = 1,39$$

$$\phi_{HR,10} = e^{0,015(10-20)} + (1,39-1)e^{0,015(10-20)^{1,2}}$$

$$\phi_{HR,10} = 1,36$$

De acuerdo con [28.23]

$$\phi_o = \phi_{HR,10} \cdot \frac{16,8}{\sqrt{50+8}} \cdot \frac{1}{0,1+11^{0,2}} = 1,75$$

y según [28.27]

$$\beta_c(100,11) = \left[\frac{100-11}{563+100-11}\right]^{0,3} = 0,55$$

Por tanto

$$\phi_{(t,to)} = \phi(100,11) = 1,75 \cdot 0,55 = 0,96$$

y según [28.20], teniendo en cuenta que $\sigma_{cg} = 10,1\ N/mm^2$ (Fig. 29-9)

$$\varepsilon_{c\varphi}(100,11) = 10,1\left[\frac{1}{29.070} + \frac{0,96}{32.902}\right] = 0,00064$$

- Cálculo de $\varepsilon_{cs}(100,10)$

Como la temperatura es diferente de 20ºC, con [28.40] se calcula

$$\alpha_{rT} = 0,0350\,[141]^2 e^{-0,06(10-20)} = 1.268$$

y con ello

$$\beta_s(100\text{–}10) = \left[\frac{100-10}{1.268+100-10}\right]^{0,5} = 0,257$$

$$\varepsilon_{cs} = \left[160 + 10 \cdot 8\left(9 - \frac{58}{10}\right)\right] \cdot 10^{-6} = 416,10^{-6}$$

$$\beta_{HR,T} = -155\left[1 - \left(\frac{80}{100}\right)^3\right] \cdot \left[1 + \left(\frac{8}{103-8}\right)\left(\frac{10-20}{40}\right)\right] = -0,691$$

$$\varepsilon_{cs,o} = 416 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}691 = 287 \cdot 10^{-6}$$

y por tanto

$$\varepsilon_{c,s}\,(100,\,10) = 287 \cdot 10^{-6} \cdot \left[\frac{100 - 10}{1.268 + 100 - 10}\right]^{0,5} = 0{,}000074$$

- Cálculo de $k\Delta\sigma_{pr}$

De acuerdo con la figura 32-20 b) y extrapolando para 10ºC

$$\Delta\sigma_{pr90\ días} = 0{,}8\%$$

y con $\sigma_{po} = 1.325\ N/mm^2$

$$\Delta\sigma_{pr90\ días} = 10{,}6\ N/mm^2$$

Adoptamos $k = 0{,}8$

- Cálculo de $\chi\varphi\,(100,\,10)$

En los ábacos GT-67 y GT-68, con $HR \approx 90\%$, $\varphi_{fl} \approx 1$ y $e_f = 141\ mm$ se obtiene

En GT-67 $\qquad \chi_{100} = 0{,}80$

En GT-68 $\qquad \chi_{100} = 0{,}80$

$\chi = 0{,}80$

- Aplicando [29.43]

Con $m = \dfrac{190.000}{32.902} \approx 6$, $\sigma_{cp} = 15{,}7\ N/mm^2$ y $\sigma_{cp} + \sigma'_{cp} = 12{,}18\ N/mm^2$ (Figura 29-9), se tiene

$$\Delta P_{dif(100,\,10)} = 20 \cdot 150\,\frac{6 \cdot 12{,}18 \cdot 0{,}96 + 190.000 \cdot 0{,}000074 + 10{,}6 \cdot 0{,}8}{1 + \dfrac{6 \cdot 15{,}7}{1.256}[1 + 0{,}80 \cdot 0{,}96]}$$

$$\Delta P_{dif(100,\,10)} = 245{,}5kN$$

$$\Delta P_{dif(100,\,10)} = 6{,}2\%\ \text{de}\ P_o$$

El valor de la fuerza P es por tanto:

$$3770 - 245{,}5 = 3.524{,}5\ kN$$

y la tensión de la armadura:

$$\sigma_P = \frac{3.524.500}{20 \cdot 150} = 1175\ N/mm^2$$

En los cálculos anteriores, se ha supuesto que la deformación de fluencia al nivel del c.d.g. de las armaduras activas era la existente a continuación del acortamiento elástico instantáneo, derivada de una tensión correspondiente σ_{pt} de las armaduras en este instante. De hecho, la tensión se reduce al irse produciendo las pérdidas diferidas. Cabe realizar un proceso de iteración para ajustar el problema, pero a nuestro juicio ello no es concordante con la estructura de la fórmula [29.43], puramente estimativa. Una discusión interesante puede verse en CHAUSSIN (29.7).

d-2) Pérdidas diferidas desde la colocación en la obra (t=100 días) hasta plazo infinito. (HR = 50%)

- Cálculo de $\varphi\,(\infty,\,100)$

Veamos en primer lugar el efecto "instantáneo" del cambio de temperatura (Fórmula [28.34]).

$$\Delta\phi_{AT;trans} = 0{,}0004\,(10 - 20)^2 = 0{,}04$$

y el valor total

$$\phi\,(\infty,\,100) = \phi_o \cdot \beta_c\,(t - to) + 0{,}04$$

donde $\phi_o = \phi_{HR}\,\beta(f_{cm}) \cdot \beta(t_o)$

$$\phi_{HR} = 1 + \frac{100 - 50}{9{,}9 \cdot 141^{1/3}} = 1{,}97$$

$$\beta(f_{cm}) = \frac{16{,}8}{\sqrt{58}} = 2{,}21$$

$$\beta_H = 150\left[1 + \left(1{,}2\,\frac{50}{100}\right)^{18}\right]\frac{141}{100} + 250 = 461$$

$$\beta(t_o) = \frac{1}{0{,}1 + 11^{0{,}2}} = 0{,}58$$

luego

$$\phi_o = 2{,}52$$

y por tanto

$$\phi\,(\infty,\ 100) = 2{,}52 \cdot \left[\ \beta_c\,(\infty - t_o) - \beta_c(100 - t_o)\right] + \Delta\phi_{\ \Delta T,\ trans}$$

y sustituyendo

$$\phi\,(\infty,\ 100) = 2{,}52 \cdot \left[\ 1 - \left(\frac{100 - 11}{461 + 100 - 11}\right)^{0{,}3}\right] + 0{,}04 = 1{,}10$$

- Cálculo de $\varepsilon_{cs}\ (\infty,\ 100)$

$$\varepsilon_s\,(f_{cm}) = 416 \cdot 10^{-6}$$

$$\beta_{HR} = -1{,}55\left[\ 1 - \left(\frac{50}{100}\right)^3\right] = -1{,}36$$

$$\varepsilon_{cs,o} = 416 \cdot 10^{-6} \cdot (-1{,}36) = -0{,}00057$$

$$\varepsilon_{cs}\,(\infty,\ 100) = \varepsilon_{cs,o}\left[1 - \beta_s(100 - 10)\right]$$

Por tanto

$$\varepsilon_{cs}\,(\infty - 100) = -0{,}00057\left[\ 1 - \left(\frac{100 - 11}{0.035 \cdot 141^2 + 100 - 10}\right)^{0{,}5}\right] = -0{,}000377$$

- Cálculo de $k\Delta\sigma_{pr}$

De acuerdo con la figura 32-20 b) (T = 20°C)

σ_{pr} para $t = \infty$ (10.000 *horas*) = 1,7%

σ_{pr} para t = 100 *días* (2.400 *h*) = 1,3%

$\Delta\sigma_{pr}$ = 0,4% de σ_{po} y con σ_{po} = 1.325 *N/mm*^{2}

$\Delta\sigma_{pr(\infty,100)}$ = 5,3 *N/mm*^{2}

Adoptamos k = 0,8

- Cálculo de $\chi\varphi(\infty,\ 100)$

Interpolando en los ábacos GT-77 y GT-78 con *HR=50%* ($\varphi_{fl} \approx 3$) y e_f = 141 mm se obtiene para t = *10.000* días en la curva correspondiente a t_o = *10* días.

En GT-77 $\chi_{10.000} = 0{,}71$

En GT-78 $\chi_{10.000} = 0{,}72$

$\chi_{10.000} = 0{,}72$

- Aplicando [29.43]

Con m= 6, $\sigma_{cp} = 15{,}7$ *N/mm*^{2}, $\sigma_{cp} + \sigma'_{cp} = 15{,}7 \cdot \frac{1183}{1256} - 3{,}52 = 11{,}27$ *N/mm*^{2},

se tiene

$$\Delta P_{dif(\infty,\ 100)} = 20 \cdot 150\frac{6 \cdot 11{,}27 \cdot 1{,}10 + 190.000 \cdot 0{,}000377 + 5{,}3 \cdot 0{,}8}{1 + \frac{6 \cdot 15{,}7}{1.256}(1 + 0{,}72 \cdot 1{,}10)} = 397\ kN$$

La pérdida diferida total vale por tanto

$$\Delta P_{dif} = \Delta P_{dif(100,11)} + \Delta P_{dif(\infty,100)} = 642{,}5\ kN \qquad (16{,}2\%\ \text{de}\ P_o)$$

RESUMEN DE PÉRDIDAS EN LA SECCIÓN CENTRAL

	kN	**% de P_o**
- Rozamiento y penetración de cuñas	127	3,2
- Acortamiento elástico instantáneo	78	1,96
- Pérdidas diferidas	642,5	16,2
	847,5	21,4%

29.4 PÉRDIDAS DE LA FUERZA DE PRETENSADO CUANDO SE EMPLEAN ARMADURAS PRETESAS

También, en este caso, desde el momento en que se realiza el tesado de las armaduras en la mesa, la tensión de éstas va disminuyendo a lo largo del tiempo, reduciéndose por tanto la efectividad del pretensado.

Algunas de estas pérdidas son debidas al equipo y sistema de fabricación, otras son inherentes a las propias armaduras y otras son debidas a las deformaciones del

hormigón. El conjunto de las pérdidas oscila del 20 al 35% del pretensado inicial y es, por tanto, importante su cálculo correcto[1]. En el apartado 29.4.1 se indica un método general, en el 29.4.3 un método simplificado y en el 29.4.4 un método para tanteos. Más adelante, se indica el campo de aplicación de cada uno de ellos.

De acuerdo con el proceso general de fabricación que vimos en el Capítulo 27 y con los datos referentes a los materiales, expuestos en el Capítulo 28, es posible, antes de entrar en el análisis de detalle, considerar el esquema del conjunto de las pérdidas de tensión, tal como se representa en el figura 29-10, que se refiere al caso más general en que se aplica calefacción.

Antes de seguir, conviene plantear aquí con claridad que los valores de las pérdidas, del orden del 20 al 35% de la tensión inicial, como hemos dicho, pueden parecer elevados, a quien no examine el tema con profundidad.

Valores mucho más reducidos que los que aquí se manejan, a la luz de los conocimientos actuales, sólo pueden ser obtenidos, bien falseando los cálculos o bien omitiendo el cálculo de determinados tipos de pérdidas.

Es obvio que el aspecto clave desde el punto de vista de una pieza es su cálculo a estados límite últimos, es decir, a rotura. Las pérdidas de tensión afectan, como veremos, muy poco a la seguridad a rotura, pero su influencia es grande en la fisuración y en las deformaciones, es decir, en el comportamiento en servicio. Una infravaloración de las pérdidas puede conducir a una corrosión por fisuración en servicio que obligue a una reparación muy costosa o a la demolición de la estructura.

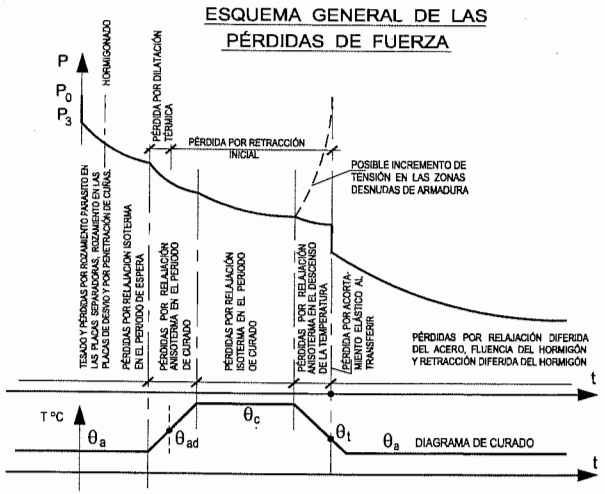


Figura 29-10

1 Las pérdidas en piezas pretensadas con armaduras pretesas son en general comparativamente mayores que cuando se emplean armaduras postesas. La razón fundamental es que la tensión suele transferirse a hormigones jóvenes lo que incrementa las pérdidas por acortamiento elástico y fluencia. También las pérdidas por retracción suelen ser mayores. A todo ello se suman las producidas por el sistema de calefacción y la mayor relajación de las armaduras debido a esos incrementos de temperatura

En años ya pasados, algunas personas adquirieron la equivocada experiencia de que falseando las pérdidas, reduciéndolas hasta valores inadmisiblemente bajos, no pasaba nada. Esta falsa experiencia estaba generalmente originada en dos consideraciones erróneas. Una era que en esos cálculos si bien se estimaban mal las pérdidas, del lado de la inseguridad, era frecuente que también se calculasen mal las condiciones de fisuración (y otras), del lado de una seguridad excesiva, lo cual se compensaba. Otra consideración errónea era que en muchos casos esas piezas no estaban sometidas realmente a su carga de servicio, por lo que no podía formarse, con un mínimo de rigor, una opinión fundada de su verdadero comportamiento en tales circunstancias.

En lo que sigue se desarrollan como hemos dicho, tres métodos, uno general, otro simplificado y otro para tanteos. Queremos subrayar el interés conceptual del estudio del método general para analizar con claridad el proceso de pérdidas de tensión, con independencia de los valores numéricos de éstas.

Entendemos que los campos de aplicación de los tres métodos pueden diferenciarse de acuerdo con lo siguiente:

a) MÉTODO GENERAL

Aparte del interés conceptual señalado, es a nuestro juicio el indicado para el cálculo de colecciones standard de piezas, que habrán de fabricarse un número muy elevado de veces y en las que cualquier afinamiento de cálculo conduce a ahorros globales importantes.

b) MÉTODO SIMPLIFICADO

Parece el apropiado para el cálculo de piezas importantes de las que han de producirse un número reducido de unidades, lo que no justificaría el coste del estudio detallado que el Método General supone.

c) MÉTODO PARA TANTEOS

Es de aplicación para cálculos de piezas de mediana o poca importancia estructural de las que no se va a construir un número importante de unidades. Desde el punto de vista exclusivamente técnico, puede aplicarse a cualquier caso, como veremos más adelante.

29.4.1 METODO GENERAL. PÉRDIDAS DE LA FUERZA DE PRETENSADO CUANDO SE APLICA CALEFACCIÓN

29.4.1.1 Pérdidas de fuerza de pretensado hasta la trasferencia

a) Pérdida ΔP_1 por rozamiento parásito en las placas separadoras y defectos de alineación de moldes a lo largo de la viga[1].

1 La numeración de las pérdidas no es, porque no puede serlo, la misma en el caso de armaduras postesas y pretesas.

Esta pérdida puede no existir, si no existen las placas o los moldes. En caso de existir, es variable según la composición del programa de producción a lo largo de la mesa.

El fabricante puede determinar el valor adecuado midiendo la fuerza en el anclaje opuesto al extremo de tesado.

b) Pérdida ΔP_2 por rozamiento en las placas extremas de desvío. (Ver Capítulo 28)

Análogamente, esta pérdida puede no existir si el proceso de fabricación no emplea placas de desvío.

Si existen, el fabricante puede determinarlas intercalando dinamómetros antes y después de las placas.

c) Pérdida ΔP_3 por deslizamiento de las cuñas de anclaje

Una vez tesadas las armaduras, al reducir la presión en el gato se produce el anclaje de las mismas mediante cuñas, tal como vimos en el caso de armaduras postesas. Siendo δ el deslizamiento en mm de las cuñas hasta el anclaje de las armaduras y L la longitud en m entre ambas cabezas de tesado, (longitud de mesa), la pérdida de fuerza de pretensado en N vale:

$$\Delta P_3 = \frac{\delta}{1.000\ L} E_p A_p \qquad [29.44]$$

siendo E_p el módulo de elasticidad de las armaduras en N/mm^2, A_p la sección total de armaduras activas en mm^2 y L la longitud de mesa en m.

El valor δ es un dato propio de cada sistema de anclaje y debe ser justificado por su fabricante. Obsérvese que nada más produce pérdida la penetración de cuñas en la cabeza de tesado, pues, la penetración idéntica que se produce en la cabeza opuesta sucede bajo la fuerza del gato y, por lo tanto, antes de anclar la armadura.

La pérdida ΔP_3 es tanto menor cuando mayor sea la longitud de la mesa de pretensado[1].

Si la tensión del tesado es superior al límite de proporcionalidad, la fórmula [29.45] no es válida y debe calcularse ΔP_3 a partir del diagrama del acero.

d) Pérdida ΔP_4 por relajación isoterma a temperatura ambiente durante el tiempo de espera.

La armadura con fuerza $P_o - \Delta P_1 - \Delta P_2 - \Delta P_3 = P_3$, está en esas condiciones durante un plazo que depende del programa de fabricación. Si se utiliza curado al vapor, este período suele ser como máximo de 3 h. La relajación

1 En rigor puede haber una segunda causa de pérdida de fuerza, si no se anclan todas las armaduras a la vez. En ese caso los acortamientos producidos por los tesados posteriores acortan la mesa y destesan en parte las armaduras ancladas anteriormente. La importancia práctica de esta pérdida es despreciable en las mesas normales.

correspondiente es un dato que debe ser obtenido experimentalmente por el fabricante de las armaduras. En el caso de la fig. 32-20 b) esa pérdida resultaría muy pequeña, del orden:

$$\Delta P_4 = 0{,}003 P_3 \qquad [29.45]$$

No debe olvidarse, sin embargo, que los datos de la figura 32-20 b) se refieren a una armadura particular de muy baja relajación. Los valores reales deben ser investigados para cada tipo concreto de armadura.

e) Pérdida ΔP_5 por relajación anisoterma durante el período de calentamiento.

Durante este período ocurren dos fenómenos que producen pérdidas. Por un lado, al elevarse la temperatura sobre la que tenían las armaduras en el momento de su tesado y anclaje en las cabezas, éstas se alargan y pierden tensión. La magnitud de esta pérdida depende en gran medida de la adherencia que exista a lo largo de ese período entre el hormigón y las armaduras. La pérdida por este calentamiento y posterior enfriamiento se calculará en el apartado h), y la llamaremos pérdida por dilatación térmica.

El segundo fenómeno que ocurre en este período es la relajación de la armadura, a una temperatura variable al mismo tiempo que hemos visto va reduciendo también su tensión debida a la dilatación térmica.

Llamaremos ΔP_5 a la pérdida por relajación en este período. (Volveremos sobre ella más adelante).

f) Pérdida ΔP_6 por relajación isoterma durante el período de tratamiento a temperatura uniforme θ_c.

Ha de ser calculada en base a los datos de ensayos disponibles. En el caso particular de la figura 32-21 y para una temperatura $\theta_c \approx 80°C$ y duración de cuatro o cinco horas, resultaría:

$$\Delta P_6 = 0{,}02 \left[P_o - \sum_1^5 \Delta P_i \right]^{1} \qquad [29.46]$$

g) Pérdida ΔP_7 por retracción inicial del hormigón.

Desde que se vierte el hormigón hasta que se ha alcanzado la temperatura θ_c a la que se va a realizar la transferencia, se ha producido también una cierta pérdida de tensión debida a la retracción inicial del hormigón, desde que empieza a existir adherencia con la armadura hasta que se realiza la transferencia. Como por una parte este tiempo es de unas pocas horas y por otra se suele mantener un curado húmedo intenso, esta pérdida es prácticamente despreciable.

1 Realmente la pérdida sería algo menor, pues en este momento se ha producido ya una dilatación importante de la armadura. Si se desea una mayor precisión, puede calcularse la pérdida que ello representa, ΔP_6, según el apartado h), e incluirla aquí como un sumando más dentro del paréntesis.

Sin embargo, en casos de procesos especiales de fabricación, sobre todo en piezas delgadas, transferencias a largo plazo y curados poco cuidadosos, puede tener importancia.

Su cálculo se desarrolla de acuerdo con lo explicado en el apartado 28.4.2. Llamando $\varepsilon_{cs,i}$ a la retracción inicial, es decir, la producida antes de la transferencia:

$$\varepsilon_{cs,i}(t,to) = \varepsilon_{cs,o} \cdot \beta_s (t - t_1) \qquad [29.47]$$

Cuando se realiza curado al vapor, $\varepsilon_{cs,o}$, de acuerdo con la tabla T-28.1 puede considerarse como el correspondiente a atmósfera muy húmeda. En cuanto al valor de β_s en sentido estricto no puede obtenerse a partir de [28.39] ya que ésta no ha sido construida para hormigón sometido a un sistema de calefacción ni abarca tiempos inferiores a un día. Nuestra opinión es que, en ausencia de determinaciones experimentales directas, se tome el valor β_s de dicha fórmula para $t=1$ día, cuando se aplique un ciclo normal de vapor. Si no se aplica calefacción, sino que la transferencia se realiza a dos o tres días, el valor de β_s será por supuesto el correspondiente de la fórmula [28.39] y el de $\varepsilon_{cs,o}$ el que corresponda según el tipo de curado.

La pérdida resulta:

$$\Delta P_7 = \varepsilon_{cs,t} A_p E_p \qquad [29.48]$$

h) Pérdida ΔP_8 de la fuerza de pretensado debida a la dilatación térmica hasta el momento de la transferencia.

En este momento el hormigón tiene una resistencia importante (habitualmente de 20 a 30 MPa como mínimo) y la adherencia entre hormigón y armadura se ha desarrollado prácticamente por completo.

El esquema de la mesa de fabricación se presenta en la figura 29-11 en la que se suponen piezas de luz 2ℓ, distancia entre separadores $2b$ y b entre cabezas de anclajes y primer separador[1].

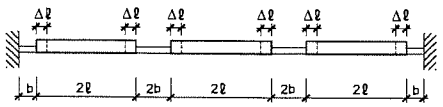


Figura 29-11

En la figura 29-12 se representan las extremidades de dos piezas y el correspondiente trozo de armadura entre separadores.

1 El cálculo que se desarrolla a continuación ha de ser adaptado a las particularidades de cada mesa de fabricación, como veremos más adelante.

Llamemos σ_{pe} al valor:

$$\sigma_{pe} = \sigma_{pi} - \frac{1}{A_p}\left[\Delta P_1 + \Delta P_2 + \Delta P_3 + \Delta P_4 + \Delta P_5 + \Delta P_6 + \Delta P_7 + \Delta P_9\right] \qquad [29.49]$$

es decir, la tensión inicial de tesado menos todas las pérdidas producidas hasta el momento antes de la transferencia con exclusión de las debidas a la dilatación térmica[1].

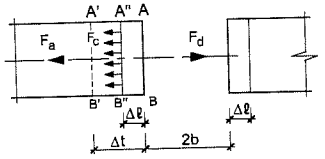


Figura 29-12

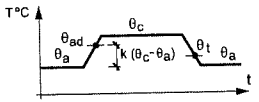


Figura 29-13

Sea el esquema de tratamiento térmico el de la figura 29-13. Supongamos que la adherencia se crease de una manera instantánea a una temperatura θ_{ad} siendo 2ℓ y $2b$ las longitudes en el momento de crearse la adherencia.

Llamemos

$$K = \frac{\theta_{ad} - \theta_a}{\theta_c - \theta_a} \qquad [29.50]$$

Consideremos el caso habitual en el que $\theta_{ad} > \theta_t \left(K > \frac{\theta_t - \theta_a}{\theta_c - \theta_a}\right)$. En este caso, al aplicar la calefacción ocurren los fenómenos siguientes:

En las zonas de armaduras desnudas, (o sea, entre separadores), se produce primero una dilatación unitaria durante la subida de temperatura, de valor $\alpha[\theta_c - \theta_a]$[2] y después un acortamiento unitario durante el enfriamiento hasta la transferencia de valor $\alpha(\theta_c - \theta_t)$ lo que en definitiva origina un alargamiento unitario de valor $\alpha(\theta_t - \theta_a)$, que supondrá una reducción de tensión en la armadura en esas zonas desnudas.

En las zonas de las armaduras adheridas se produce una dilatación unitaria $\alpha(\theta_{ad} - \theta_a)$, antes de crearse la adherencia, que entraña una pérdida de tensión.

1 En sentido estricto las pérdidas, ΔP_5, ΔP_6, ΔP_7 y la , ΔP_9 (que se analiza a continuación) suceden simultáneamente con la pérdida debida a la dilatación térmica producida por la calefacción. La simplificación del texto es razonable. obsérvese también que englobamos dentro de las pérdidas ΔP_8 debida a la temperatura, sólo las debidas a variaciones de longitud de origen térmico y no las debidas al aumento de relajación producido por el incremento de temperatura que se recogen en ΔP_5,ΔP_6 y ΔP_9.

2 α es el coeficiente de dilatación térmica de hormigón y acero. Tomaremos $\alpha = 10^{-5}$.

Los sucesivos cambios de temperatura de θ_{ad} a θ_c y θ_c a θ_t, estando ya adheridos el hormigón y la armadura, *producen variaciones dimensionales, pero no tensionales en la pieza.*

El enfriamiento de la pieza pretensada produce un acortamiento de ésta, parcialmente impedido por la armadura desnuda, con lo que aparecen tracciones en el hormigón. Considerando el equilibrio de la rebanada *A'B'B"A"* de la figura 29-12 tenemos las siguientes fuerzas en equilibrio, siendo $2\Delta\ell$ el acortamiento de cada pieza de longitud 2ℓ.

- Fuerza ejercida por la armadura desnuda:

$$F_d = A_p \left[\sigma_{pe} - \alpha E_p (\theta_t - \theta_a) + \frac{\Delta\ell}{b} E_p \right] \qquad [29.51]$$

- Fuerza ejercida por la armadura adherida:

La pérdida de tensión por el calentamiento antes de la formación de la adherencia vale

$$\alpha E_p (\theta_{ad} - \theta_a)$$

El acortamiento térmico que hubiera experimentado la pieza si se hubieran cortado ya las armaduras sería Δ_t (Fig. 29-12), siendo:

$$\Delta_t = \alpha(\theta_{ad} - \theta_t)\ell$$

El acortamiento está parcialmente impedido por la presencia de la armadura que aún no se ha destesado, de forma que solamente se produce un acortamiento $\Delta\ell$ de la pieza con lo que la armadura adherida ha experimentado un alargamiento $2(\Delta t - \Delta\ell)$[1].

La fuerza F_a en la armadura adherida resulta por tanto:

$$F_d = A_p \left[\sigma_{pe} - \alpha E_p (\theta_{ad} - \theta_a) + \frac{\Delta t - \Delta\ell}{\ell} E_p \right]$$

y sustituyendo:

$$F_a = A_p \left[\sigma_{pe} - \alpha E_p (\theta_t - \theta_a) - \frac{\Delta\ell}{\ell} E_p \right] \qquad [29.52]$$

- El hormigón ha experimentado un alargamiento $2(\Delta t - \Delta\ell)$ y por lo tanto está sometido a una fuerza de tracción:

1 Los valores Δt, $\Delta\ell$ se refieren a cada extremidad de la pieza. Los totales de la pieza serían $2\Delta\ell$ correspondientes a una longitud 2ℓ.

$$F_c = A_c \frac{\Delta t - \Delta\ell}{\ell} E_{cat}$$

siendo E_{cat} el módulo de deformación medio del hormigón en el instante antes de la transferencia.

Sustituyendo:

$$F_c = A_c E_{cat} \left[\alpha \left[K(\theta_c - \theta_a) - (\theta_t - \theta_a) \right] - \frac{\Delta\ell}{\ell} \right] \qquad [29.53]$$

El equilibrio de la rebanada exige que:

$$F_d = F_a + F_c \qquad [29.54]$$

y sustituyendo [29.51], [29.52], y [29.53] en [29.54] se obtiene:

$$\Delta\ell = \alpha\ell \frac{K(\theta_c - \theta_a) - (\theta_t - \theta_a)}{1 + mq\left(1 + \frac{\ell}{b}\right)} \qquad [29.55]$$

donde $m = \dfrac{E_p}{E_{cat}}$ y $q = \dfrac{A_p}{A_c}$.

Dado que el fenómeno se produce en unas pocas horas el valor de E_{cat} es intermedio entre cargas breves y cargas de larga duración en ambiente húmedo. Un valor adecuado puede ser:

$$E_{cat} \approx 6.500\ (f_{ckt} + 8)^{1/3} \qquad [29.56]$$

[1]

siendo f_{ckt} la resistencia del hormigón al transferir.

Calculando el valor de $\Delta\ell$ mediante [29.55] se sustituye en [29.51], [29.52] y [29.53] y se obtienen los valores de F_d, F_a y F_c y de ellos

$$\sigma_{pat,d} = \frac{F_d}{A_p} \qquad [29.57]$$

$$\sigma_{pat,a} = \frac{F_a}{A_p} \qquad [29.58]$$

$$\sigma_{cat} = \frac{-F_c}{A_c} \qquad [29.59]$$

[2]

1 Se entiende que el valor de f_{ckt} debe determinarse en probetas curadas en el ambiente de la mesa.

2 En la armadura se consideran positivas las tracciones. En el hormigón se consideran positivas las compresiones.

que son las tensiones en la armadura desnuda, armadura adherida y hormigón respectivamente a temperatura θ_t y antes de la transferencia.

El razonamiento anterior se ha hecho sobre la hipótesis de que $\theta_{ad} > \theta_t$ y por tanto se producía un acortamiento de las piezas, representado por un valor positivo $\Delta\ell > 0$.

Si $\theta_{ad} = \theta_t$, se tiene de $K = \dfrac{\theta_{ad} - \theta_a}{\theta_c - \theta_a}$ que $K(\theta_c - \theta_a) = \theta_{ad} - \theta_a = \theta_t - \theta_a$ y según [29.55] $\Delta\ell = 0$, cosa evidente ya que la longitud de las piezas aumenta al variar la temperatura de θ_{ad} a θ_c lo mismo que disminuye de θ_c a θ_t. El hormigón no presenta tensiones inmediatamente antes de la transferencia.

Si $\theta_{ad} < \theta_t$ (cosa imposible en la práctica) se produce una dilatación de la pieza, la armadura desnuda pierde tensión y el hormigón se comprime algo, *ya antes de la transferencia.*

Las fórmulas [29.51], [29.52], [29.53], [29.54] y [29.55] son válidas para todos los casos, recordando que los signos positivos en las tensiones corresponden a tracciones y en las deformaciones $\Delta\ell$ a los acortamientos.

La aplicación de las fórmulas [29.51], [29.52] y [29.53] plantea la necesidad de varias consideraciones.

- En primer lugar, y en esta fase del proceso, habría que hablar de pérdidas o de fuerza de pretensado diferentes en las zonas de armaduras desnudas y en las zonas adheridas. En la práctica y a partir de la transferencia sólo nos ocuparemos de estas últimas.
- Lo normal es que la adherencia se produzca a temperaturas superiores a la transferencia y haya por tanto tracciones en el hormigón inmediatamente antes de transferir.
- En el análisis anterior se ha partido de una producción instantánea de la adherencia a una temperatura θ_{ad}. En la realidad la formación de la adherencia es un proceso gradual.

En general K debe ser considerado como un coeficiente que debe determinarse experimentalmente en cada fábrica, más que como el valor [29.50] correspondiente a una supuesta formación instantánea de la adherencia. Representa de hecho una reducción de la pérdida de tensión de la armadura adherida[1], debida al desarrollo paulatino de la adherencia, respecto a la pérdida que experimentaría la armadura si alcanzase la temperatura θ_c sin crearse la adherencia ($K = 1$). La FIP (29.1) recomienda $K = 0{,}5$ en ausencia de determinaciones directas[2,3].

1 En inglés el fenómeno se designa como "loosening".

2 El sistema de colocar hormigón ya caliente, al que se aludió en el Capítulo 26, puede tener una influencia considerable en el valor de K.

3 El MODEL CODE 90, recomienda $K = 0{,}9$. No vemos razones para un valor tan alto y aunque el tema debe ser investigado directamente en cada fábrica, en ausencia de ensayos no aparecen razones para abandonar el valor $K = 0{,}5$.

El valor $K = 0$ corresponde al caso de formación de la adherencia antes de aplicar la calefacción, en cuyo caso ésta ya no presenta, prácticamente, interés.

- La tensión de tracción del hormigón no debe rebasar su resistencia si no se quiere fisurarlo. La fórmula [29.59] permite elegir la temperatura θ_t de transferencia adecuada para ello[1].
- En las zonas desnudas se producen sobretensiones que pueden rebasar la zona lineal del diagrama del acero, con lo cual en la fórmula [29.15] el término $\dfrac{\Delta\ell}{b} E_p$ no representa la sobretensión y las fórmulas [29.47], [29.48] y [29.49] no son válidas.

Si $\sigma_{pat,d} > \sigma_{pp}$ siendo σ_{pp} la tensión correspondiente al límite de proporcionalidad (figura 29-14), el problema puede ser resuelto sustituyendo en la expresión [29.51] el término $\dfrac{\Delta\ell}{b} E_p$ por $\sigma_p = f(\varepsilon_p)$, siendo esta fórmula la expresión analítica de la ley tensiones-deformaciones. El procedimiento es trabajoso si no se resuelve con ordenador.

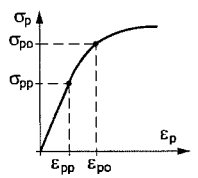


Figura 29-14

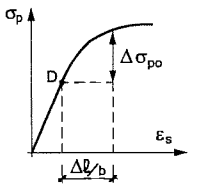


Figura 29-15

Una solución alternativa y simple es, una vez comprobado que $\sigma_{pat,d} > \sigma_{pp}$, suponer un valor de $\Delta\ell$. En el diagrama del acero empleado (Fig. 29-15) se fija el punto D correspondiente a la tensión parcial $\sigma_{pe} - E_p\alpha\,(\theta_t - \theta_a)$ de la armadura desnuda. A partir del valor de $\Delta\ell$ elegido se calcula $\dfrac{\Delta\ell}{b}$ que, llevado sobre el diagrama a partir del alargamiento correspondiente al punto D, permite calcular el valor $\Delta\sigma_{po}$. Con el mismo valor de $\Delta\ell$ se calcula $\dfrac{\Delta\ell}{\ell}$.

Las ecuaciones equivalentes [29.51], [29.52] y [29.53] son ahora:

$$F_{d1} = A_p \left[\sigma_{pe} - \alpha E_p (\theta_t - \theta_a) + \Delta\sigma_{po} \right] \qquad [29.60]$$

1 La fisuración debe en general evitarse, pues aunque las fisuras se cierren luego al transferir, las características resistentes frente a fisuraciones posteriores han quedado disminuidas.

$$F_{a1} = A_p \left[\sigma_{pe} - \alpha E_p (\theta_t - \theta_a) - \frac{\Delta \ell}{\ell} E_p \right] \qquad [29.61]$$

$$F_{c1} = A_p E_{cat} \left[\alpha \left[K(\theta_c - \theta_a) - (\theta_t - \theta_a) \right] - \frac{\Delta \ell}{\ell} \right] \qquad [29.62]$$

Sustituyendo los valores de $\Delta\sigma_{po}$ y $\frac{\Delta \ell}{\ell}$ en las tres expresiones anteriores se compara F_{d1} con $F_{a1} + F_{c1}$.

- Si $F_{d1} > F_{a1} + F_{c1}$, es que se ha supuesto un valor de $\Delta\ell$ demasiado alto y debe tantearse de nuevo con otro más reducido.
- Si $F_{d1} < F_{a1} + F_{c1}$, debe probarse con valores más altos de $\Delta\ell$.

En general dos o tres tanteos son suficientes para resolver el problema.

Conocido el valor de $\Delta\ell$, sustituyendo [29.60], [29.61] y [29.62] se obtienen:

$$\sigma_{pat,d} = \sigma_{pe} - E_p \alpha (\theta_t - \theta_a) + \Delta\sigma_{po} \qquad [29.63]$$

$$\sigma_{pat,a} = \sigma_{pe} - \alpha E_p (\theta_t - \theta_a) - \frac{\Delta \ell}{\ell} E_p \qquad [29.64]$$

$$\sigma_{cat} = -E_{cat} \left[\alpha \left[K(\theta_c - \theta_a) - (\theta_t - \theta_a) \right] - \frac{\Delta \ell}{\ell} \right] \qquad [29.65]$$

que son las expresiones análogas a las [29.57], [29.58] y [29.59], pero correspondientes al caso en que en las zonas desnudas de armaduras se ha rebasado el límite de proporcionalidad del acero durante el enfriamiento hasta la temperatura de transferencia.

Debe señalarse que en la mayoría de las situaciones reales se está en este segundo caso. Es evidente que en las zonas desnudas de armaduras se alcanzan tensiones muy elevadas, y por lo tanto, grandes pérdidas de relajación. Esto no tiene importancia, ya que esas zonas son cortadas y quedan sin tensión, en el propio proceso de fabricación.

La elevada relajación en esas zonas, el rozamiento con la mesa, la necesaria longitud de adherencia y las poco conocidas características del hormigón a esa temperatura, en condiciones reales y no de laboratorio, hacen que el problema sea muy complejo e insuficientemente conocido[1].

Las tensiones de tracción del hormigón resultan generalmente altas, salvo que la transferencia se realice a una temperatura poco inferior a la de curado.

Todo ello conduce de nuevo a recordar la necesidad de que tanto el valor de K como el de θ_t deban determinarse para cada instalación en concreto. De otra

1 La resistencia y el módulo de deformación del hormigón van aumentando de forma importante durante el proceso de fabricación.

forma los cálculos anteriores no tienen otro carácter que el puramente orientativo. En general, valores altos de b respecto a ℓ (Fig. 29-11) conducen a menores sobretensiones en las zonas de armaduras desnudas, algo menores, (casi iguales), tensiones en las armaduras adheridas y menores tracciones en el hormigón. Es, sin embargo, un sistema caro, pues conduce a un mayor coste de armadura por m de pieza realmente fabricada.

Un caso de especial interés es el caso de empleo de máquinas "ponedoras". En general este caso supone, si las zonas desnudas de armaduras en los extremos son de longitud apreciable, tensiones en las zonas de armaduras desnudas y adheridas algo mayores que en el sistema clásico de separadores. Las tensiones de tracción en el hormigón son bastante mayores. Si las zonas de armaduras desnudas en los extremos son muy cortas, los alargamientos en esas zonas son muy fuertes y pueden llegar a producir la rotura de las armaduras. (Ver ejemplo en el apartado 29.2.4.8).

El caso aquí resuelto, adopta para mayor claridad de exposición la hipótesis de espacios $2b$ entre piezas y b entre piezas extremas y cabezas, que es suficientemente aproximado para las necesidades prácticas. El caso más general se indica en la figura 29-16 y conduce a poner en equilibrio cada pieza. Por ejemplo para la primera comenzando por la izquierda se tendría, siendo $\Delta_1\ell$, $\Delta_2\ell$,... $\Delta_n\ell$ los corrimientos totales de las piezas, positivos hacia la derecha, (ahora ya el centro de cada pieza no permanece quieto durante el calentamiento):

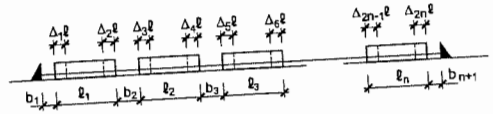


Figura 29-16

Lado izquierdo:

$$F_{d1}^{i} = A_p \left[\sigma_{pe} - \alpha E_p (\theta_t - \theta_a) + \frac{\Delta_1 \ell}{b_1} E_p \right]$$

$$F_{a1}^{i} = A_p \left[\sigma_{pe} - K\alpha E_p (\theta_t - \theta_a) + \frac{\Delta_2 \ell - \Delta_1 \ell}{\ell_1} E_p \right]$$

$$F_{c1}^{i} = A_c E_{cat} \left[\alpha \left[(\theta_c - \theta_a) - (\theta_t - \theta_a) \right] + \frac{\Delta_2 \ell - \Delta_1 \ell}{\ell_1} \right]$$

Lado derecho:

$$F_{d1}^{d} = A_p \left[\sigma_{pe} - \alpha E_p (\theta_t - \theta_a) + \frac{\Delta_3 \ell - \Delta_2 \ell}{b_2} E_p \right]$$

$$F_{a1}^{d} = A_p \left[\sigma_{pe} - K\alpha E_p (\theta_c - \theta_a) + \frac{\Delta_2 \ell - \Delta_1 \ell}{\ell_1} E_p \right]$$

$$F_{c1}^{d} = A_c\, E_{cat}\left[\alpha\left[K(\theta_c - \theta_a) - (\theta_t - \theta_a)\right] + \frac{\Delta_2\ell - \Delta_1\ell}{\ell_1}E_p\right]$$

El equilibrio de la pieza de longitud ℓ_1, como cuerpo aislado, exige

$$F_{d1}^{i} = F_{d1}^{d}$$

Luego:

$$\frac{\Delta_1\ell}{b_1} = \frac{\Delta_3\ell - \Delta_2\ell}{b_2} \qquad \text{(a)}$$

El equilibrio de fuerzas en la cara extrema izquierda exige:

$$F_{d1}^{i} = F_{a1}^{i} + F_{c1}^{i}$$

O sea:

$$A_p\left[\sigma_{pe} - \alpha E_p(\theta_t - \theta_a) + \frac{\Delta_1\ell}{\ell_1}E_p\right] = A_p\left[\sigma_{pe} - K\alpha E_p(\theta_t - \theta_a) + \frac{\Delta_2\ell - \Delta_1\ell}{\ell_1}E_p\right] +$$

$$+ A_c\, E_{cat}\left[\alpha\left[K(\theta_c - \theta_a) - (\theta_t - \theta_a)\right] + \frac{\Delta_2\ell - \Delta_1\ell}{\ell_1}\right] \qquad \text{(b)}$$

Por supuesto se cumple $F_{d2}^{d} = F_{a2}^{d} + F_{c2}^{d}$ en la otra cara. En definitiva hay $2n$ incógnitas $\Delta_1\ell ... \Delta_{2n}\ell$ y $2n$ ecuaciones que se originan al plantear n ecuaciones (a) por cada pieza y n ecuaciones (b) una por cada extremidad (izquierda o derecha, pues es lo mismo) de cada una de las n piezas.

Como vimos en el caso expuesto en el texto, algunos o todos los valores:

$$\frac{\Delta_1\ell}{b_1}, \frac{\Delta_3\ell - \Delta_2\ell}{b_2}, ..., \frac{\Delta_{2n}\ell}{b_{n+1}}$$

pueden ser superiores al alargamiento correspondiente al límite de proporcionalidad del acero, y es necesario en ese caso aplicar el proceso que allí se indicó.

En general la solución es trabajosa, salvo en los casos en que se trata de fabricaciones simétricas

$$b_1 = b_{n+1}$$

$$b_2 = b_3 = ... = b_n$$

en los que la resolución manual es relativamente fácil.

Cálculo de la pérdida de fuerza de pretensado en la armadura adherida

Se entiende como pérdida producida por la dilatación térmica, la diferencia entre σ_{pe} y la tensión en el acero adherido *cuando la tensión en el hormigón es nula*. Cuando el hormigón está traccionado, esta anulación de su tensión se obtiene al comenzar el destesado en las cabezas de anclaje, pero la variación de tensión correspondiente es debida al efecto de la calefacción exclusivamente. Si durante el tratamiento de calefacción la pieza se dilata, se ha producido ya un destesado parcial con su transferencia correspondiente[1].

Por tanto:

$$\Delta P_8 = A_p\left[\sigma_{pe} - \left(\sigma_{pat,a} - \frac{\Delta t - \Delta\ell}{\ell}E_p\right)\right]$$

$\frac{\Delta t - \Delta\ell}{\ell}$ es la deformación que ha experimentado la pieza, y por lo tanto la armadura adherida, desde la posición de tensión nula en el hormigón y sustituyendo $\Delta t = \alpha(\theta_{ad} - \theta_i)\,\ell$ como vimos anteriormente y operando:

$$\Delta P_8 = A_p K\alpha E_p\,(\theta_c - \theta_a) \qquad [29.66]$$

La pérdida es, como se ve, independiente de la temperatura a la que se realice la transferencia y depende únicamente de la temperatura de formación de la adherencia[2].

La tensión en el acero inmediatamente antes de la transferencia resulta $\sigma_{pat,a}$, y la existente cuando la tensión del hormigón es nula:

$$\sigma_{po} = \sigma_{pe} - K\alpha E_p\,(\theta_c - \theta_a) \qquad [29.67]$$

En las zonas de armadura desnudas, se produce un incremento en la fuerza de pretensado debido al enfriamiento, $\Delta' P_8$ y una pérdida por relajación que puede suponerse muy aproximadamente igual a ΔP_9. El valor $\Delta' P_8$ vale $A_p(\sigma_{pat,d} - \sigma'_{pe})$. La variación total de fuerza de pretensado en esas zonas desnudas es por tanto:

$$\Delta P_8 = \Delta' P_8 + \Delta P_9 \qquad [29.68]$$

que en la práctica carece de interés.

---

1 Con esta definición, la pérdida por acortamiento elástico, que veremos a continuación, es la debida a los acortamientos del hormigón desde su estado de tensión nula, tal como se entiende en general y en particular cuando no hay calefacción.

2 La expresión $\frac{\Delta P_8}{A_p} = \Delta\sigma_8$ es decir, la pérdida de tensión en la armadura corresponde al valor adoptado por la FIP en (29.1). Obsérvese, sin embargo, que el cálculo anterior para conocer $\sigma_{pat,d}$ y σ_{cat} es imprescindible para verificar la tensión en la armadura desnuda y sobre todo, las tracciones en el hormigón, cosa que no puede hacerse sólo con el conocimiento de ΔP_8 ó $\Delta\sigma_8$ respectivamente.

i) Pérdida ΔP_9 por relajación anisoterma durante el período de enfriamiento.

Durante la bajada de temperatura ocurre simultáneamente otra pérdida por relajación anisoterma de la armadura, que llamaremos ΔP_9 sin cuantificarla por ahora.

j) Pérdida ΔP_{10} por acortamiento elástico al transferir.

Al realizar la transferencia y cortar los alambres entre piezas una vez destesada la mesa, se establece la acción del pretensado. La compresión sobre el hormigón producirá un acortamiento que motivará una nueva pérdida de tensión en la armadura.

Sea σ_{pt} la tensión de la armadura después de transferir, *sin contar la acción del peso propio de la pieza*, y σ_{ct} la correspondiente a tensión en el hormigón en el c.d.g. de la armadura activa.

La tensión σ_{ct} *debida exclusivamente a la acción del pretensado* viene dada por la fórmula:

$$\sigma_{ct} = \frac{A_p\,\sigma_{pt}}{A_c}\left(1 + \frac{e^2}{r^2}\right) \qquad [29.69]$$

(comprensión si $\sigma_{ct} > 0$).

Igualando los acortamientos producidos en el hormigón y en la armadura, se tiene:

$$\frac{\sigma_{pe} - K\alpha E_p\left(\theta_c - \theta_a\right) - \sigma_{pt}}{E_p} = \frac{\sigma_{ct}}{E_{ct}} \qquad [29.70]$$ [1]

Sustituyendo [29.69] en [29.70] y despejando σ_{pt} se tiene:

$$\sigma_{pt} = \frac{\sigma_{pe} - K\alpha E_p\left(\theta_c - \theta_a\right)}{1 + mq\left[1 + \left(\frac{e}{r}\right)^2\right]} \qquad [29.71]$$

El valor de E_{ct} para el cálculo de m, es en este caso el correspondiente a cargas instantáneas dado por [28.12], con f_{ck} determinada en probetas curadas en el ambiente de la pieza.

La pérdida de fuerza de pretensado resulta por tanto:

$$\Delta P_{10} = A_p\left[\sigma_{pe} - K\alpha E_p\left(\theta_c - \theta_a\right) - \sigma_{pt}\right]$$

y sustituyendo:

$$\Delta P_{10} = A_p\left[\frac{mq\left[1 + \left(\frac{e}{r}\right)^2\right]\left[\sigma_{pe} - K\alpha E_p\left(\theta_c - \theta_a\right)\right]}{1 + mq\left[1 + \left(\frac{e}{r}\right)^2\right]}\right] \qquad [29.72]$$

La fuerza de pretensado después de la transferencia resulta:

$$P_{kt} = P_o - \sum_1^{10}\Delta P_i = A_p\,\sigma_{pt} \qquad [29.73]$$ [1]

29.4.1.2 CONSIDERACIONES SOBRE LAS PÉRDIDAS POR RELAJACIÓN HASTA LA TRANSFERENCIA CUANDO SE USA SISTEMA DE CALEFACCIÓN

En el análisis anterior hemos considerado cuatro valores ΔP_4, ΔP_5, ΔP_6, y ΔP_9 que corresponden al conjunto de la relajación del acero, en diferentes condiciones de temperatura y bajo tensiones decrecientes del mismo.

La pérdida ΔP_4, anterior a la aplicación de la calefacción puede ser calculada con precisión suficiente a partir de las curvas de relajación isoterma facilitadas por el fabricante de las armaduras[2].

El conjunto $\Delta P_5 + \Delta P_6 + \Delta P_9$ es decir, las pérdidas por relajación ocasionadas por el incremento de temperatura producido por el sistema de calefacción pueden, bien ser medidas mediante una investigación experimental directa en fábrica, o bien, ser estimadas a partir de curvas de relajación en función de la temperatura como las de las figuras 32-20b y 32-21 del Capítulo 32.

Debe señalarse que el cálculo adecuado de esta pérdida, por la importancia que representa en las pérdidas totales, es esencial para un diseño correcto de la pieza pretensada. Los estudios de ELICES, SÁNCHEZ GÁLVEZ con ERDELYI y KOSIOREK (29.3) y los de NADER (29.4) indican que a continuación del período de calefacción, la pérdida por relajación cesa a efectos prácticos, al menos hasta tiempos muy grandes que con frecuencia superan la vida útil de la estructura.

Como tampoco puede pretenderse una gran precisión en todo lo que venimos exponiendo, en ausencia de otra información ΔP_5 y ΔP_9 pueden estimarse como las correspondientes a la temperatura media del período correspondiente, aplicada a la

1 El efecto del descenso de temperatura θ_t a θ_a afecta por igual a ambos materiales y no produce por tanto variación de tensiones.

1 Con este valor de la fuerza de pretensado pueden calcularse las tensiones al transferir. Recuérdese que al transferir se produce contraflecha y, por lo tanto, comienza a actuar el peso propio. Según la comprobación que se realice y la sección de pieza que se considere, deberá tenerse o no en cuenta su acción.

2 Desgraciadamente los fabricantes españoles de aceros de pretensado dan muy escasa y a veces nula información sobre este aspecto. Para todo lo que estamos tratando es esencial conocer las curvas de relajación para tres tensiones iniciales, p. ej. 60, 70 y 80% de la rotura y cada una de ellas para temperatura de 20, 50 y 80°C, por ejemplo. Con estos datos pueden interpolarse todos los que se van necesitando en el método de cálculo que se expone.

tensión inicial en el período. ΔP_6 puede estimarse directamente a partir de las curvas de relajación en función de la temperatura.

Como simples valores orientativos, a las pérdidas debidas a la relajación isoterma a 20°C desde el tesado a la transferencia, hay que añadir, debido a la influencia de la calefacción sobre la relajación, pérdidas del 5 al 10% de su tensión inicial para armaduras con tratamiento de eliminación de tensiones y del 0,5 al 4% para armaduras sometidas a procesos de estabilización (29.1). Todo esto se refiere a pérdidas por relajación hasta la transferencia. Más adelante hablaremos de las pérdidas totales, es decir, a tiempo infinito, aunque puede adelantarse que la impresión actual (29.1), (29.3) y (29.4), es que con armaduras de buena calidad las pérdidas totales por relajación son prácticamente las ocurridas hasta la transferencia.

Lo que si es importante es el conocimiento claro de que la calefacción produce unas pérdidas directas por dilatación de la armadura y otras indirectas por aceleración del proceso de relajación. El cálculo de los valores de estas pérdidas es esencial para una correcta evaluación de la tensión en el momento de la transferencia y de todas las pérdidas y tensiones posteriores.

Análogamente hemos introducido un coeficiente K interviniente en la pérdida de tensión debida a la dilatación térmica de la armadura. Vimos que el valor $K = 0$ correspondía al caso de adherencia completa entre hormigón y armadura al comenzar la acción de la calefacción. Interesa reducir K todo lo posible pues de otra manera las pérdidas son importantes. Ello equivale a ganar rápidamente resistencia en el hormigón para desarrollar adherencia en muy poco tiempo.

29.4.1.3 PÉRDIDAS DE FUERZA DE PRETENSADO POSTERIORES A LA TRANSFERENCIA

Una vez realizada la transferencia, seguirán produciéndose pérdidas en la fuerza de pretensado debidas a los tres conceptos siguientes:

- Retracción diferida
- Fluencia
- Relajación diferida

Por supuesto, los tres fenómenos se interfieren en un proceso extremadamente complejo, esencialmente análogo al analizado para el caso de armaduras postesas.

La pérdida conjunta debida a los tres fenómenos la calcularemos de nuevo con la fórmula [29.43]

$$\Delta P_{dif} = A_p \frac{m\varphi(t,t_o)\sigma_{cp} + \sum_1^n \frac{E_p}{E_{cj}} \cdot \Delta\sigma'_{cp,i}\varphi(t,t_i) + E_p \cdot \varepsilon_{cs}(t,t_o) + k\Delta\sigma_{pr}}{1 + m\frac{\sigma_{cp}}{\sigma_{pt}}\left[1 + \chi\varphi(t,t_o)\right]} \qquad [29.74]$$

con las mismas notaciones y advertencias que allí hicimos, debiendo añadirse las siguientes:

- Para el cálculo de las pérdidas antes de la transferencia, el valor $k\Delta\sigma_{pr}$ debe ser evaluado de acuerdo con el tipo y duración del curado que se aplique.
- En los casos de curado al vapor, con temperaturas máximas de 65 a 80°C, en el cálculo de las pérdidas diferidas, es decir posteriores a la transferencia, **debe considerarse, de acuerdo con lo expuesto, $K = 0$.**

29.4.2 PÉRDIDAS CUANDO NO SE APLICA CALEFACCIÓN

En este caso son nulas las pérdidas ΔP_5, ΔP_6, ΔP_9 y la ΔP_4 corresponde al tiempo desde el tesado de las armaduras hasta el instante de la transferencia, con temperatura ambiente en todo el período.

Es naturalmente también nula la ΔP_8 debida a la calefacción ya que ésta no existe. Correlativamente la tensión σ_{cat} es nula.

29.4.2.1 PÉRDIDA ΔP_{10} DE FUERZA DE PRETENSADO DEBIDA AL ACORTAMIENTO ELÁSTICO

En cuanto a la pérdida por acortamiento elástico ΔP_{10}, su valor es ahora:

[1]

$$\Delta P_{10} = (\sigma_{pat} - \sigma_{pt})A_p = \left[\sigma_{pat} - \frac{\sigma_{pat}}{1 + m_p q\left[1 + \left(\frac{e}{r}\right)^2\right]}\right] A_p$$

donde σ_{pat} es la tensión del acero antes de la transferencia y σ_{pt} se obtiene de [29.71] haciendo $\theta_c = \theta_a$ y $\sigma_{pat} = \sigma_{pe}$.

[2]

$$\Delta P_{10} = A_p \frac{\sigma_{pat}\, m_p q\left[1 + \left(\frac{e}{r}\right)^2\right]}{1 + m_p q\left[1 + \left(\frac{e}{r}\right)^2\right]} \qquad [29.75]$$

1 σ_{pat} tiene ahora el valor $\sigma_{pat} = \sigma_{pi} - \frac{1}{A_p}\left[\Delta P_1 + \Delta P_2 + \Delta P_3 + \Delta P_4\right]$

2 Obsérvese que [29.75] se deduce inmediatamente de [29.72] sin más que hacer $\sigma_{pe} = \sigma_{pat}$ y $\theta_c = \theta_a$. Esta similitud es debida al hecho de haber definido como pérdida debida al acortamiento elástico, cuando se emplea calefacción, la ocurrida desde la tensión nula en el hormigón. La debida al acortamiento desde su estado real hasta el de tensión nula se engloba en la pérdida por dilatación térmica, tal como indicamos en 29.2.4.2.h.

O bien

$$\Delta P_{10} = \sigma_{pat}\ A_p \frac{m_p q \left[1 + \left(\frac{e}{r}\right)^2\right]}{1 + m_p q \left[1 + \left(\frac{e}{r}\right)^2\right]} \lambda \sigma_{pat}\ A_p \qquad [29.76]$$

(Ver ábaco en la figura 29-17 para el cálculo de λ).

Es interesante comparar esta fórmula con la adoptada por EHE.

$$\Delta P_{10} = m_p \sigma_{ct} A_p \qquad [29.77]$$

donde σ_{ct} es la tensión en el hormigón a nivel del c.d.g. de la armadura, debida a la fuerza de pretensado antes de la transferencia. La fórmula [29.77] puede expresarse:

$$\Delta P_8 = \sigma_{pat} A_p m_p q \left[1 + \left(\frac{e}{r}\right)^2\right] \qquad [29.78]$$

La fórmula de EHE sobrevalora la pérdida por acortamiento elástico debido a que la identifica con la producida por la tensión en el hormigón *antes* de producirse la pérdida y no *después* como ya dijimos.

29.4.2.2 Pérdidas diferidas

Las fórmulas para la pérdida ΔP_{dif} son naturalmente iguales que cuando se emplea sistema de calefacción.

29.4.3 MÉTODO SIMPLIFICADO PARA EL CÁLCULO DE LAS PÉRDIDAS DE FUERZA DE PRETENSADO

El método general expueto en 29.2.4.2 y 29.2.4.4 puede ser sustituido por el siguiente, más breve, y que proporciona una precisión suficiente para la mayoría de los cálculos. (Llamamos $\Delta_s P$ a las pérdidas calculadas con este método simplificado).

a) Pérdidas $\Delta_s P_1$ y $\Delta_s P_2$.

Deben ser evaluadas experimentalmente a la puesta en marcha de la instalación.

b) Pérdida $\Delta_s P_3$ *por deslizamiento de las cuñas de anclaje.* Igual que en 29.4.1.1

$$\Delta_s P_3 = \frac{\delta}{1.000L} A_p E_p \qquad [29.79]$$

c) Pérdida $\Delta_s P_4$ *por relajación isoterma a la temperatura ambiente.*

(Caso en que no hay calefacción). De acuerdo con los datos experimentales puede establecerse la fórmula:

$$\Delta_s P_4 = \lambda \gamma \Delta P_{r,1.000} \qquad [29.80]$$

donde $\Delta P_{r,1.000}$ es la relajación pura a temperatura de 20°C y a tensión $0{,}70\, f_{pk}$, al cabo de 1.000 horas y λ y γ toman los valores siguientes:

$\lambda = 0{,}15$ para transferencia a 1 día (o menos).

$\lambda = 0{,}20$ para transferencia a 2 días.

$\lambda = 0{,}25$ para transferencia a 3 días.

$\gamma = 2{,}0$ para armaduras sometidas a procesos de estabilización.

$\gamma = 2{,}7$ para armaduras sometidas simplemente a procesos de eliminación de tensiones

Para armaduras no sometidas a ninguno de los tratamientos indicados no es posible fijar un valor de γ.

d) Pérdida $\Delta_s P_5 + \Delta_s P_6 + \Delta_s P_9$ adicional debida al sistema de calefacción

Debe ser determinada experimentalmente. En ausencia de otros datos deben considerarse pérdidas de tensión del 5 al 10% de la tensión inicial de la armadura para el caso en que éstas hayan sufrido sólo un proceso de eliminación de tensiones y del 0,5 al 4% para armaduras sometidas a procesos de estabilización. No es posible actualmente dar una información más concreta, salvo el método general expuesto anteriormente.

e) Pérdida $\Delta_s P_7$ por retracción inicial

Se desprecia.

f) Pérdida $\Delta_s P_8$ debida a la dilatación térmica

$$\Delta_s P_8 = A_p K \alpha E_p (\theta_c - \theta_a) \qquad [29.81]$$

K debe ser determinado experimentalmente. En ausencia de datos puede adoptarse $K = 0{,}5$.

g) Tensión antes de transferir

$$\sigma_{pat} = \frac{P_{ki} - \sum_1^6 A_s P_n}{A_p} \qquad [29.82]$$

h) Pérdida $\Delta_s P_7$ por acortamiento elástico al transferir

$$\Delta_s P_7 = A_p \left[\frac{\sigma_{pat} m_p q \left[1 + \left(\frac{e}{r}\right)^2\right]}{1 + m_p q \left[1 + \left(\frac{e}{r}\right)^2\right]} \right] \approx A_p \lambda \sigma_{pat} \qquad [29.83]$$

donde m corresponde a cargas breves.

El valor:

$$\lambda = \frac{m_p q \left[1 + \left(\frac{e}{r}\right)^2\right]}{1 + m_p q \left[1 + \left(\frac{e}{r}\right)^2\right]}$$

viene dado por el ábaco de la figura 29-17.

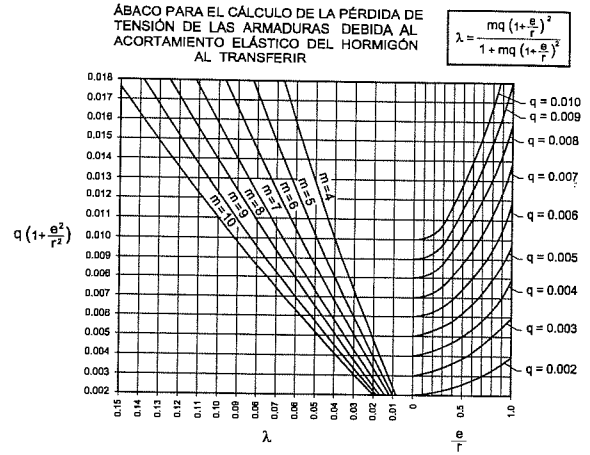


Figura 29-17

i) Pérdida $\Delta_s P_8$ por retracción

Puede considerarse con una aproximación razonable:

$$\Delta_s P_8 = \varepsilon_{cs} A_p E_s \qquad [29.84]$$

Como valores de ε_{cs} pueden usarse los de la tabla T-28.5.

j) Pérdida $\Delta_s P_9$ por fluencia del hormigón

$$\Delta_s P_9 = K_f \frac{\sigma_{cp}}{f_{ckt}} \Delta_s P_7 \qquad [29.85]$$

siendo:

$$\sigma_{cp} = \lambda_1 \left[q\sigma_{pt} \left[1 + \left(\frac{e}{r}\right)^2\right] + \frac{M_{pp}\, e_h}{I_h}\right] + \lambda_2 \left[q\sigma_{pt} \left[1 + \left(\frac{e}{r}\right)^2\right] + \frac{M_{pp}\, e_h}{I_h} + \frac{M_g\, e_h}{I_h}\right]$$

$$\lambda_1 = \phi(t_1, t_o)$$
$$\lambda_2 = \phi(t_2, t_o) - \phi(t_1, t_o)$$

donde:

t_o es la edad de aplicación del pretensado

t_1 es la edad de aplicación de la carga cuasipermanente

t_2 10.000 días

M_{pp} Momento máximo característico debido al peso propio de la pieza

M_g Momento máximo característico debido a la carga cuasipermanente excluido el peso propio

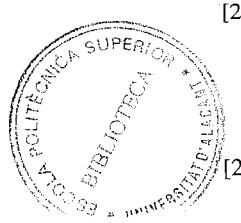
Para la mayoría de los casos prácticos para λ_1 puede tomarse la mitad del valor proporcionado por la tabla T-28.4 y $\lambda_2 = 0$. (Depende naturalmente del período de estancia en parque de la pieza).

k) Pérdida $\Delta_s P_{10}$ por relajación diferida del acero

k-1) Si no hay calefacción:

$$\Delta_s P_{10} = \gamma \Delta P_{r,1.000} - \Delta_s P_4 \qquad [29.86]$$

(Véase c) para valores de γ).



k-2) Si hay sistema de calefacción:

$$\Delta_s P_{10} = 0 \qquad [29.87]$$

29.4.4 MÉTODO PARA TANTEOS

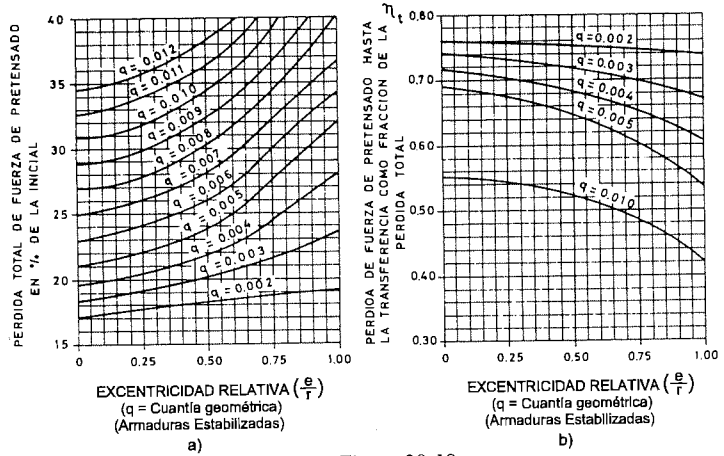


Figura 29-18

Para cálculos simples, comprobaciones aproximadas y tanteos, resulta suficiente una estimación de las pérdidas mediante los gráficos de la figura 29-18, obtenidos mediante la interpolación de curvas a partir de los resultados obtenidos en la realización de los cálculos de numerosas piezas pretensadas con armaduras pretesas correspondientes a todo el campo habitual en la práctica.

La figura 29-17 a) da las pérdidas totales $\Sigma \Delta P_f$. Las pérdidas inmediatamente después del acortamiento elástico pueden ser estimadas mediante la fórmula:

$$\Sigma \Delta P_t = \eta_t \Sigma \Delta P_f \qquad [29.88]$$

donde

η_t se obtiene en la figura 29-18 b)

29.5 FUERZA FINAL DE PRETENSADO

Es el valor:

$$P_{pf} = P_o - \sum_1^n \Delta P_n \qquad [29.89]$$

y es el que se usa para la comprobación de la pieza en condiciones de servicio y para otros cálculos.

La tensión permanente de pretensado es:

$$\sigma_{pf} = \frac{P_{pf}}{A_p} \qquad [29.90]$$

Las Normas actuales no prescriben un valor máximo de σ_{pf} ya que en la práctica no resulta nunca superior a $0{,}60\, f_{pk}$, valor que no presenta inconvenientes de ningún tipo.

EJEMPLO 29.2

Se da la vigueta de forjado de la figura 29-19. (Cotas en mm).

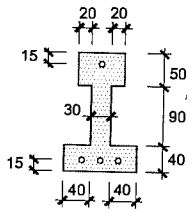


Figura 29-19

Acero. Los alambres son ϕ 4 mm cuyo diagrama se representa en la figura 29-20, y corresponde a un alambre Y1860C de relajación 2%, con E_p = 200.000 *N/mm²*.

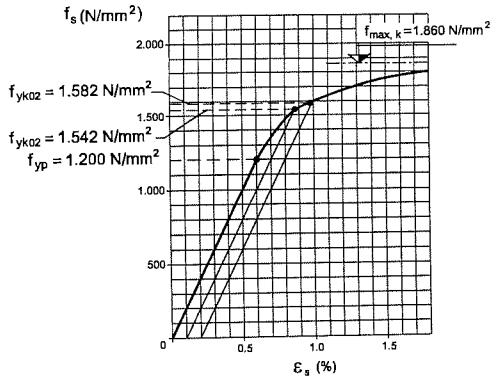


Figura 29-20

El fabricante de la armadura proporciona los datos siguientes:

- Pérdidas por relajación pura:

  para $\sigma_{po} = 0{,}7\, f_{pk}$. Se recogen en el gráfico de la figura 29-21.

- Relajación adicional debida al tratamiento de calefacción previsto: ≈ 5%.

Hormigón. Se emplea un hormigón con resistencia característica al transferir f_{ck} = 25MPa, a los 28 días f_{ck} = 40 MPa y a los 60 días f_{ck} = 46 MPa. Se usa cemento de endurecimiento rápido y alta resistencia.

El forjado se construye con hormigón resistente en relleno de senos y losa superior, con un canto total de 210 mm.

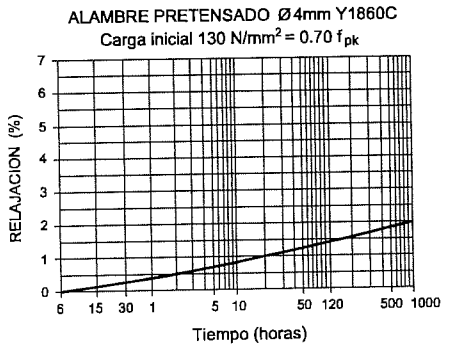


Figura 29-21

Fases del hormigonado hasta servicio.

- Desde el hormigonado hasta la transferencia:
  - Ambiente saturado
  - Curado con vapor
  - Ciclo, el indicado en la figura 29-22. (Supóngase $K = 0{,}7$).
  - Mesa de 110 m de longitud
  - Penetración de cuñas 2,5 *mm*
  - Longitud de piezas $2\ell = 6m$
  - Ancho de separadores $2b = 200$ *mm*

Se calculan los valores siguientes:

$A_p = 50{,}3\ mm^2$

$e = -28{,}6\ mm$

$r = 60{,}4\ mm$

$q = 0{,}0047$

$I_o = 38.720.000\ mm^4$

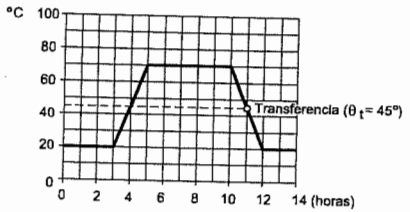


Figura 29-22

- En parque:
  - Ambiente medio (HR-50%)
  - Duración 60 días
  - Temperatura media, 14°C
- En forjado construido:
  - Ambiente medio (HR-50%)
  - Temperatura media 20°C
  - $e_o = 80\ mm$; $I_o = 122.000.000\ mm^4$
  - $M_g = 4{,}90\ mkN$

CÁLCULO DE LA FUERZA INICIAL DE PRETENSADO DE ACUERDO CON EHE

Tensión de tesado:

$$\sigma_{po} \leq 0{,}85 \cdot 1860 = 1581\ N/mm^2$$

$$\sigma_{po} \leq 0{,}95 \cdot 1582 = 1503\ N/mm^2$$

Tensión al anclar después de la transferencia:

$$\sigma_{pt} \leq 0{,}75 \cdot 1860 = 1395\ N/mm^2$$

$$\sigma_{pt} \leq 0{,}90 \cdot 1582 = 1424\ N/mm^2$$

Se adopta

$$\sigma_{po} = 1503\ N/mm^2 = 0{,}95\ f_{pk}$$

$$P_{ki} = 50{,}3 \cdot 1503 = 75600\ N$$

CÁLCULO DE PÉRDIDAS POR EL MÉTODO GENERAL

a) Pérdidas ΔP_1 *y* ΔP_2. No se tienen en cuenta.

b) Pérdida ΔP_3 *por deslizamiento de cuñas de anclaje.*

$$\varepsilon_s = \frac{2{,}5}{110.000} = 2{,}27 \cdot 10^{-5}$$

Aunque está en zona no lineal se aplica la fórmula [29.44] por ser pequeña la diferencia.

$$\Delta P_3 = 2{,}27 \cdot 10^{-5} \cdot 200.000 \cdot 50{,}3 = 228\ N$$

(Dado el pequeñísimo valor de la pérdida, resulta supérfluo intentar calcularla sobre la zona curva del diagrama).

c) Pérdida ΔP_4 *por relajación isoterma a la temperatura ambiente durante el tiempo de espera.* (Ver figura 29-21)

Para $t = 3$ horas [1]

$$\Delta P_4 = 0{,}005(75600 - 228) = 377\ N$$

1 En rigor, la curva de relajación de la figura 29-21 está realizada para una tensión de $0{,}70\ f_{pk}$ mientras que en nuestro caso $\sigma_r = 1498\ N/mm^2$ que es $0{,}81\ f_{max,k}$. En la práctica operamos con ella porque el error es despreciable. Si los fabricantes, como establece EHE, suministrasen curvas para 0,6; 0,7 y 0,8 de fpk se podría interpolar.

d) Pérdidas:

- ΔP_5 por relajación en el período de subida de la temperatura.
- ΔP_6 por relajación durante el período de temperatura constante de curado.
- ΔP_9 por relajación durante el período de reducción de temperatura hasta la transferencia.

Al no disponerse de otros datos, de acuerdo con lo dicho se estima que estas pérdidas suponen un 4% a añadir a la pérdida por relajación pura a 20°C para ese período, que va de 3 a 11 horas. De acuerdo con la figura 29-21 el porcentaje de pérdidas en ese período a 20°C es aproximadamente 1-0,5 = 0,5%, luego,

$$\Delta P_5 + \Delta P_6 + \Delta P_9 = \frac{5,5}{100}\left[1.503 - (228 + 377)\right] \cdot 50,3 = 2484\ N$$

e) Pérdida ΔP_7 por retracción inicial

Se desprecia debido al proceso de calefacción por vapor

$$\Delta P_7 = 0$$

De acuerdo con [29.49]:

$$\sigma_{pe} = 1503 - \frac{(228 + 377 + 2484)}{50,3} = 1442\ N/mm^2$$

A continuación es necesario comprobar si en el enfriamiento las armaduras en las zonas desnudas rebasan o no el límite de proporcionalidad

De acuerdo con [29.56]:

$$E_{cat} = 6500(25 + 8)^{1/3} = 20848\ N/mm^2$$

$$m = \frac{200,000}{20.848} = 9,6$$

$$q = 0,0047$$

$$mq = 0,045$$

De [29.55]:

$$\frac{\Delta\ell}{\ell} = 10^{-5}\,\frac{0,7(70 - 20) - (45 - 20)}{1 + 0,045\left(1 + \frac{300}{10}\right)} = 0,0000418$$

$$\Delta\ell = 0,0000418 \cdot 3000 = 0,13\ mm$$

y de [29.51] y [29.57]

$$\sigma_{pat,d} = \left[\,1442 - 10^{-5} \cdot 2 \cdot 10^5\,(45 - 20) + \frac{0,13}{100}\,2 \cdot 10^5\,\right] = 1652\ N/mm^2$$

que supera claramente la tensión del límite de proporcionalidad.

Luego no son aplicables las fórmulas [29.51] a [29.54] por no ser lineal la relación $\sigma - \varepsilon$ y debe seguirse el método gráfico. (Figura 29-23)

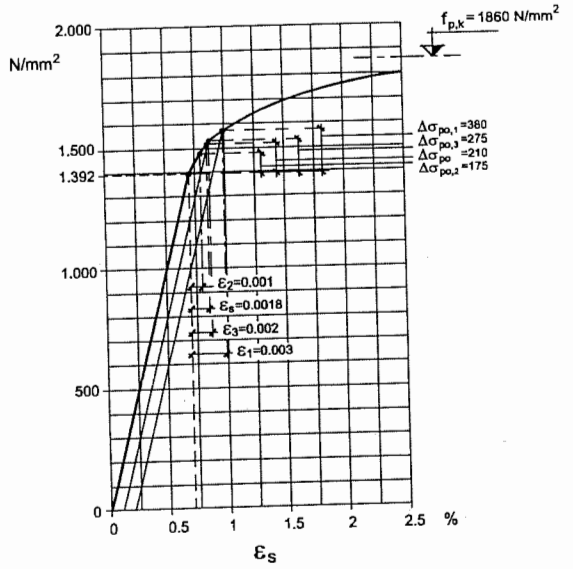


Figura 29-23

$$\sigma_{pe} - \alpha E_s(\theta_t - \theta_a) = 1442 - 10^{-5} \cdot 2 \cdot 10^5\,(45 - 20) = 1392\ N/mm^2$$

Tanteamos en primer lugar $\Delta\ell_1 = 0,3\ mm$

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta\ell}{b} = \frac{0,3}{100} = 0,003$$

Entrando con este valor en el gráfico de la figura 29-23 a partir del alargamiento correspondiente a la tensión de 1392 N/mm^2 se tiene:

$$\Delta\sigma_{po,1} = 175\ N/mm^2$$

$\frac{\Delta\ell_1}{\ell} = \frac{0,3}{3000} = 0,0001$ y sustituyendo [29.60], [29.61] y [29.62] se tiene:

$$F_{d1} = 50,3[1392 + 380] = 78.820\ N$$

$$F_{a1} = 50{,}3[1392 - 0{,}0001 \cdot 2 \cdot 10^5] = 69.012\ N$$

$$F_{ct1} = 10.600 \cdot 20.848[10^{-5}\,(0{,}7(70 - 20) - (45 - 20)) - 0{,}0001] = 0$$

$$F_{d1} - (F_{a1} + F_{ct1}) = 9.808\ N$$

Tanteamos en segundo lugar $\Delta\ell_2 = 0{,}1$ mm

$$\varepsilon_2 = \frac{0{,}1}{100} = 0{,}001$$

y entrando en el gráfico $\Delta\sigma_{po2} = 80$ N/mm^2 y $\frac{\Delta\ell}{\ell} = \frac{0{,}1}{3000} = 0{,}000033$

$$F_{d2} = 50{,}3\ [1{,}392 + 80] = 74.042\ N$$

$$F_{a2} = 50{,}3\ [1{,}392 - 0{,}000033 \cdot 2 \cdot 10^5] = 69686\ N$$

$$F_{ct2} = 10600 \cdot 20848[10^{-5}\,(0{,}7(70 - 20) - (45 - 20)) - 0{,}000033] = 14806\ N$$

$$F_{d2} - (F_{a2} + F_{ct2}) = -10.450\ N$$

Realizamos un último tanteo con un valor mayor de $\Delta\ell$:

$$\Delta\ell_3 = 0{,}2mm \qquad \varepsilon_3 = \frac{\Delta\ell_3}{b} = \frac{0{,}2}{100} = 0{,}002$$

y entrando en el gráfico $\Delta\sigma_{po,3} = 140\ N/mm^2$

$\frac{\Delta\ell_3}{\ell} = \frac{0{,}2}{3000} = 0{,}000067$ y sustituyendo

$$F_{d3} = 50{,}3\ [1{,}392 + 140] = 77.060\ N$$

$$F_{d3} = 50{,}3\ [1{,}392 - 0{,}000067 \cdot 2 \cdot 10^5] = 69.344\ N$$

$$F_{c3} = 10600 \cdot 20848[10^{-5}\,(0{,}7(70 - 20) \cdot (45 - 20)) - 0{,}000067] = 7293\ N$$

$$F_{d3} - (F_{a3} + F_{c3}) = 423\ N$$

que es un error sin trascendencia

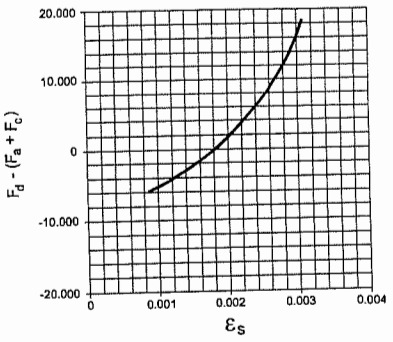


Figura 29-24

Las tensiones resultan:

$$\sigma_{pat,d} = \frac{F_d}{50{,}2} = 1.532\ N/mm^2$$

$$\sigma_{pat,a} = \frac{F_a}{50{,}3} = 1.379\ N/mm^2$$

$$\sigma_{cat} = \frac{F_c}{10600} = -0{,}69\ N/mm^2$$

Es interesante comparar las tensiones anteriores de piezas con separadores, con las que ocurrirían en pieza continua fabricada con máquina "ponedora".

A continuación se dan los resultados. (Los cálculos se omiten por brevedad, ya que son análogos al realizado):

– Longitud de pieza $\ell = 107$ m

Longitudes desnudas en cabezas $b = 1{,}50\ m$

$\sigma_{pat,d} = 1678\ N/mm^2$

$\sigma_{pat,a} = 1384\ N/mm^2$

$\sigma_{cat,} = -1{,}05\ N/mm^2$

– Longitud de pieza $\ell = 109{,}40\ m$

Longitudes desnudas en cabezas $b = 0{,}30\ m$

$\sigma_{pat,d} = 1795\ N/mm^2$

$\sigma_{pat,a} = 1388\ N/mm^2$

$\sigma_{cat,} = -1{,}43\ N/mm^2$

Como puede verse el uso de ponedoras aumenta de manera importante la tracción del hormigón lo que puede obligar a variar la tensión de transferencia, o a interrumpir el hormigonado en algunos puntos a lo largo de la mesa. La tensión en la armadura

adherida apenas varía. La tensión en la armadura desnuda aumenta, pero sólo puede llegar a ser peligrosa (rotura en anclajes si éstos no son muy perfeccionados) si b es extremadamente pequeña, cosa que es imposible por razones prácticas de disposición de la máquina "ponedora".

La pérdida por dilatación, de acuerdo con [29.66]

$$\Delta P_8 = 50{,}3 \cdot 0{,}7 \cdot 10^{-5} (70 - 20) = 3521\ N$$

La tensión del acero inmediatamente antes de la transferencia de la comprensión es, de acuerdo con [29.67]:

$$\sigma_{po} = 1442 - 0{,}7 \cdot 10^{-5} \cdot 2 \cdot 10^5 (70 - 2) = 1372\ N/mm^2$$ [1]

o sea, que hasta el momento se ha perdido:

$$\frac{1503 - 1372}{1503} = 8{,}7\%$$ de la tensión inicial

f) Pérdida ΔP_{10} por acortamiento elástico al trasferir

El peso propio de la viga por m es $p = 10.600 \cdot 25 \cdot 10^{-6} = 0{,}265$ N/mm $= 0{,}265\ kN/m$

$$M_{pp} = \frac{1}{8} 0{,}265 \cdot 6{,}00^2 = 1{,}19\ mkN$$

Con $E_{ci} = 8.500\ (25 + 8)^{1/3} = 27.264\ N/mm^2$

$$M = \frac{2 \cdot 10^5}{27.264} = 7{,}3$$

y de acuerdo con [29.72]:

$$\Delta P_{10} = 50{,}3 \frac{7{,}3 \cdot 0{,}0047 \left[1 + \left(\frac{2{,}86}{6{,}04}\right)^2\right][1442 - 0{,}7 \cdot 10^{-5} \cdot 2 \cdot 10^5 (70 - 20)]}{1 = 7{,}3 \cdot 0{,}0047 \left[1 + \left(\frac{2{,}86}{6{,}04}\right)^2\right]} = 2781\ \text{N}$$

$\Delta P_{10} = 3{,}68\%$ de P_{ki}

Por tanto

$$\sigma_{pt} = 1442 - 0{,}7 \cdot 10^{-5} \cdot 2 \cdot 10^5 (70 - 20) - \frac{2.781}{50{,}3} = 1.317\ N/mm^2$$

y se cumplen las condiciones de EHE

1 Obsérvese qu esta tensión corresponde al instante en que es nula la tensión en el hormigón, es decir cuando en la transferencia se ha anulado la tracción del hormigón. La tensión antes de transferir, estrictamente hablando, sería $\sigma_{pat,a}$, que como hemos visto es de 1379 N/mm^2.

$\sigma_{pt} < 0{,}75 \cdot 1.860 = 1.395\ N/mm^2$

$\sigma_{pt} < 0{,}90 \cdot 1.582 = 1.424\ N/mm^2$

luego la tensión inicial elegida es válida.

El peso propio de la pieza es de 0,265 N/mm y considerando la sección central,

$$M_{pp} = 1{,}19\ mkN$$

La tensión del hormigón en el c.d.g. de la armadura pretensada, debida a la fuerza de pretensado

$$\sigma_{cp} = \frac{1.317 \cdot 50{,}3}{10.600} \left[1 + \left(\frac{e}{r}\right)^2\right] = 7{,}65\ N/mm^2$$

La tensión del hormigónen el c.d.g. de la armadura pretensada, debida al *pp* de la vigueta, en la sección central vale:

$$\sigma'_{cp} = -\frac{1.190.000 \cdot 28{,}6}{32.720.000} = -0{,}88\ N/mm^2$$

$$\sigma_{cp} + \sigma'_{cp} = 7{,}65 - 0{,}88 = 6{,}77\ N/mm^2$$

g) Pérdida ΔP_{dif} debida a retracción, fluencia y relajación de la armadura

Utilizaremos la fórmula [29.43] y descompondremos el cálculo en dos períodos:

g-1) Período de estancia en parque, con T =14°C, HR = 50% y duración 60 días

Cálculo de $m\varphi\ (t,t_o)$

$$E'_{ci} = 8500(40 + 8)^{1/3} = 30.887\ N/mm^2$$

Edad corregida por el curado térmico:

$$t_{o,T} = 1 \cdot e^{-\left[\frac{4000}{271+40} - 13{,}65\right]} = 2{,}2$$

(Se ha supuesto 1 día de duración a una temperatura media de 40°C).

$$\phi_o(60 \cdot 2{,}2) = \phi_{HR} \cdot \beta(f_{cm}) \cdot \beta(t_o) \cdot \beta_c(t - t_o)$$

$$e_f = \frac{2 \cdot 10.600}{660} = 32{,}1\ mm$$

$$\phi_{HR} = 1 + \frac{100 - 50}{9{,}9 \cdot 32{,}1^{1/3}} = 2{,}59$$

$$\beta(f_{cm}) = \frac{16,8}{\sqrt{40+8}} = 2,41$$

$t_o = 2,2\left[\frac{9}{2+2,2^{1,2}}+1\right]^1 = 6,5$ días. (Cemento de alta resistencia y endurecimiento rápido)

$$\beta(t_o) = \frac{1}{0,1+6,5^{0,2}} = 0,64$$

$$\beta_H = 150\left(1+\left[1,2\ \frac{50}{100}\right]^{18}\right)\frac{32,1}{100}+250 = 298$$

$$\phi_o\ (60\cdot 6,5) = 2,59\cdot 2,41\cdot 0,64\left[\frac{60-65}{298+60-6,5}\right]^{0,3} = 2,27$$

La corrección por temperatura bajo carga se desprecia.

Cálculo de $\varepsilon_{cs}\ (t-t_o)$

$$\varepsilon_s(f_{cm}) = \left[160+10\cdot 8\left(9-\frac{40+8}{10}\right)\right]10^{-6} = 496\cdot 10^{-6}$$

$$\beta_{HR} = -1,55\left[1-\left(\frac{50}{100}\right)^3\right] = -1,36$$

$$\beta_{rT} = 1+\left(\frac{8}{103-HR}\right)\left(\frac{T-20}{40}\right) = 1+\frac{8}{53}\cdot\frac{14-20}{40} = 0,98$$

$$\varepsilon_{cs.o} = -496\cdot 1,36\cdot 0,98\cdot 10^{-6} = -661\cdot 10^{-6}$$

y con $e_f = 32,1\ mm$

$$\beta_s\ (60-1) = \left[\frac{60-1}{0,035\cdot 32,1^2\ e^{-0,06(14-20)}}\right]^{0,5} = 0.73$$

$$\varepsilon_{cs}\ (60-1) = -661\cdot 10^{-6}\cdot 0.73 = -0.000482$$

Cálculo de $\Delta\sigma_{pr}$

De acuerdo con lo expuesto al haber aplicado curado al vapor este valor se considera nulo.

Cálculo de $\chi\varphi(60,1)$

Con $e_f = 32,1$ y estimando $\phi_{f1} \approx 2$ entramos en el GT-71 y se obtiene aceptando $t_o = 3$ dado el tipo de curado

$\chi(60,1) = 0,58$

Aplicando [29.41] con $m = \frac{200.000}{30.890} = 6,5$

$$\Delta_1 P_{dif} = 50,3\frac{6,5\cdot 6,77\cdot 2,27+200.000\cdot 0,000482}{1+\frac{6,5\cdot 7,65}{1317}(1+0,58\cdot 2,27)} = 9079\ N$$

$\Delta_1 P_{dif} = 12,0\%$ de P_{ki}

g-2) Período desde la construcción del forjado

Abarca desde los 60 días, $T_m = 20°C$, $HR = 50\%$.

Como $M_g = 4,90\ m\ kN$

$$\sigma_{cp} = 7,65\ N/mm^2$$

$$\sigma'_{cp} = -\frac{4.900.000\cdot 80}{122.000.000} = -3,21\ N/mm^2$$

$$\sigma_{cp}+\sigma'_{cp} = 7,65-3,21 = 4,44\ N/mm^2$$

Cálculo de $\varphi(\infty,60)$

Suponemos igual e_f

$$\phi_{0(\infty,60)} = \phi_{HR}\cdot\beta(f_{cm})\cdot\beta(t_o)\cdot[\beta_c\ (\infty-t_o)-\beta_c\ (60-t_o)]$$

$$\phi_{HR} = 2,59$$

$$\beta(f_{cm}) = 2,41$$

$$t_o = 6,5\ \text{días}$$

$$\beta(t_o) = 0.64$$

$$\beta_H = 298$$

$$\phi_{(\infty,60)} = 2,59\cdot 2,41\cdot 0,64[\beta_c\ (\infty-t_o)-\beta_c\ (60-t_o)] = 4,00(1-0,57) = 1,72$$

Cálculo de $\varepsilon_{cs}(\infty,60)$

$$\varepsilon_s(f_{cm}) = 496\cdot 10^{-6}$$

$$\beta_{HR} = -1{,}36$$

$$\varepsilon_{cs,o} = -675 \cdot 10^{-6}$$

y con $e_f = 32{,}1$ *mm*

$$\varepsilon_{cs}(\infty,60) = -675 \cdot 10^{-6}[\beta_s(\infty - t_o) - \beta_s(60 - t_o)] = -675 \cdot 10^{-6}(1 - 0{,}79) = -0{,}000142$$

Cálculo de $\Delta\sigma_{pr}$.

Tal como se dijo en g-1) la consideramos nula.

Cálculo de $\chi\varphi(\infty,60)$

Estimando $\varphi_{fl} \approx 2$ y entramos con $e_f = 32{,}1$ en el GT-71, para 10^4 días (equivalente a plazo infinito), con $t_o = 3$ días.

Para 10.000 días $\chi = 0{,}54$

Aplicando [29.43] con $m = 6{,}5$

$$\Delta_2 P_{dif(\infty,60)} = 50{,}3\frac{6{,}5 \cdot 4{,}44 \cdot 1{,}72 + 200.000 \cdot 0{,}000142}{1 + \dfrac{6{,}5 \cdot 7{,}65}{1317}(1 + 0{,}54 \cdot 1{,}72)} = 3659\ N$$ [1]

$\Delta_2 P_{dif(\infty,60)} = 4{,}84\%$ de P_{ki}

Las pérdidas diferidas totales son por tanto

$$\Delta P_{dif} = \Delta_1 P_{dif} + \Delta_2 P_{dif} = 9079 + 3659 = 12.738\ N$$

$$\Delta P_{dif} = 16{,}85\%$$

RESUMEN DE PÉRDIDAS

Pérdidas hasta la transferencia:

$$\Delta P_{tr} = \Delta P_1 + ... + \Delta P_8 = 228 + 377 + 2484 + 3521 + 2781 = 9391\ N$$
$$= 12{,}48\% \text{ de } P_{ki}$$

Pérdidas posteriores a la transferencia:

$$\Delta P_{dif} = 12.738\ N$$
$$= 16{,}85\% \text{ de } P_{ki}$$

Pérdidas totales:

$$\Delta P_t = 22.129\ N$$
$$\Delta P_t = 29{,}3\% \text{ de } P_{ki}$$

1 Se considera el valor negativo porque de acuerdo con [28.6]. $f_{cn}, f_{lex} = 4{,}98\ N/mm^2$

(Obsérvese que a pesar de ser la cuantía sólo $q = 0{,}0047$, las pérdidas totales han superado las del caso de armaduras postesas del Ejemplo 29.1, que tenía una cuantía casi doble $q = 0{,}008$).

CÁLCULO DE PÉRDIDAS POR EL MÉTODO SIMPLIFICADO

a) Se omiten también las pérdidas $\Delta_s P_1$ y $\Delta_2 P_2$

b) Pérdida $\Delta_s P_3$ por deslizamiento de cuñas de anclaje.

De acuerdo con [29.79]

$$\Delta_s P_3 = \frac{2{,}5}{110.000} 50{,}3 \cdot 2 \cdot 10^5 = 229\ N$$

c) Pérdida $\Delta_s P_4$ por relajación isoterma a la temperatura ambiente.

De acuerdo con [29.80]

$$\lambda = 0{,}15 \quad \gamma = 2$$

$$\Delta_s P_4 = 0{,}15 \cdot 2 \cdot 0{,}02(75.600 - 229) = 452\ N$$

d) Pérdidas $\Delta_s P_5 + \Delta_s P_6 + \Delta_s P_9$ por relajación adicional debida al sistema de calefacción. (Pérdidas $\Delta_s P_5$, $\Delta_s P_6$, $\Delta_s P_9$ del método general).

Según se dijo, para armaduras sometidas a procesos de estabilización

$$\Delta_s P_3 = 0{,}04\ (75.600 - 229) = 3015\ N$$

e) Pérdida $\Delta_s P_8$ debida a la dilatación térmica

$$\Delta_s P_8 = 50{,}3 \cdot 0{,}7 \cdot 10^{-5} \cdot 2 \cdot 10^5 (70 - 20) = 3521\ N$$

f) Pérdida $\Delta_s P_{10}$ por acortamiento elástico al transferir.

$$\sigma_{pat} = 1503 - \frac{1}{50{,}3}(229 + 452 + 3015 + 3521) = 1360\ N/mm^2$$

Con $q = 0{,}0047$ y $m = 7{,}3$ y $\dfrac{e}{r} = \dfrac{28{,}6}{60{,}4} = 0{,}47$ en el gráfico de la figura 29-17

se obtiene $\lambda = 0{,}04$ y $\Delta_s P_{10} = 50{,}3 \cdot 0{,}04 \cdot 1360 = 2735\ N$

$$\sigma_{pt} = 1360 - \frac{2735}{50{,}3} = 1306\ N/mm^2$$

g) Pérdida $\Delta_s P_{11}$ por retracción

De acuerdo con [29.84] y con la tabla T-28.5 para clima medio y $e_f = 32{,}1$, $\varepsilon_{cs} = -0{,}57$

$$\Delta_s P_8 = 0{,}00057 \cdot 50{,}3 \cdot 2 \cdot 10^5 = 5734\ N$$

h) Pérdida $\Delta_s P_{12}$ por fluencia del hormigón

El valor de la tensión en la armadura después de transferir es:

$$\sigma_{pt} = 1306\ N/mm^2$$

y $$\sigma_{ct} = 1306 \cdot 0{,}0047\left[1 + \left(\frac{28{,}6}{60{,}4}\right)^2\right] = 7{,}51\ N/mm^2$$

de acuerdo con [29.85], para ambiente medio en la Tabla T-28.4:

$$\Delta_s P_9 = 4{,}0\,\frac{7{,}51}{25}\,2735 = 3286\ N$$

Se adopta $t_o = 7$ *días* para tener en cuenta el envejecimiento debido al proceso de calefacción.

i) Pérdida $\Delta_s P_{13}$ por relajación diferida del acero

De acuerdo con [29.83]

$$\Delta_s P_8 = 0$$

j) Fuerza permanente de pretensado

$$P_{kf} = 75.600 - \sum_1^8 \Delta_s P_i = 56.628\ N$$

COMPARACIÓN ENTRE LOS TRES MÉTODOS DE CÁLCULO

En el cuadro C-29.1, se resumen los tres cálculos. Como se ve, la aproximación es muy buena y para la mayoría de los casos el método simplificado es suficiente. El método de tanteos para $\frac{e}{r} = 0{,}47$ y $q = 0{,}0047$ da 23,5% para las pérdidas totales y $0{,}66 \cdot 23{,}5 = 15{,}5$ para las pérdidas hasta la transferencia, lo que supone también una buena aproximación.

El método puede conducir a una ligera infravaloración en piezas de espesor medio pequeñas y puede conducir a una sobrevaloración de las pérdidas, aunque no de excesiva importancia para piezas gruesas, por lo que el método tiene interés en genèral para piezas pretensadas con armaduras pretesas de cualquier tipo, con aproximación suficiente para las necesidades de proyectos simples.

En el ejemplo analizado, el método general da valores más altos, pero debe tenerse en cuenta que es un caso en el que la tensión permanente de pretensado a nivel de c.d.g. en la armadura activa es de 4,44 N/mm², valor poco frecuente en la práctica y que motiva importantes pérdidas diferidas.

CUADRO C-29.1

CONCEPTO	MÉTODO GENERAL		MÉTODO SIMPLIFICADO		MÉTODO PARA TANTEOS	
	PÉRDIDA		PÉRDIDA		*PÉRDIDA*	
	En N	En % de P_{ki}	En N	En % de P_{ki}	En N	En % de P_{ki}
Deslizamiento de cuñas	228	0,30	229	0,3		
Relajación isoterma durante el tiempo de espera	377	0,5	452	0,6		
Relajación adicional durante el tratamiento de calefacción	2484	3,29	3015	4,0		
Retracción inicial	-	-	-	-		
Pérdidas por dilación térmica	3521	4,66	3521	4,66		
Pérdida por acortamiento elástico	2781	3,68	2735	3,6		
PÉRDIDAS INMEDIATAMENTE DESPUÉS DE LA TRANSFERENCIA	9391	12,4	9952	13,2	11718	13.2
Pérdida por retracción diferida	12.738	16,85	5734	7,6		
Pérdida por fluencia			3286	4,3		
Pérdida por relajación diferida			0	-		
PÉRDIDAS TOTALES	22.129	29,3	18.972	25,1	17.776	23,5

(29.1) MODEL CODE CEB-FIP 1990 FOR STRUCTURAL CONCRETE (1990).

(29.2) GERWICK, B.C.; "Construction of Prestressed concrete Structures". Wiley-Interciencie. New York. 1971.

(29.3) "Recomendaciones para la ejecución y el control del tesado de las armaduras postesas". H.P.2-73. ATEP. Instituto Eduardo Torroja de la Construcción y del Cemento. Madrid. Noviembre 1973.

(29.4) "Tensioning of tendons: force-elongation relationship". Commission on Practical Construction. FIP. Thomas Telford. Londres. 1986.

(29.5) CEB Manual on "Structural Effects of Time-dependent Behaviour of Concrete". Georgi Publishing Company. Saint-Saphorin (Suiza). 1984.

(29.6) FAVRE, R.; KOPRNA, M; RADOJICIC, A.; "Effets différés, fissuration et déformations des structures en beton". Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Departement de Génie Civil. Georgi Saint-Saphorin. Lausanne. 1980.

(29.7) CHAUSSIN, R.; FUENTES, A.; LACROIX, R.; PERCHAT, J.; "La Précontrainte". Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées. Paris. 1992.

CAPÍTULO 30

CONSIDERACIÓN DE LA DURABILIDAD EN EL PROYECTO

30.1 INTRODUCCIÓN

Además de su capacidad resistente desde el punto de vista mecánico, es decir de su capacidad para resistir las solicitaciones producidas por las acciones aplicadas a la estructura, ésta ha de ser también capaz de resistir durante su periodo de vida útil las agresiones físicas y químicas a las que está expuesta de acuerdo con su emplazamiento y funcionamiento.

Aunque muchos aspectos relacionados con la durabilidad de las estructuras de hormigón son tratados en diferentes capítulos a través de este libro, ha parecido conveniente dedicarle éste específicamente.

Ello es debido a la importancia que el tema presenta hoy, dados los frecuentes problemas registrados. Debe reconocerse que con frecuencia hay una gran preocupación por los temas relacionados con el cálculo, que no se equilibra con una análoga preocupación por los temas de concepción y de ejecución, lo cual conduce a que muchas estructuras tengan una vida útil bastante más corta de la teóricamente presumible. Véase TASSIOS (30.1).

Existe una cierta tendencia a simplificar el problema identificándolo únicamente con los procesos derivados de los materiales empleados en la estructura o con las condiciones de ejecución.

Ciertamente estas cuestiones tienen una incidencia importante sobre la durabilidad, pero no es menor la que tiene sobre ella el proyecto.

La consideración de la durabilidad en el proyecto ha de hacerse a través de una "estrategia" adecuada que considere todas las fases de desarrollo de la obra y todos los mecanismos de agresión que ésta pueda sufrir.

30.2 GENERALIDADES

Una buena exposición, breve, de los aspectos de la durabilidad relacionados con el proyecto está contenida en el Model Code C.E.B. - F.I.P. 90. Una información más detallada puede obtenerse en el Boletín de Información nº 182 del C.E.B. (Junio de 1989) "DURABLE CONCRETE STRUCTURES C.E.B. DESIGN GUIDE" (30.2). Es interesante también la publicación del ACI "GUIDE DURABLE CONCRETE" (ACI-201.2R-77) (reaprobada en 1982) (30.3). Véanse también las referencias (30.4), (30.5), (30.6) y (30.7).

Los requisitos básicos del proyecto en relación con la durabilidad los expresa claramente el Model Code C.E.B. 90 en el párrafo siguiente:

"Las estructuras de hormigón deben ser proyectadas, construidas y utilizadas de tal manera que, bajo las influencias medio-ambientales previstas, mantengan su seguridad, serviceabilidad y apariencia aceptable durante un periodo de tiempo explícito o implícito sin requerir costes anormalmente altos de mantenimiento y reparación".

Los medios para conseguir esto involucran a todas las personas que intervienen en el proceso de construcción del edificio. En particular deben destacarse las siguientes:

- El Propietario debe definir el uso futuro del edificio así como el período de vida útil que desea.
- El Proyectista, redactando en función de lo anterior todos los documentos del Proyecto y en particular el Pliego de Condiciones y el sistema previsto de Control de Calidad.
- El Contratista que debe ceñirse a las calidades y procedimientos contratados para desarrollar la construcción.
- Finalmente, el Usuario es responsable no solamente del correcto uso del edificio, sino también de su mantenimiento adecuado y de la pronta realización de las reparaciones que eventualmente fueran necesarias.

En general, las especificaciones de las normas actuales y, en particular, las del Model Code-90 o normas equivalentes tales como las que se vienen manejando en el presente libro, conducen a una vida útil de la estructura por encima de 50 años, dentro de los ambientes considerados en el Capítulo 42, Tabla T-42.3. Sin embargo, este aspecto está relacionado con los deseos del propietario, pues pueden requerirse estructuras para vidas útiles superiores a los 100 años mientras que muchas otras podrían ser proyectadas para una vida útil por debajo de los 50 años.

En todo lo anterior se parte de suponer que en el Proyecto, el Pliego de Condiciones es el documento que más eficazmente puede especificar los materiales que han de emplearse y la forma en que la estructura debe ser construida, aspectos ambos de esencial importancia para la durabilidad.

Finalmente, el propio Proyecto debe establecer unas Normas de Uso y Mantenimiento del edificio y prever un sistema de inspecciones sistemáticas de la estructura y de forma que el deterioro pueda ser detectado y evaluado en su período inicial y haya tiempo para tomar las medidas adecuadas por vistas al mantenimiento y reparación.

Los mecanismos de agresión pueden ser muy variados, y entre ellos cabe destacar [1]:

1 Una exposición más detallada puede verse en J. CALAVERA (30.8) y una exposición general en (30.7)

a) ATAQUES AL HORMIGÓN

- **Cambios de color en el hormigón**. Pueden ser debidos a cambios de color entre partidas de cemento, a la acción de la luz solar, a las reparaciones efectuadas, etc.
- **Erosión**. Se presenta en dos grandes grupos. Uno es el debido al desgaste por abrasión, producido por tráfico, procesos industriales, a veces el oleaje, etc. El otro es el fenómeno de cavitación en obras hidráulicas, cuando la lámina de agua tiende a separarse de la superficie del hormigón creando zonas de baja presión, llegando a ser inferior a la del vapor.
- **Acción de la helada.** Cuando el agua se congela en los poros aumenta su volumen en un 9%, lo que crea tensiones que pueden fracturar el hormigón.
- **Ataque biológico.** Presenta variantes múltiples tales como aguas residuales que contienen ácido sulfúrico, obras en contacto con abonos naturales, etc.
- **Agresión medioambiental**. Toma la forma de depósitos de polvo, cultivos biológicos, etc.
- **Contacto con suelos agresivos.** Son casos que deben ser especialmente considerados en el proyecto de cimentaciones, muros, túneles, etc.
- **Ataques químicos al hormigón.** Se presentan en modalidades muy diferentes, pero todas ellas tienen algunos aspectos comunes.
  - *Existe un mecanismo de transporte de moléculas e iones de la sustancia agresiva a la reactiva.*
  - *Si no hay humedad, la reacción no se produce o lo hace a velocidad tan baja que no representa riesgo.*
  - *La agresión crece rápidamente al aumentar la temperatura.*

Son casos típicos los ataques de ácidos a la pasta hidratada del cemento, la formación de sales expansivas, la reacción con cationes, etc.

- **Caso particular de los ataques de ácidos.** Pueden destacarse los ataques directos por ácidos en disolución y la carbonatación. Esta última se debe a la penetración del CO_2 del aire en la estructura porosa de la superficie de la pieza del hormigón. Es debida a la reacción del CO_2 con la cal libre del cemento, formándose carbonato, lo que conduce a un descenso del pH del hormigón desde el valor usual de 13 hasta valores del orden de 9, es decir a que el hormigón pierda su basicidad y deje de proteger a las armaduras. De una fórmula aproximada, la carbonatación crece con la raíz cuadrada del tiempo. En un buen hormigón rara vez supera los 10 mm en 25 años. En cambio como el proceso es tanto más intenso cuanto mayor es la permeabilidad y ésta es muy alta si el curado es defectuoso, de ahí la fuerte relación entre durabilidad y curado.

  La carbonatación crece con los cambios de humedad y con la temperatura, pero no existe en hormigones saturados.

- **Formación de sales expansivas.** El caso más habitual es el de aguas que disuelven sulfato cálcico de terrenos yesíferos y circulan en contacto con el hormigón.

- **Reacciones con cationes.** Son muy variadas, pudiéndose destacar las reacciones alcali-árido y las reacciones con amonio.

b) ATAQUES A LA ARMADURA.

Son, con mucho, la principal causa de daños en las construcciones de hormigón, aunque en la mayoría de los casos ello es debido a la omisión de precauciones elementales en el proceso constructivo y por otra parte el tema es a menudo exagerado por contemplaciones de ámbito restringido del problema, que es muy amplio.

Las tres clases de corrosión más importantes son:

- La corrosión electroquímica, que puede darse tanto en armaduras pasivas como activas.
- La corrosión bajo tensión de las armaduras activas.
- La fragilización por hidrógeno que es un caso particular de la anterior.

La agresividad ambiental se establece de acuerdo con lo indicado en la Tabla T-30.1, para lo referente a la corrosión de armaduras.

La T-30.2 indica las clases de exposición para agresividades diferentes de la corrosión de armaduras.

TABLA T-30.1

CLASE GENERAL DE EXPOSICIÓN				DESCRIPCIÓN	EJEMPLOS
Clase	Subclase	Designación	Tipo de proceso		
no agresiva		I	ninguno	– interiores de edificios, no sometidos a condensaciones – elementos de hormigón en masa	– interiores de edificios, protegidos de la intemperie
normal	**humedad alta**	IIa	corrosión por carbonatación	– interiores sometidos a humedades altas o a condensaciones – exteriores en ausencia de cloruros, y expuestos a lluvia en zonas con precipitación media anual superior a 600 mm – elementos enterrados o sumergidos	– sótanos no ventilados – cimentaciones (*) – tableros y pilas de puentes en zonas con precipitación media anual superior a 600 mm – elementos de hormigón en cubiertas de edificios
	humedad media	IIb	corrosión por carbonatación	– exteriores en ausencia de cloruros, sometidos a la acción del agua de lluvia, en zonas con precipitación media anual inferior a 600 mm	– construcciones exteriores protegidas de la lluvia – tableros y pilas de puentes, en zonas de precipitación media anual inferior a 600 mm
marina	**aérea**	IIIa	corrosióu por cloruros	– elementos de estructuras marinas, por encima del nivel de pleamar – estructuras situadas en las proximidades de la línea costera (a menos de 5 km)	– edificaciones en las proximidades de la costa – puentes en las proximidades de la costa – zonas aéreas de diques, pantanales y otras obras de defensa litoral – instalaciones portuarias
	sumergida	IIIb	corrosión por cloruros	– elementos de estructuras marinas sumergidas permanentemente, por debajo del nivel mínimo de bajamar	– zonas sumergidas de diques, pantanales y otras obras de defensa litoral – cimentaciones y zonas sumergidas de pilas de puentes en el mar
	en zona de mareas	IIIc	corrosión por cloruros	– elementos de estructuras marinas situados en la zona de carrera de mareas	– zonas en la carrera de marea de diques, pantanales y otras obras de defensa litoral – zonas de pilas de puentes sobre el mar, situadas en la carrera de marea
con cloruros de origen diferente del medio marino		IV	corrosión por cloruros	– instalaciones no impermeabilizadas en contacto con agua que presente un contenido elevado de cloruros, no relacionados con el ambiente marino – superficies expuestas a sales de deshielo no impermeabilizadas	– piscinas – pilas de pasos superiores o pasarelas en zonas de nieve – estaciones de tratamiento de agua

(*) Si la cimentación está enterrada y en suelo seco este caso no parece oportuno como ejemplo (N del A)

TABLA T-30.2

CLASE ESPECÍFICA DE EXPOSICIÓN				DESCRIPCIÓN	EJEMPLOS
Clase	Subclase	Designación	Tipo de proceso		
química agresiva	débil	Qa	ataque químico	– elementos situados en ambientes con contenidos de sustancias químicas capaces de provocar la alteración del hormigón con velocidad lenta	– instalaciones industriales, con sustancias débilmente agresivas – construcciones en proximidades de áreas industriales, con agresividad débil
	media	Qb	ataque químico	– elementos en contacto con agua de mar – elementos situados en ambientes con contenidos de sustancias químicas capaces de provocar la alteración del hormigón con velocidad media	– dolos, bloques y otros elementos para diques – estructuras marinas, en general – instalaciones industriales con sustancias de agresividad media – construcciones en proximidades de áreas industriales, con agresividad media – instalaciones de conducción y tratamiento de aguas residuales con sustancias de agresividad media
	fuerte	Qc	ataque químico	– elementos sitnados en ambientes con contenidos de sustancias químicas capaces de provocar la alteración del hormigón con velocidad rápida	– instalaciones industriales con sustancias de agresividad alta – instalaciones de conducción y tratamiento de aguas residuales, con sustancias de agresividad alta
con heladas	sin sales fundentes	H	ataque hielo-deshielo	– elementos situados en contacto frecuente con agua, o zonas con humedad relativa media ambiental en invierno superior al 75%, y que tengan una probabilidad anual superior al 50% de alcanzar al menos una vez temperaturas por debajo de -5°C	– construcciones en zonas de alta montaña – estaciones invernales
	con sales fundentes	F	ataque por sales fundentes	– elementos destinados al tráfico de vehículos o peatones en zonas con más de 5 nevadas anuales o con valor medio de temperatura mínima en los meses de invierno inferior a 0°C	– tableros de puentes o pasarelas en zonas de alta montaña
erosión		E	abrasión cavitación	– elementos sometidos a desgaste superficial – elementos de estructuras hidráulicas en los que la cota piezométrica pueda descender por debajo de la presión de vapor de agua	– pilas de puentes en cauces muy torrenciales – elementos de diques, pantanales y otras obras de defensa litoral que se encuentren sometidos a fuertes oleajes – pavimentos de hormigón – tuberias de alta presión

Finalmente la tabla T-30.3 indica los distintos tipos de agresión química.

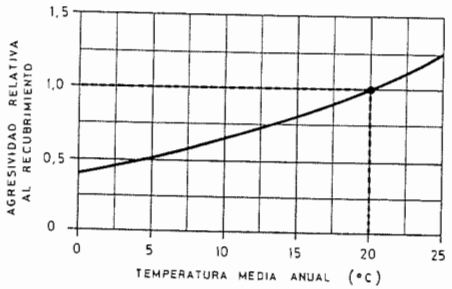
TABLA T-30.3

TIPO DE MEDIO AGRESIVO	PARÁMETROS	TIPO DE EXPOSICIÓN		
		Qa ATAQUE DÉBIL	Qb ATAQUE MEDIO	Qc ATAQUE FUERTE
AGUA	VALOR DEL pH	6,5 - 5,5	5,5 - 4,5	< 4,5
	CO_2 AGRESIVO (mg CO_2/ l)	15 - 40	40 - 100	> 100
	IÓN AMONIO (mg NH_4^+ / l)	15 - 30	30 - 60	> 60
	IÓN MAGNESIO (mg Mg^{2+} / l)	300 - 1000	1000 - 3000	> 3000
	IÓN SULFATO (mg SO_4^{2-} / l)	200 - 600	600 - 3000	> 3000
	RESIDUO SECO (mg / l)	> 150	50-150	< 50
SUELO	GRADO DE ACIDEZ BAUMANN-GULLY	> 20	(*)	(*)
	IÓN SULFATO (mg SO_4^{2-} /Kg de suelo seco)	2000 - 3000	3000 -12000	> 12000

(*) Estas condiciones no se dan en la práctica

Debe observarse que por supuesto, diferentes partes de una misma estructura pueden estar sometidas a diferentes clases de exposición. Por supuesto, un mismo elemento no puede considerarse sometido a más de una subclase.

En lo que se refiere a la agresividad medioambiental un aspecto de esencial importancia es el de la temperatura. La Fig. 30-1 indica la agresividad en relación con el recubrimiento para distintas temperaturas medias anuales. Obsérvese que esto



INFLUENCIA DE LA TEMPERATURA SOBRE LA AGRESIVIDAD MEDIOAMBIENTAL EN RELACIÓN CON EL RECUBRIMIENTO

Figura 30-1

conduce a que en climas cálidos el índice sea del orden del doble que en climas fríos. Para muchas agresiones relacionadas con reacciones químicas una regla simple establece que un incremento de 10 °C en la temperatura duplica la velocidad de reacción. No debería olvidarse esto a la hora de proyectar en climas muy cálidos.

30.3 LA ETAPA DE CONCEPCIÓN DE LA ESTRUCTURA

Es una etapa de extraordinaria importancia y transcendencia.

Ha de comenzarse por el propio análisis de si la solución estructural de hormigón es la adecuada. La fotografía 30-2 (30.8) indica un caso de agresión muy intensa al hormigón (ninguna a la armadura) en una instalación industrial en la que se producen sales de amonio.

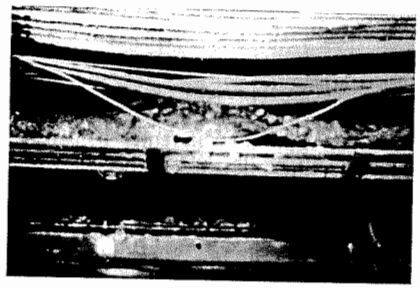


Figura 30-2

En casos de este tipo y dependiendo de la intensidad de la agresión, conviene estudiar si la solución adecuada es una protección superficial de las piezas de hormigón o si por el contrario la solución adecuada no es la de hormigón y debiera adoptarse otra solución, como por ejemplo la de estructura metálica.

Dentro de esta etapa, es también importante la elección de la propia forma estructural y de sus detalles.

En la figura 30-3 a) tomada de la referencia (30.8) se indica una solución que contiene los defectos que se corrigen en las b) y c).

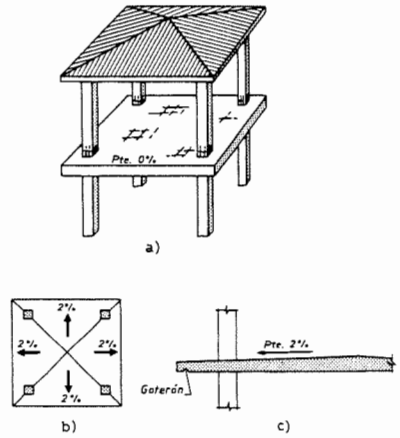


Figura 30-3

La figura 30-4 muestra un borde genérico de una losa de hormigón armado situada a la intemperie.

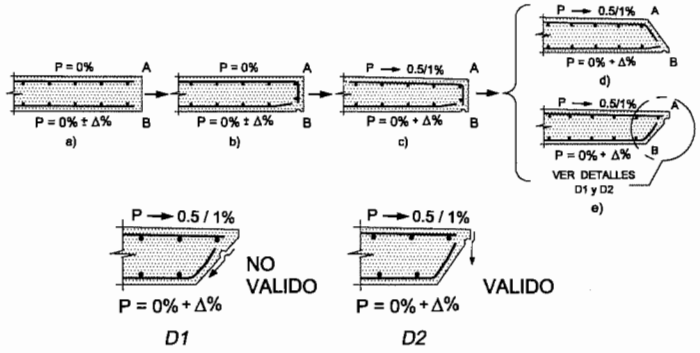


Figura 30-4

La solución a) contiene varios defectos. La pendiente 0% en la cara superior de la losa impedirá el desagüe del agua de lluvia, con lo que un cierto espesor de

hormigón a partir de dicha cara estará sometido a ciclos de humedad-sequedad, provocando la corrosión de la armadura superior.

El no armar el canto *AB*, si éste es apreciable conducirá a que no se pueda controlar la fisuración vertical por contracción térmica y retracción a lo largo del borde.

Al no disponerse goterón en el borde *B*, dependiendo de las tolerancias de ejecución el plano real de la cara inferior puede tener pendiente bajando hacia *B*, en cuyo caso la ausencia de goterón no creará problemas, o pendiente contraria, en cuyo caso el agua que resbala por el canto *AB* recorrerá parte de la losa inferior produciendo manchas.

La solución b) corrige la ausencia del goterón pero no la pendiente 0% de la cara superior. La solución c) corrige ambos. Sin embargo el canto *AB* no es autolavante y el agua de lluvia al mezclarse con el polvo existente en el aire producirá manchas en el canto.

Las soluciones d) o e) corrigen este defecto. En el caso d) la inclinación del plano *AB* es autolavante por el agua de lluvia. En el caso e), no está expuesta a la incidencia de la lluvia. Los detalles D_1 y D_2 muestran la necesidad de cuidar la forma del goterón para asegurar su eficacia real.

En el mismo sentido la figura 30-5 muestra la preferencia de formas estructurales como la b) sobre la a) que tiene muchos más problemas de armaduras de esquina, de alma, etc. con riesgo de corrosión.

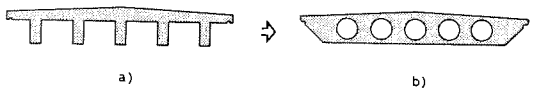


Figura 30-5

La figura 30-6 demuestra un caso que es origen frecuente de problemas estéticos. En el caso a), la solución de soldadura del montante de acero de la barandilla a la placa de acero, crea problemas de corrosión a corto plazo si las piezas metálicas están pintadas y a medio-largo plazo si están galvanizadas. La única solución es emplear acero inoxidable o bien adoptar la solución b). El relleno debe ser realizado con mortero de epoxy.

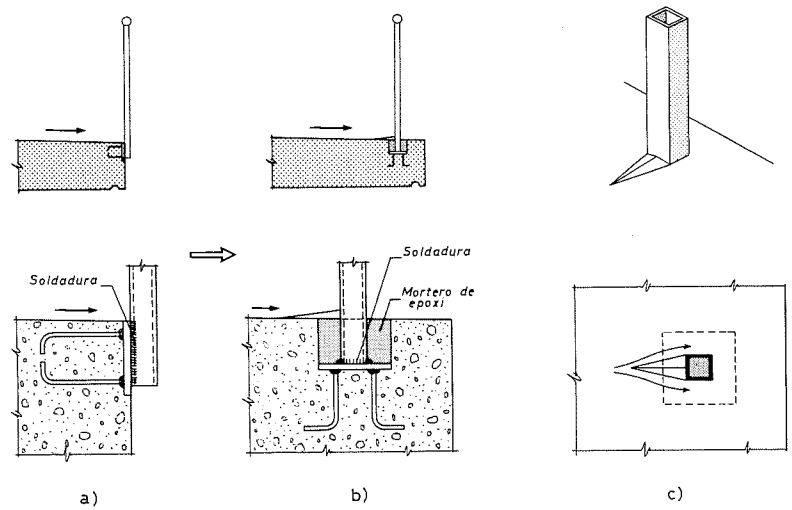


Figura 30-6

La figura 30-7 indica un defecto de proyecto, también frecuente, que provoca la acumulación de polvo por el lavado de lluvia.

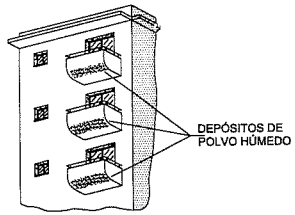


Figura 30-7

30.4 ASPECTOS GENERALES RELACIONADOS CON EL PROYECTO

Aparte de la selección de formas estructurales y detalles constructivos adecuados existen otros aspectos del proyecto también con gran incidencia en la durabilidad. Destacamos los siguientes:

30.4.1 EMPLEO DE UN HORMIGÓN ADECUADO

Para ello debe prestarse la atención debida a:

- La selección de los materiales componentes (cemento, áridos, adiciones, aditivos, etc.).

- Dosificación adecuada.
- Transporte, vertido y compactación correctos.
- Disposición adecuada de las juntas de trabajo y juntas de contracción.
- Curado cuidadoso del hormigón. (Entre otros inconvenientes, un mal curado acelera fuertemente la carbonatación de la capa exterior del hormigón y por lo tanto incrementa seriamente el riesgo de corrosión de armaduras).
- Resistencias mecánicas adecuadas.

30.4.2 RECUBRIMIENTOS Y SEPARACIÓN DE ARMADURAS

30.4.2.1 Recubrimientos

Deben adoptarse los recubrimientos adecuados a la clase de exposición a la que está sometida la estructura.

De acuerdo con EHE, deben considerarse dos valores del recubrimiento de una armadura, cuya diferencia está producida (Fig. 30-8) por las desviaciones de tolerancias de la armadura y del encofrado. Tanto para armaduras activas como

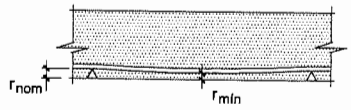


Figura 30-8

pasivas, la relación entre el recubrimiento nominal (r_{nom}) y el recubrimiento mínimo ($r_{mín}$) viene dada por

$$r_{nom} = r_{min} + \Delta_r \qquad [30.1]$$

El valor r_{nom}, corresponde al definido en los documentos del proyecto y por tanto **es también el correspondiente al separador que debe emplearse.** (Ver Capítulo 50).

De acuerdo con el nivel de control de ejecución adoptado en el proyecto, el valor Δ_r es

$\Delta_r = 5$ *mm* si se adopta el control de ejecución intenso.

$\Delta_r = 10$ *mm* si se adopta el nivel de control normal o reducido.

Los valores del **recubrimiento mínimo** ($r_{mín}$) vienen dados por la tabla T-30.4.

TABLA T-30.4

Resistencia característica del hormigón [MPa]	Tipo de elemento	RECUBRIMIENTO MÍNIMO [mm] SEGÚN LA CLASE DE EXPOSICIÓN (**)									
		I	IIa	IIb	IIIa	IIIb	IIIc	IV	Qa	Qb	Qc
$25 \le f_{ck} < 40$	general	20(***)	25	30	35	35	40	35	40	(*)	(*)
	elementos prefabricados y láminas	15	20	25	30	30	35	30	35	(*)	(*)
$f_{ck} \ge 40$	general	15	20	25	30	30	35	30	35	(*)	(*)
	elementos prefabricados y láminas	15	20	25	25	25	30	25	30	(*)	(*)

(*) El proyectista fijará el recubrimiento al objeto de que se garantice adecuadamente la protección de las armaduras frente a la acción agresiva ambiental.

(**) En el caso de clases de exposición *H, F* o *E*, el espesor del recubrimiento no se verá afectado.

(***)En el caso de armaduras activas pretesas, este valor se podrá reducir a 15 mm.

Además de lo indicado en la tabla anterior los **recubrimientos mínimos** ($r_{mín}$) deben cumplir con lo siguiente:

a) $r_{min} \ge$
- El diámetro de la barra, el equivalente del grupo de barras en su caso o el diámetro de la vaina en caso de armaduras postesas.
- 0,8 veces el tamaño máximo del árido. Este valor debe elevarse a 1,25 veces si las armaduras están cerca de los paramentos y dificultan el paso del hormigón.

b) En el caso de viguetas o placas prefabricadas en instalación industrial fija, se puede contar como recubrimiento el espesor de los materiales de revestimiento permanente, si existen, y si son tan compactos e impermeables al menos como el hormigón. Aun en estos casos, el recubrimiento $r_{mín}$ del hormigón no será inferior a 15 mm.

c) En el caso de barras dobladas, el recubrimiento medido en la dirección perpendicular al plano de la directriz de la curva no será inferior a dos diámetros.

d) Cuando por alguna razón el recubrimiento sea superior a 50 mm, debe considerarse la conveniencia y la posibilidad de colocar una armadura suplementaria de cuantía igual al 5 por mil del área del recubrimiento si las barras o el diámetro equivalente de los grupos, si se emplean, no supera los 32 mm y del 10 por mil si es superior.

En caso de disponer esta armadura , deben estudiarse con especial cuidado todos los aspectos de la dosificación, vertido y compactación del hormigón para evitar coqueras y faltas de compacidad del hormigón. Como esta prescripción rige en ambas direcciones, la solución de malla es preferible.

e) En piezas hormigonadas contra el terreno, el recubrimiento mínimo será de 70 mm. Se exceptúa de lo anterior el caso de recubrimientos de armaduras dispuestas con separadores sobre hormigón de limpieza, para las que rige la tabla T-30.4.

Para armaduras postesas los recubrimientos (Fig. 30-9).

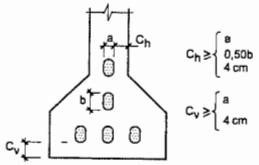


Figura 30-9

- En dirección vertical
  - 4 cm.
  - La dimensión horizontal real de la vaina o grupos de vainas en contacto.

- En dirección horizontal
  - 4 cm.
  - La mitad de la dimensión vertical real de la vaina o grupos de vainas en contacto.
  - La dimensión horizontal real de la vaina o grupos de vainas en contacto.

Nota importante. Como los recubrimientos que se han especificado anteriormente son los **mínimos** los separadores deben corresponder a $r_{mín} + 5\ mm$ si el control de ejecución es intenso y a $r_{mín} + 10\ mm$ si el control de ejecución es normal o reducido. Estos valores incrementados, que como hemos dicho constituyen el recubrimiento nominal, son los que definen la posición de la armadura también a efectos de cálculo.

30.4.2.2 Separación de armaduras

a) ARMADURAS PASIVAS

a-1) Barras aisladas. La distancia libre en dirección horizontal y vertical entre dos barras aisladas consecutivas no debe ser inferior al mayor de los tres límites siguientes:

- 20 mm

- El diámetro de la barra mayor
- 1,25 veces el tamaño máximo del árido

Estos valores deben entenderse referidos al diámetro nominal de la barra. Como la altura de los resaltos de las barras corrugadas suele ser del orden de 7% de su diámetro, esto supone una separación real física de sólo 0,86 diámetros si se adopta el segundo de los límites expuestos.

a-2) Grupos de barras. Se denomina grupo al conjunto de dos o más barras paralelas y en contacto.

En general el número máximo de barras de un grupo será de tres, salvo en piezas comprimidas hormigonadas en vertical, en cuyo caso se permiten cuatro barras. En la limitación anterior se incluye la zona de solape de las barras si existe.

En un mismo plano no pueden estar los ejes de más de dos barras del grupo.

Los recubrimientos de los grupos y las distancias libres entre ellos resultan de aplicar lo expuesto en a-1), pero tomando como diámetro del grupo el de la barra circular equivalente, es decir, siendo d_e el diámetro equivalente y d el diámetro de una barra

$d_e = \sqrt{2}\ d$ para grupos de dos barras

$d_e = \sqrt{3}\ d$ para grupos de tres barras

$d_e = 2\ d$ para grupos de cuatro barras

Sin embargo, establecido el recubrimiento o la distancia entre grupos en función de d_e, tal como se ha indicado, tanto el recubrimiento como la distancia han de entenderse como las distancias a la barra más próxima del grupo y no a un círculo teórico equivalente.

De acuerdo con EHE no se permiten grupos de diámetro equivalente superior a 50 mm, en general y a 70 mm en grupos de piezas comprimidas hormigonadas verticalmente. En el Capítulo 51 ampliaremos este punto.

Con independencia de lo anterior, más adelante (fig. 30-14) insistiremos en la necesidad de que el vibrador llegue verticalmente al fondo del encofrado. Con vibradores de 50 mm de diámetro esto equivale a adoptar 60 mm como separación mínima entre barras o grupos consecutivos dispuestos horizontalmente. Los grupos y la utilización de diámetros gruesos son una excelente solución para ello. (EHE especifica concretamente que las capas de armaduras se coloquen de forma que permitan el paso del vibrador).

b) ARMADURAS ACTIVAS

b-1) Armaduras pretesas. Los tendones deberán colocarse separados. La separación libre mínima de los tendones, tanto en dirección horizontal como vertical no será inferior al mayor de los valores siguientes:

- 20 mm en horizontal y 10 mm en vertical

- El diámetro del tendón mayor

- 1,25 veces el diámetro máximo del árido

b-2) **Armaduras postesas**. Las vainas pueden colocarse separadas o en grupo. Los grupos se limitan a dos vainas en horizontal y a no más de cuatro en conjunto. Sólo se permite la formación de grupos cuando las vainas sean corrugadas y a los lados del grupo haya espacio suficiente para la entrada del vibrador.

Las distancias entre vainas, grupos y vainas o entre vainas y grupos y otras armaduras no deben ser inferiores al mayor de los valores siguientes:

En dirección vertical

- El diámetro de la vaina

- La dimensión vertical de la vaina o grupo

- 50 mm

En dirección horizontal

- El diámetro de la vaina

- La dirección horizontal de la vaina

- 40 mm

- 1,6 veces la mayor de las dimensiones de las vainas que formen grupo

30.4.3 SEPARADORES

Los recubrimientos y posición de las barras deben ser asegurados, de acuerdo con las tolerancias geométricas establecidas en el Anejo nº 4.

La información sobre tipos, calidades y reglas de colocación y representación en los planos se indican en el Capítulo 50. Véase también (30.9).

El separador es el único medio de controlar los recubrimientos. Su importancia se aprecia en la figura 30-10, tomada de la información (30.7)

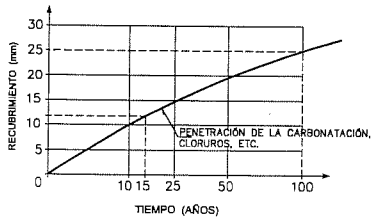


Figura 30-10

Reducir el recubrimiento de 20 mm a 12 mm, reduce la vida útil de 50 años a 15 años.

30.4.4 CONTROL DEL ANCHO DE FISURA

Aunque el espesor de recubrimiento sea el aspecto más fundamental para la protección de la armadura, es también de importancia primordial el control del ancho de fisura de acuerdo con lo que se expondrá en el Capítulo 47.

30.5 ASPECTOS ESPECÍFICOS RELACIONADOS CON EL HORMIGÓN

30.5.1 CALIDAD DEL HORMIGÓN

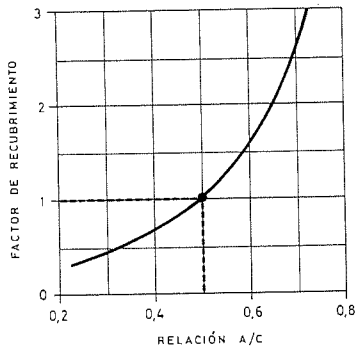
Con vistas a conseguir para la estructura una calidad adecuada, son de destacar los aspectos que siguen:

a) Utilización de cemento, áridos, agua, adiciones y aditivos de acuerdo con las especificaciones de EHE.

b) La dosificación del hormigón es una parte constitutiva y esencial del proyecto y debe cumplir las condiciones siguientes:

b-1) La relación máxima *A/C* (agua/cemento) cumplirá lo indicado en la tabla T-30.5. La figura 30-10 es elocuente a este respecto.

El Proyectista debe especificar el hormigón, no atendiendo únicamente a la resistencia, derivada de criterios de cálculo, sino prestando atención específica a la composición del hormigón en relación con la durabilidad. En este sentido, la figura 30-11 indica la influencia de la relación agua-cemento en el hormigón en la necesidad de recubrimiento de las barras. Obsérvese que pasar de una relación 0,50 a una relación 0,65 conduce a necesitar doble espesor de recubrimiento para tener la misma protección.



INFLUENCIA DE LA RELACIÓN A/C SOBRE LA PERMEABILIDAD RELATIVA AL RECUBRIMIENTO PARA PROTEGER LA ARMADURA

Figura 30-11

b-2) El mínimo contenido de cemento cumplirá también lo indicado en la tabla indicada anteriormente.

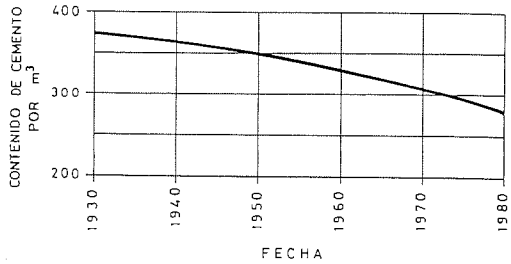


Fig. 30-12

La figura 30-12 recoge datos del DUTRON en (30.7) que indican que si los objetivos de resistencia son modestos, la resistencia puede hoy alcanzarse con contenidos de cementos tan bajos que no garantizan la protección de las armaduras contra la corrosión.

De hecho, para resistencias inferiores a 25 MPa a 28 días, los requisitos de durabilidad suelen exigir contenidos de cemento más altos que los requisitos de resistencia.

b-3) Según los casos y de acuerdo con las indicaciones de EHE, se establecerá el contenido de aire ocluido, el tipo especial de cemento requerido (resistente a los sulfatos, resistente al agua de mar, etc.).

TABLA T-30.5

Parámetro de dosificación	Tipo de hormigón	CLASE DE EXPOSICIÓN												
		I	IIa	IIb	IIIa	IIIb	IIIc	IV	Qa	Qb	Qc	H	F	E
máxima relación a/c	masa	0,65	-	-	-	-	-	-	0,50	0,50	0,45	0,55	0,50	0,50
	armado	0,65	0,60	0,55	0,50	0,50	0,45	0,50	0,50	0,50	0,45	0,55	0,50	0,50
	pretensado	0,60	0,60	0,55	0,50	0,45	0,45	0,45	0,50	0,45	0,45	0,55	0,50	0,50
mínimo contenido de cemento (Kg/m³)	masa	200	-	-	-	-	-	-	275	300	325	275	300	275
	armado	250	275	300	300	325	350	325	325	350	350	300	325	300
	pretensado	275	300	300	300	325	350	325	325	350	350	300	325	300

Si se utilizan adiciones en la dosificación, es necesario tener en cuenta su equivalencia a los efectos de contenido de cemento y de relación *A/C*. A estos efectos, para entrar en la tabla T-30.5, cuando se empleen adiciones se realizarán las correcciones siguientes:

En contenido de cemento (kg/m³)

Sustituir c por $c + kF$.

En relación agua/cemento (A/C)

Sustituir *A/C* por $A/C + kF$, siendo F *(kg/m³)* el contenido de adición y k su coeficiente de eficacia.

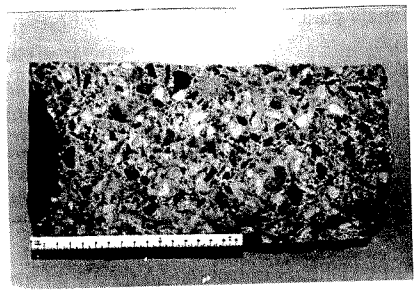
Para cenizas volantes, k no debe tomarse superior a 0,30 valor que podrá elevarse hasta 0,40 en obras de edificación y a 0,50 en obras públicas[1] si el Director de Obra lo admite con base en un estudio experimental exhaustivo, que considere no solamente los aspectos resistentes sino también los de durabilidad.

Para humo de sílice, el valor k no debe ser superior a 2, excepto en los casos de hormigones con relación *A/C* mayor que 0,45, que vayan a estar sometidos a clases de exposición *H* o *F*, en los que k se tomará igual a 1.

De todas formas, si se utilizan adiciones los contenidos de cemento, no serán inferiores a los siguientes valores mínimos absolutos:

Hormigón en masa	200 kg/m³
Hormigón armado	250 kg/m³
Hormigón pretensado	275 kg/m³

Un ensayo de elevado interés, para estimar, aunque sea de modo indirecto el cumplimiento de los requisitos de mínimo contenido de cemento y de máxima relación *A/C*, es el de la determinación de la profundidad de agua bajo presión, regulado por la Norma UNE 83309:90 EX, de acuerdo con EHE (Fig. 30-13).



Ensayo de penetración de agua bajo presión[2]

Figura 30-13

Esta comprobación tiene interés siempre, pero en especial se debe realizar cuando las clases de exposición sean las III ó IV o cuando el ambiente presente cualquier clase especial de exposición.

Se considera que, a efectos de durabilidad, la impermeabilidad del hormigón es suficiente cuando se cumplen simultáneamente las condiciones:

Profundidad máxima de penetración	≤ 50 mm
Profundidad media de penetración	≤ 30 mm

1 De nuevo debe señalarse lo convencional de esta clasificación.

2 Tesis Doctoral de M.BURÓN bajo la dirección de J. CALAVERA sobre la influencia de los defectos de dosificación y ejecución en la durabilidad (30.10)

EHE recomienda, como método indirecto de protección desde el punto de vista de la durabilidad, el empleo de las resistencias mínimas indicadas en la tabla T-30.6.

TABLA T-30.6

VALORES MÍNIMOS DE LA RESISTENCIA DEL HORMIGÓN SEGÚN LA CLASE DE AMBIENTE

Parámetro de dosificación	Tipo de hormigón	CLASE DE EXPOSICIÓN												
		I	IIa	IIa	IIIa	IIIb	IIIc	IV	Qa	Qb	Qc	H	F	E
Resistencia mínima (MPa)	en masa	20	-	-	-	-	-	-	30	30	35	30	30	30
	armado	25	25	30	30	30	35	30	30	30	35	30	30	30
	pretensado	25	25	30	30	35	35	35	30	35	35	30	30	30

30.5.2 PUESTA EN OBRA DEL HORMIGÓN

Tanto los detalles de los planos, en particular de la disposición de armaduras, como las especificaciones de puesta en obra del hormigón, compactación y curado son de trascendental importancia para la durabilidad.

En este sentido, las dos Reglas de Oro de la puesta en obra se indican en la figura 30-14.

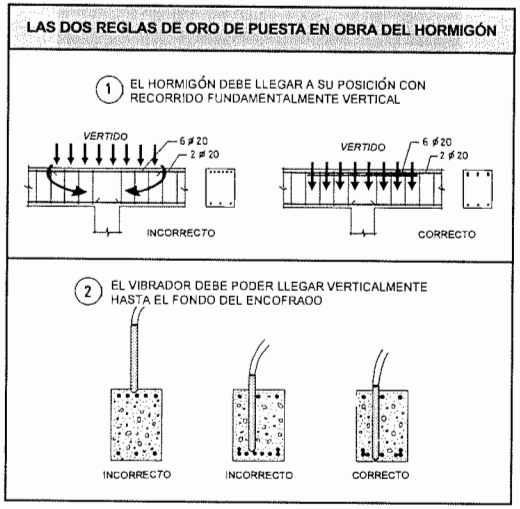


Figura 30-14

30.6 CORROSIÓN DE ARMADURAS

Resumidamente los aspectos esenciales del problema son los siguientes:

a) La corrosión de la armadura es un proceso electroquímico.

b) Inicialmente el cemento es un producto alcalino con un *pH* de 12,5 a 13 y por tanto pasiviza la superficie de la armadura mediante la formación de una fina capa de óxido firmemente adherido.

Como se dijo anteriormente, el hidróxido cálcico libre del cemento en contacto con el anhídrido carbónico del aire produce carbonato cálcico. Esta reacción se produce en la capa superficial del hormigón, reduciendo el *pH* a valores del orden de 8 a 9, destruyendo la pasivación. Véase una ampliación del tema en (30.8).

c) La agresión por cloruros puede producirse incluso con valores de *pH* altos. Los cloruros en la masa del hormigón están limitados por EHE y raramente son causa de problemas.

d) Más frecuentemente los problemas de corrosión por cloruros vienen del contacto de gases o líquidos en contacto con la superficie del hormigón, cuyo ataque se renueva continuamente.

e) El riesgo de corrosión aumenta con la porosidad y la permeabilidad del hormigón y con la temperatura.

f) Tanto la carbonatación como la corrosión no se pueden producir en hormigones sumergidos.

g) Influencia de la fisuración

Con los tipos de acero para armaduras pasivas y con los sistemas de cálculo actualmente empleados, especialmente los niveles de seguridad, la fisuración del hormigón está presente en las condiciones de servicio en un gran número de estructuras de hormigón armado.

La fisura supone un camino de acceso a la armadura de los agentes agresivos, en particular del anhídrido carbónico y de los cloruros, enormemente más rápido que la estructura porosa del recubrimiento. La creencia de que una fisura representa un riesgo de oxidación localizado en la sección transversal situada en el plano de la fisura, no es cierta. La figura 30-15 muestra como la rotura de adherencia que la fisura supone, y el giro del hormigón del recubrimiento separándose de la barra en una cierta zona próxima a la fisura, extienden la corrosión a ambos lados del plano teórico de la fisura.

El ancho de fisura tiene importancia en la iniciación de la fisuración y en la rotura de la capa de pasivación. Después de la despasivación en anchos hasta 0,4 mm (que es el máximo valor de la mayoría de las fisuras en las estructuras de hormigón) el ancho de fisura tiene poca importancia en la velocidad de la corrosión.

En líneas generales, para pequeños anchos de fisuras, es más importante para la velocidad de corrosión la reducción del recubrimiento que el ancho de la fisura.

En las fisuras transversales se dan a veces problemas de "cicatrización" o relleno con polvo del ambiente. En otras ocasiones se produce una "autocicatrización" por los productos de la corrosión y depósitos cálcicos.

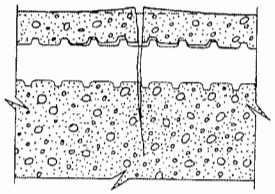


Figura 30-15

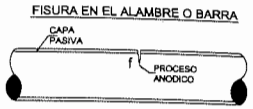


Figura 30-16

Las fisuras longitudinales son, naturalmente, más peligrosas que las transversales, ya que afectan a superficies mucho mayores de la barra.

Los productos de corrosión, debido al aumento de volumen que presentan, ejercen presiones sobre el hormigón, fisurándolo y aumentando las vías de entrada de agentes agresivos.

h) Corrosión bajo tensión en armaduras de pretensado

Las armaduras de pretensado experimentan también la forma de corrosión electroquímica anteriormente expuesta. Además de ello, pueden presentar roturas de tipo frágil cuando se emplean determinados tipos de acero y procesos de fabricación.

En este tipo de corrosión el proceso anódico se inicia por una picadura que va profundizando la fisura *f* (Fig. 30-16). El proceso se desarrolla en el vértice de la grieta y debido al elevado grado de tensión de la barra, generalmente del orden del 60% de la tensión de rotura, acaba produciendo un rotura frágil[1]. Por supuesto este tipo de fallo no se presenta si la armadura tiene una buena protección del hormigón.

i) Fragilización por hidrógeno

En ciertas condiciones, y dentro del proceso catódico, se produce un caso particular de corrosión bajo tensión, según el cual penetran átomos de hidrógeno en la masa del acero, donde su conversión en hidrógeno molecular, a través de las elevadas presiones que ejerce, ha dado en ocasiones lugar a fisuras con rotura frágil.

30.7 SISTEMAS DE PROTECCIÓN CONTRA LA CORROSIÓN Y OTROS ATAQUES

Pueden considerarse en líneas generales dos sistemas:

30.7.1 PROTECCIÓN SUPERFICIAL DEL ELEMENTO DE HORMIGÓN

Básicamente se consigue, bien con revestimientos o con pinturas. Los tratamientos se realizan con productos muy variados, entre los que cabe destacar.

1 En el caso de armaduras pasivas la tensión en servicio no suele pasar del 40% del límite elástico y rara vez alcanza el 50%, por lo que no se presenta este tipo de rotura.

- Siliconas
- Silicatos
- Resinas epoxy
- Poliéster
- Derivados del caucho clorado
- Pinturas acrílicas
- Poliuretano
- Vinilo
- Polietileno

La normalización sobre el tema es escasa. Un buen resumen figura en la referencia (30.11).

30.7.2 PROTECCIÓN SUPERFICIAL DE LAS ARMADURAS

a) Armaduras pasivas

Con independencia del empleo de barras de acero inoxidable, interesantes pero todavía de muy reducido empleo y de las cuales hablaremos en 25.5.4.3, los tratamientos que pueden considerarse son los siguientes:

- Galvanización
- Recubrimiento de resina epoxy

Veremos una ampliación de todo esto en 32.5.4.3 y en (30.12).

b) Armaduras activas

En el caso de tendones adheridos, el sistemas más común es la inyección, de acuerdo con lo visto anteriormente.

La calidad de la inyección debe ser objeto siempre de un especial control de calidad pues su incidencia en la durabilidad de la estructura es muy fuerte.

En el caso de tendones no adheridos, existen sistemas de protección muy variados. Para tendones situados en conductos el procedimiento más común es la grasa soluble en agua. Estos sistemas tienen una ventaja especial, que ha motivado su amplio uso en instalaciones nucleares y es la posibilidad de lavar el conducto con agua a presión para eliminar la grasa. Ello permite desanclar el tendón y extraerlo para una inspección de él y de los anclajes, volviendo luego a colocarlo, tesarlo e inyectar nuevamente grasa.

Algunas aplicaciones especiales, como son los forjados sin vigas postesados (Capítulo 54) y en general el pretensado exterior (Fig. 25-23 d)) han conducido a nuevos desarrollos entre los que cabe destacar los recubrimientos con:

- Mastiques bituminosos
- Mastiques asfálticos
- Grasas solubles en agua

- Grasas no solubles en agua
- Cera
- Resinas epoxy
- Plásticos

Una solución que va cobrando importancia es la de tendones plastificados, situados a su vez en una funda de plástico. Ello protege muy eficazmente al tendón y reduce la fricción en conductos o sillas de apoyo.

Normalmente el enfundado se hace con polietileno. Debe tenerse en cuenta que el polietileno, tanto en su color natural blanco sucio como en las variantes de color rojo, azul, etc. no resiste la acción de los rayos ultravioleta. Solamente el polietileno negro puede resistirlos. Si ello crea problemas estéticos en el caso de tendones vistos, se puede, bien disponer sobre el polietileno negro una segunda capa del color deseado o bien pintar el revestimiento negro.

Aunque todavía no ha sido aplicada al caso del pretensado, una solución de alta garantía es la aplicada muy recientemente a cables de puentes colgantes, que es envolverlos en una o varias fundas de plástico y dejar un sistema de funcionamiento permanente de control de la humedad del aire dentro de la funda, manteniéndola por debajo del 40%, con lo que no puede producirse corrosión.

En cualquier caso la protección debe ser continua en toda la longitud del tendón, hasta los anclajes.

30.7.3 PROTECCIÓN DE LOS ANCLAJES

Este es un punto de gran importancia, que frecuentemente no recibe la atención debida.

Los anclajes deben protegerse siempre. En líneas generales existen dos procedimientos: Uno es el de morteros de epoxy, que presentan una buena capacidad de protección y una excelente adherencia a los elementos metálicos y al hormigón de la pieza. Otro sistema es la protección con grasa.

No debe olvidarse que el anclaje debe quedar también suficientemente protegido de la posible acción del fuego.

30.8 ALGUNAS CONSIDERACIONES FINALES SOBRE LA DURABILIDAD

Es cierto que la falta de consideración de la durabilidad, ha conducido en un número apreciable de casos a problemas en las estructuras tanto de hormigón armado como de hormigón pretensado.

Sin embargo no debe dejarse de considerar que en ello han influido los aspectos siguientes:

a) Los conceptos básicos de durabilidad, no se han incorporado ni a los planes de estudio ni a la práctica profesional hasta época muy reciente.

b) Todavía es hoy frecuente la creencia de que los problemas de durabilidad están exclusivamente relacionados con aspectos químicos de los materiales, sin valorar la importancia que en la durabilidad tienen el proyecto y la ejecución.

c) El concepto de mantenimiento está todavía muy escasamente difundido en el hormigón estructural. La detección oportuna de los problemas permite aplicar tratamientos de rehabilitación simples y baratos. No hacerlo, supone a medio plazo intervenciones complejas, perturbadoras para el funcionamiento de la construcción y de elevado coste.

d) Como hemos visto, existen hoy múltiples técnicas de protección de los elementos de la estructura y de las armaduras.

Estos métodos deben ser empleados en los casos especiales que lo requieran.

Sin embargo, para los casos habituales en los que se requieran vidas útiles de 60/80 años tales tratamientos no son necesarios y basta cumplir las reglas básicas que se indican en la figura 30-17.

LAS REGLAS BÁSICAS DE LA DURABILIDAD

① Utilizar suficiente cemento.

② Emplear baja relación A/C.

③ Recurrir a los superfluidificantes si hace falta, para tener suficiente descenso de cono (7 u 8 cm en los casos ordinarios) con baja relación A/C. (No obtener la resistencia exigida en probetas con hormigones de casi nulo descenso de cono, que no pueden colocarse adecuadamente en obra).

④ Emplear separadores.

⑤ Compactar enérgicamente el hormigón.

⑥ Curar adecuadamente.

⑦ Realizar un control estricto de la inyección en el caso de estructuras pretensadas.

Figura 30-17

Aunque el tema de la ejecución cae fuera del alcance de este libro, a título de ejemplo aislado, la figura 30-18 demuestra la influencia del curado (uno de los "puntos negros" de la ejecución) en la permeabilidad y por tanto en el riesgo de corrosión de armaduras.

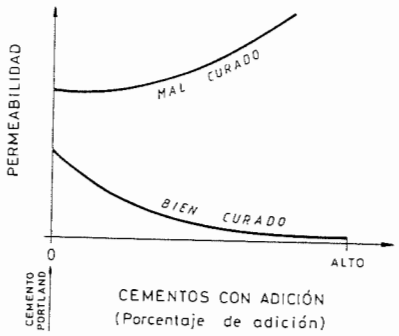


Figura 30-18

Estas reglas son las mismas que regían hace cincuenta años. Pero el hecho de que sean violadas con cierta frecuencia en algunos países, ha conducido a la falsa consideración de que el hormigón estructural es un material de corta vida.

Por supuesto que en casos o condiciones especiales, lo anterior por sí solo no es suficiente, y los nuevos recursos técnicos disponibles deben emplearse.

BIBLIOGRAFÍA

(30.1) TASSIOS, T. "Prolegomana to a generalised design space" CEB-RILEM WORKSHOP. DURABILITY OF CONCRETE STRUCTURES. 1983.

(30.2) "DURABLE CONCRETE STRUCTURES. CEB DESIGN GUIDE". CEB-Bulletin d'Information n° 182. June 1989. (Hay traducción española del GEHO).

(30.3) "GUIDE ON DURABLE CONCRETE" ACI.2R-77 (Reaproved 1982). American Concrete Institute. Detroit. 1988.

(30.4) "DURABILITY OF CONCRETE". American Concrete Institute. Detroit. 1975.

(30.5) "CORROSION OF REINFORCED STEEL IN CONCRETE". ASTM. Publicación STP 713. December 1980.

(30.6) CRANE, A.P. "Corrosion of reinforcement in concrete construction". ELLIS HORWOOD. London, 1983.

(30.7) "DURABILITY OF CONCRETE STRUCTURES". CEB-RILEM. COPENHAGEN. 1983.

(30.8) CALAVERA, J. "Patología de estructuras de hormigón armado y pretensado", 2 tomos. INTEMAC. Madrid 1996.

(30.9) "SPACERS". Permanent Commissión VII. CEB-Bulletin 201. 1991. (Hay traducción española del GEHO).

(30.10) BURÓN, M. "Estudio de la influencia de la puesta en obra del hormigón en la durabilidad de las estructuras de hormigón armado y pretensado". Tesis doctoral en curso, bajo la dirección de J. CALAVERA. Universidad Politécnica de Madrid. Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos.

(30.11) "Protection of reinforced concrete by surface treatments" CIRIA. Technical Note 130. 1987.

(30.12) CEB "Coating protection for reinforcement. State of the art report". CEB. 2ª edition. 1995.

(30.13) VILLEGAS L. "Calidad y patología en la construcción". GTED. Santander. 1997.

CAPÍTULO 31

COMPROBACIONES TENSIONALES DE LA PIEZA PRETENSADA EN ESTADO DE SERVICIO

PREDIMENSIONAMIENTO DE PIEZAS PRETENSADAS

31.1. INTRODUCCIÓN

La existencia de la fuerza de pretensado obliga a realizar en las piezas de hormigón pretensado algunas comprobaciones tensionales, fundamentalmente en dos instantes: Uno, en el de aplicación de la fuerza de pretensado. Otro en el estado de servicio de las piezas. Esta es una diferencia importante respecto a las piezas de hormigón armado.

Con independencia de lo anterior, la pieza, como veremos más adelante, debe ser comprobada a los estados límite de servicio y estados límite últimos.

Como resultado de ello, el predimensionamiento de la sección debe tener en cuenta tanto estas condiciones tensionales como las de cumplimiento de los estados límite. Unido esto al hecho usual de que las piezas pretensadas tienen generalmente secciones transversales bastante diferentes de la rectangular, el predimensionamiento de secciones resulta, en la práctica, más complejo en el caso del hormigón pretensado que en el caso del hormigón armado.

31.2. PIEZAS PRETENSADAS CON ARMADURAS POSTESAS

De acuerdo con lo anterior, deberán realizarse las comprobaciones tensionales en el momento de tesado de los tendones y en el estado de servicio.

31.2.1. TENSIONES MÁXIMAS ADMISIBLES EN EL INSTANTE DEL TESADO

La comprobación debe realizarse en la sección crítica. La determinación de esta sección crítica depende del tipo de piezas, en particular del trazado de los tendones y de los esfuerzos derivados de la acción del peso propio de la pieza al producirse la contraflecha bajo la acción del pretensado.

A continuación exponemos el método para el caso general de una pieza en la que el peso propio crea esfuerzos de signo contrario al pretensado. Consideramos, por ejemplo, el caso de la sección en el punto medio de la luz, en una pieza de sección constante (sección A-A de la Fig. 31-1).

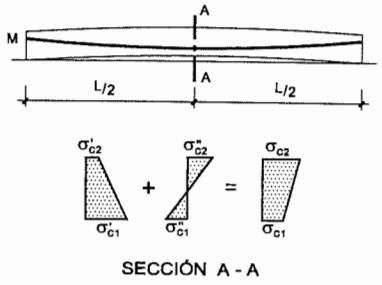


Figura 31-1

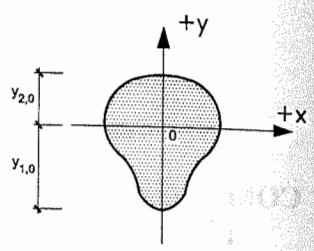


Figura 31-2

Las comprobaciones necesarias serán las debidas al pretensado más el peso propio.

Al tratarse de una comprobación en servicio, de acuerdo con 32.6.a) debe emplearse $\gamma_p = 1{,}1$ si el pretensado es desfavorable y $\gamma_p = 0{,}9$ si es favorable.

Fibra extrema en mínima compresión o en tracción nomina[1]

$$\sigma_c \geq k_1 \qquad [31.1]$$

Fibra extrema en máxima compresión

$$\sigma_c \leq k_2 \qquad [31.2]$$

En este Capítulo se consideran las tensiones normales producidas por el pretensado y las acciones exteriores. No se entra en el problema de los esfuerzos, locales producidos en las proximidades de los anclajes, tema que será analizado en el Capítulo 60.

De acuerdo con lo expuesto en 25-6, las tensiones debidas al pretensado (Fig. 31-2), serán:

1 Se entiende por tensiones nominales las resultantes de considerar íntegra la sección de hormigón

$$\sigma'_{c1} = \frac{\gamma_p P_t}{A_{c,o}}\left(1 + \frac{e_o\, y_{1,0}}{r_o^2}\right) \qquad [31.3]$$

$$\sigma'_{c2} = \frac{\gamma_p P_t}{A_{c,o}}\left(1 + \frac{e_0\, y_{2,0}}{r_o^2}\right) \qquad [31.4]$$

De acuerdo con 31.6.a) $\gamma_p = 1{,}1$ si el pretensado es desfavorable y 0,9 si es favorable.

Como en este caso el pretensado se considera como una fuerza exterior, los valores de la excentricidad del c.d.g. de la armadura activa, e_o, de las distancias de la fibra correspondiente a dicho c.d.g. a las extremas, inferior $y_{1,o}$ y superior $y_{2,o}$ y del radio de giro de la sección $r_o = \sqrt{\frac{I_o}{A_{c,o}}}$ (Fig. 31-2) **son las correspondientes a la sección neta**, es decir, descontando las áreas ocupadas por las vainas.

P_t es el valor de la fuerza de pretensado inmediatamente después del acortamiento elástico. Obsérvese que éste es el valor del pretensado en la sección A-A, inferior por tanto al del punto M, de la sección extrema, que habrá sido el máximo permisible. El valor P_t es el reducido por rozamiento, penetración de cuñas y acortamiento elástico.

Las debidas al peso propio, al actuar éste antes de inyectar las vainas, son también las correspondientes a la sección neta, y por tanto

$$\sigma''_{c1} = \frac{M_{g1}}{W_{1,0}} \qquad [31.5]$$

$$\sigma''_{c2} = \frac{M_{g1}}{W_{2,0}} \qquad [31.6]$$

(Los valores $W = \frac{I}{y}$ llevan el signo de la coordenada y).

Las condiciones [31.1] y [31.2] por tanto se transforman en

$$\sigma_{c1} = \sigma'_{c1} + \sigma''_{c1} = \frac{\gamma_p P_t}{A_{c,o}}\left(1 + \frac{e_o\, y_{1,o}}{r_o^2}\right) + \frac{M_{g1}}{W_{1,0}} \geq k_1 \qquad [31.7]$$

$$\sigma_{c2} = \sigma'_{c2} + \sigma''_{c2} = \frac{\gamma_p P_t}{A_{c,o}}\left(1 + \frac{e_o\, y_{2,o}}{r_o^2}\right) + \frac{M_{g1}}{W_{2,0}} \leq k_2 \qquad [31.8]$$

Los valores k_1 y k_2 de las fórmulas anteriores varían según las Normas. A continuación exponemos los especificados por EHE y por ACI 318-95.

a) **Tensiones admisibles de acuerdo con EHE.** Al tratarse de tensiones debidas a esfuerzos de escasa probabilidad de variación y aplicados a un hormigón de resistencia rápidamente creciente en la mayoría de los casos, las tensiones admisibles son mayores que las adoptadas en condiciones ordinarias. De acuerdo con EHE, las fórmulas [31.1] y [31.2] se transforman en las siguientes:

Fibra extrema en mínima compresión o en tracción nominal[1]

$$\sigma_c \geq \left\{ \begin{array}{ll} \text{Clase de exposición} & \text{Tensión límite} \\ I & W_{max} \leq 0{,}2\ mm \\ II_a, II_b, H & W_{max} \leq 0{,}2\ mm \\ III_a, III_b, N, F & \geq 0 \text{ (descompresión)} \\ III_c, Q_a, Q_b, Q_c & \geq 0 \text{ (descompresión)} \end{array} \right\} \text{ con } \gamma_p = 0{,}9 \qquad [31.9]$$

(Los ambientes indicados fueron expuestos en el Capítulo 30).

Fibra extrema en máxima compresión

$$\sigma_c \leq 0{,}6\, f_{ck,j} \text{ (con } \gamma_p = 1{,}1) \qquad [31.10]$$

En las fórmulas anteriores $f_{ck,j}$ es la resistencia del hormigón medida en probeta cilíndrica curada y ensayada en las mismas condiciones que la pieza.

b) **Tensiones admisibles de acuerdo con ACI 318-95.** La normativa norteamericana, muy distinta de la europea en este tema concreto, es del máximo interés al estar basada en una intensa experimentación y en una larga experiencia de uso.

No emplea para estas comprobaciones en ningún caso el cálculo teórico del ancho de fisura, sino que establece condiciones entre las tensiones nominales de compresión o tracción y las resistencias del material, es decir

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_c \leq k_1 \text{ (compresión)} \\ \sigma_c \geq k_2 \text{ (tracción)} \end{array} \right\} \qquad [31.11]$$

Las condiciones equivalentes a [31.9] y [31.10] son ahora:

1 Entendemos por tensiones nominales las resultantes de aplicar los esfuerzos a la sección sin considerar reducciones de área por fisuración del hormigón.

Fibra extrema en mínima compresión o en tracción nominal:

En general

$$\sigma_c \geq -0{,}25 \sqrt{f_{ck,j}} \qquad [31.12]$$

En los extremos de piezas simplemente apoyadas

$$\sigma_c \geq -0{,}50 \sqrt{f_{ck,j}} \qquad [31.13]$$

Fibra extrema en máxima compresión:

$$\sigma_c \leq 0{,}6\, f_{ck,j} \qquad [31.14]$$

31.2.2. TENSIONES MÁXIMAS ADMISIBLES EN ESTADO DE SERVICIO

De nuevo y por las mismas razones expondremos las especificaciones de EHE y de ACI 318-95. Los efectos de las acciones actuantes antes de la inyección (fuerza de pretensado al transferir y peso propio de la pieza) se han calculado ya con los valores netos característicos de la sección, referidos al c.d.g. de la sección neta.

En general las acciones posteriores se aplicarán a la pieza con posterioridad a la inyección (si se realiza ésta) y en ese caso actúan sobre la sección homogeneizada, referidos al eje que pasa por el c.d.g. de tal sección, en general distinto del de la sección neta. Los valores correspondientes los designaremos como $y_{1,h}$, $y_{2,h}$, e_h, $r_h = \sqrt{\frac{I_h}{A_{ch}}}$

El cálculo del c.d.g. de la sección homogeneizada y de sus características es inmediato sin más que, dada la compatibilidad de deformaciones entre las armaduras y el hormigón que las rodea, considerar una sección homogénea, formada por la bruta de hormigón (es decir sin descontar los huecos de las vainas ni de las armaduras longitudinales activas o pasivas), más las armaduras activas o pasivas, en su posición, con su área afectada del coeficiente de homogeneización (m-1) donde

$$m = \frac{E_p}{E'_{c,j}} \qquad [31.15]$$

El valor de $E'_{c,j}$ es el módulo secante de deformación del hormigón a la edad j de cálculo. En sentido estricto, debería emplearse el valor $E'_{ci,j}$ para cargas de aplicación instantánea o muy breve y emplear un valor más reducido para cargas permanentes. Ni EHE ni el MODEL-CODE 90 ni el Eurocódigo EC-2 dan normas al respecto. Una recomendación razonable es emplear

$$E_{cg} = \frac{E'_{cj}}{2{,}5} \qquad [31.16]$$

para cargas permanentes o cuasipermanentes en ambiente seco (HR ≤ 50 %) y el valor

$$E_{cg} = \frac{E'_{cj}}{1{,}5} \qquad [31.17]$$

para cargas permanentes o cuasipermanentes en ambiente húmedo (HR > 50 %).

Como, por lo que veremos a continuación, no están justificados muchos refinamientos en esta comprobación, debido a las correcciones que será necesario adoptar por otros motivos, una recomendación práctica de suficiente precisión es tomar un módulo de deformación ponderado

$$E_{c,j} = \frac{g_2 \cdot E_{cg} + q \cdot E'_{cj}}{g_2 + q} \qquad [31.18]$$

donde g_2 es la suma de acciones permanentes o cuasipermanentes aplicadas con posterioridad a la inyección y q es la suma de acciones de carácter breve.

Conocido el valor de m y por tanto de $(m\text{-}1)$, los valores de A_{ch}, I_{ch}, W_{1h}, W_{2h}, e_h, y_{1h}, y_{2h} pueden calcularse directamente.

Una excelente aproximación, si la sección no está fisurada, viene dada por las fórmulas

$$A_{ch} = A_{co}\,[\,1 + (m\text{-}1)\,q\,] \qquad [31.19]$$

$$W_{1h} = W_{1,o}\,[\,1 + 1{,}5\,m\,q\,] \qquad [31.20]$$

$$W_{2h} = W_{2,o}\,[\,1 + 0{,}5\,m\,q\,] \qquad [31.21]$$

$$I_{ch} = I_{co}\,(\,1 + m\,q\,) \qquad [31.22]$$

Un tema esencial es el de la edad de esta comprobación tensional en condiciones de servicio.

Es claro que para los efectos producidos por las acciones exteriores, una hipótesis pesimista para la mayoría de los casos reales es suponer su actuación cuando el hormigón tiene 28 días de edad y utilizar las características de la probeta estándar. Sin embargo, la fuerza de pretensado a esa edad es apreciablemente superior a la que tendrá a largo plazo, una vez producidas las pérdidas diferidas de fuerza.

La práctica habitual es hacer la comprobación con el valor final de la fuerza de pretensado (P_f) y con la resistencia del hormigón a 28 días, lo cual es claramente pesimista ya que no pueden ser valores concomitantes.

Por supuesto, si se desea, se pueden hacer comprobaciones a diferentes edades, pero en general no se hace así debido al escaso conocimiento que suele tenerse de la futura actuación de las acciones sobre la pieza.

El paso de los valores de la fuerza de pretensado al tesar (P_i) al final (P_f) se debe realizar calculando las pérdidas diferidas, por supuesto en función de las características de la sección neta, incluidas las zonas inyectadas de las vainas pero naturalmente sin contar el área ocupada por los tendones. Designamos sus valores con $y'_{1,o}$, $y'_{2,o}$, e'_o, $r'_o = \sqrt{\frac{I'_o}{A'_{co}}}$. Recuérdese que, por simplificación de la exposición, en los dos ejemplos del Capítulo 29 no se hizo así y todas las pérdidas se calcularon a partir de las características de la sección bruta.

Las fórmulas [31.3] y [31.4] se transforman ahora en

$$\sigma'_{c1} = \frac{\gamma_p P_f}{A'_{c,o}}\left(1 + \frac{e'_o\, y'_{1,0}}{(r'_o)^2}\right) \qquad [31.23]$$

$$\sigma'_{c2} = \frac{\gamma_p P_f}{A'_{c,o}}\left(1 + \frac{e'_o\, y'_{2,0}}{(r'_o)^2}\right) \qquad [31.24]$$

y las [31.5] y [31.6] en

$$\sigma''_{c1} = \frac{M_{g1} + M_{g2} + M_q}{W_{1,h}} \qquad [31.25]$$

$$\sigma''_{c2} = \frac{M_{g1} + M_{g2} + M_q}{W_{2,h}} \qquad [31.26]$$

En [31.23] a [31.26] se ha partido de que a lo largo del tiempo se produce una redistribución de tensiones entre el material de la inyección y el hormigón preexistente. En definitiva

$$\sigma_{c1} = \frac{\gamma_p P_f}{A'_{c,o}}\left(1 + \frac{e'_o\, y'_{1,0}}{(r'_o)^2}\right) + \frac{M_{g1} + M_{g2} + M_q}{W_{1,h}} \geq k_3 \qquad [31.27]$$

$$\sigma_{c2} = \frac{\gamma_p P_f}{A'_{co}}\left(1 + \frac{e'_o\, y'_{2,0}}{(r'_o)^2}\right) + \frac{M_{g1} + M_{g2} + M_q}{W_{2,h}} \leq k_4 \qquad [31.28]$$

Establecido lo anterior, las comprobaciones necesarias son

a) **Tensiones admisibles de acuerdo con EHE**

Fibra extrema en mínima compresión o en tracción nominal

$$\sigma_c \geq \left\{ \begin{array}{ll} \text{Clase de exposición} & \text{Tensión límite} \\ I & W_{max} \leq 0{,}2\ mm \\ II_a, II_b, H & W_{max} \leq 0{,}2\ mm \\ III_a, III_b, N, F & \geq 0 \text{ (descompresión)} \\ III_c, Q_a, Q_b, Q_c & \geq 0 \text{ (descompresión)} \end{array} \right\} \text{ con } \gamma_p = 0{,}9 \qquad [31.29]$$

Fibra extrema en máxima compresión

$$\sigma_c \leq 0{,}6\, f_{ck,j} \text{ (con } \gamma_p = 1{,}1) \qquad [31.30]$$

b) **Tensiones admisibles de acuerdo con ACI 318-95**

Fibra extrema en mínima compresión o con tracción nominal

En general

$$\sigma_c \geq -0{,}50 \sqrt{f_{ck,j}} \qquad [31.31]$$

Si se han comprobado las flechas mediante un cálculo riguroso y los recubrimientos no son inferiores, en elementos no expuestos a la intemperie ni a ambiente agresivo, a 20 mm en losas y viguetas y a 40 mm en otras piezas. El valor anterior puede elevarse a

$$\sigma_c \geq -\sqrt{f_{ck,j}} \qquad [31.32]$$

Si el elemento está en contacto con el suelo, expuesto a la intemperie o en atmósfera agresiva, estos valores se elevarán a 30 mm y 60 mm respectivamente.

Fibra extrema en máxima compresión

- Bajo las acciones de pretensado y permanentes o cuasipermanentes

$$\sigma_c \leq 0{,}45\, f_{ck,j} \qquad [31.33]$$

- Bajo las acciones de pretensado, permanentes y variables

$$\sigma_c \leq 0{,}60\, f_{ck,j} \qquad [31.34]$$

31.2.3. SIGNIFICADO GEOMÉTRICO DEL CONJUNTO DE CONDICIONES TENSIONALES

Consideremos por ejemplo el caso de la sección central de una viga simplemente apoyada, cuyas fuerzas de pretensado son:

Inicial	P_o (En el extremo de tesado)
Después del acortamiento elástico (Pérdidas debidas al rozamiento desde el extremo de tesado, a la penetración de cuñas y al acortamiento elástico)	$\alpha_1 P_o$ $(\alpha_1 < 1)$
Final	$\alpha_2 P_o$ $(\alpha_2 < \alpha_1)$

y cuyas resistencias de hormigón son:

Al tesar	$f_{ck,t} = \beta f_{ck,28}$
A 28 días	$f_{ck,28}$

Supongamos que deseamos, bajo pretensado más cargas permanentes, no tener tracciones y bajo cargas totales no superar la resistencia a tracción pura a 28 días, $f_{ckt,28}$

Llamando

g_1 Peso propio de la viga

g_2 Carga permanente uniformemente repartida

q Sobrecarga uniformemente repartida

(Todo ello por unidad de longitud)

operamos de acuerdo con EHE.

Comprobación en el instante del tesado. De acuerdo con [31.7] y [31.8] las condiciones son

Fibra inferior (Supongamos que es la más comprimida)[1,2]

$$1{,}1\,\alpha_1 \frac{P_o}{A_{co}}\left(1 + \frac{e_o\, y_{1,o}}{r^2_o}\right) + \frac{M_{g1}}{W_{1,0}} \leq 0{,}6\ \beta f_{ck,28} \qquad [a]$$

Fibra superior

$$0{,}9\alpha_1 \frac{P_o}{A_{co}}\left(1 + \frac{e_o\, y_{2,o}}{r^2_o}\right) + \frac{M_{g1}}{W_{2,0}} \geq 0 \qquad [b]$$

1 De acuerdo con lo dicho, los valores con ' corresponden a magnitudes de la sección neta inicial más el rellenado de las vainas.

2 De acuerdo con lo que se expresó, e_o, y_1, y_2, W_1, W_2 han de introducirse en las fórmulas con su signo. Para una viga pretensada generalmente y_2 y W_2 son positivos y e_o, y_1 y W_1 negativos.

Comprobación en estado de servicio

Fibra inferior[1]. De acuerdo con [31.27] y [31.28] las condiciones son

(Cargas permanentes)

$$0{,}9\alpha_2\frac{P_o}{A'_{co}}\left(1+\frac{e'_o\, y'_{1,o}}{(r'_o)^2}\right)+\frac{M_{g1}+M_{g2}}{W_{1,h}}\geq 0 \qquad [c]$$

Cargas totales

$$0{,}9\alpha_2\frac{P_o}{A'_{co}}\left(1+\frac{e'_o\, y'_{1,o}}{(r'_o)^2}\right)+\frac{M_{g1}+M_{g2}+M_q}{W_{1,h}}\geq -f_{ckt,28} \qquad [d]$$

Fibra superior (Suponemos que es la más comprimida)

$$1{,}1\alpha_2\frac{P_o}{A'_{co}}\left(1+\frac{e'_o\, y'_{2,o}}{(r'_o)^2}\right)+\frac{M_{g1}+M_{g2}+M_q}{W_{2,h}}\leq 0{,}6\, f_{ck,28} \qquad [e]$$

En las cinco condiciones [a] a [e] anteriores, si aceptamos la simplificación de suponer los valores de las magnitudes de la sección neta sin inyectar las vainas iguales a los correspondientes a las secciones con las vainas inyectadas, iguales a su vez a la homogeneizada (que no puede ser estimada al no conocerse la armadura) y los sustituimos por los de la sección bruta sin descontar el área de las armaduras, cuyas magnitudes llamaremos e_b, y_{1b}, y_{2b}, e_i, A_{cb}, W_{1b}, W_{2b}, las cinco condiciones toman la forma general

$$k_1\, P_o\,(1+k_2\, e_b)+k_3\leq 0 \qquad [a']$$

$$k_4\, P_o\,(1+k_5\, e_b)+k_6\geq 0 \qquad [b']$$

$$k_7\, P_o\,(1+k_8\, e_b)+k_9\geq 0 \qquad [c']$$

$$k_{10}\, P_o\,(1+k_{11}\, e_b)+k_{12}\geq 0 \qquad [d']$$

$$k_{13}\, P_o\,(1+k_{14}\, e_b)+k_{15}\leq 0 \qquad [e']$$

1 De acuerdo con lo dicho, los valores con ' corresponden a magnitudes de la sección neta inicial más el rellenado de las vainas.

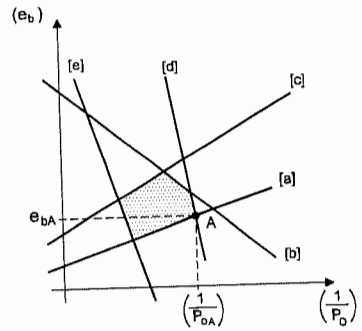


Figura 31-3

que representadas en escalas $\frac{1}{P_o}$ y e_b corresponden a cinco rectas (Fig. 31-3). En general estas cinco rectas delimitan un polígono. Todos los puntos interiores al polígono corresponden a soluciones (P_o, e_b) de pretensado, que satisfacen las cinco condiciones sin alcanzar el límite de ninguna. Los puntos de los lados del polígono satisfacen las cinco condiciones, alcanzando al límite de una de ellas y los vértices, satisfaciendo las cinco condiciones alcanzan los límites para dos de ellas[1].

31.2.4. PREDIMENSIONAMIENTO DE LA SECCIÓN

En principio, por razones económicas interesa la cantidad mínima de armadura, es decir el máximo valor de $\frac{1}{P_o}$, al que corresponde el punto de abscisa $\left(\frac{1}{P_o}\right)_A$ y la excentricidad e_A.

Si el polígono definido por las cinco inecuaciones no existiera, ello significa que con esa sección y calidad de hormigón no pueden resistirse las acciones con ningún pretensado. De alguna manera si el polígono es demasiado amplio, significa una falta de aprovechamiento de la sección, que podría ser refinada. Sin embargo el proyectista debe prestar atención a este polígono pues proporciona información valiosa para modificar la sección si ello es necesario.

También deben tenerse muy en cuenta los dos aspectos siguientes:

- Una pieza con una sección determinada puede ser la más interesante desde el punto de vista global (condiciones técnicas más de coste de fabricación más costes de transporte y montaje) y no ser óptima desde el punto de vista mecánico. Un ejemplo típico son las piezas en TT, en las que no es posible

1 Cuando se aplica EHE, en ambientes I, II_a, II_{2b} y H_1, no se establece ninguna tensión límite y por tanto no hay inecuación, ni, correlativamente, rectas y no puede establecerse el polígono. Una sugerencia es aceptar, para estos casos, los valores [31.31] ó [31.32] de ACI, a reservas de comprobar después la fisuración en el cálculo definitivo.

agotar la condición [e] de máxima compresión en servicio en la fibra superior. Sin embargo constituyen una solución ideal en muchos casos.

- No conviene afinar excesivamente los valores de P_o y e_o (vértice A por ejemplo), pues en este cálculo preliminar se han hecho simplificaciones inevitables y necesarias, como por ejemplo utilizar las magnitudes de la sección bruta, estimar las pérdidas de fuerza de pretensado, etc.

- Cumplir las cinco condiciones expuestas no quiere decir por sí solo que la sección sea satisfactoria. El proyectista deberá en el predimensionamiento previo tener en cuenta los esfuerzos actuantes, en particular el esfuerzo cortante y sobre todo el momento último necesario, que no queda garantizado a priori con los valores de P_o y e_b encontrados.

Una buena estimación del área de armadura necesaria, que justificamos en el Capítulo 36, puede obtenerse de la fórmula

$$A_p \geq \frac{M_d}{0{,}9\, d\, f_{pd}} \qquad [31.35]$$

donde

$d = y_{2b} + e_b$

M_d = momento de cálculo de las acciones exteriores

Si el área A_p derivada del valor P_o elegido es menor que el valor de [31.35], caben tres soluciones:

a) Suplementar la diferencia con armadura pasiva. Con ello no se alteran las condiciones tensionales y se incrementa el valor de M_u hasta alcanzar el de M_d.

b) Mantener la fuerza P_o, pero tesando menos una armadura mayor que A_p. La situación es idéntica al caso anterior.

c) Proceder a una nuevo dimensionamiento de la sección, reduciendo en particular su canto.

La solución c) suele ser la más interesante en muchos casos.

El predimensionamiento y por supuesto el dimensionamiento definitivo exige cierta experiencia para su encaje rápido. Los programas informáticos permiten una solución muy rápida.

En definitiva el proceso de predimensionamiento sigue las etapas de la figura 31-4.

La etapa II del diagrama de la figura anterior exige ahora una expresión más precisa de las condiciones tensionales introduciendo las magnitudes de la sección neta con vainas inyectadas o de la sección homogeneizada, según sea el caso.

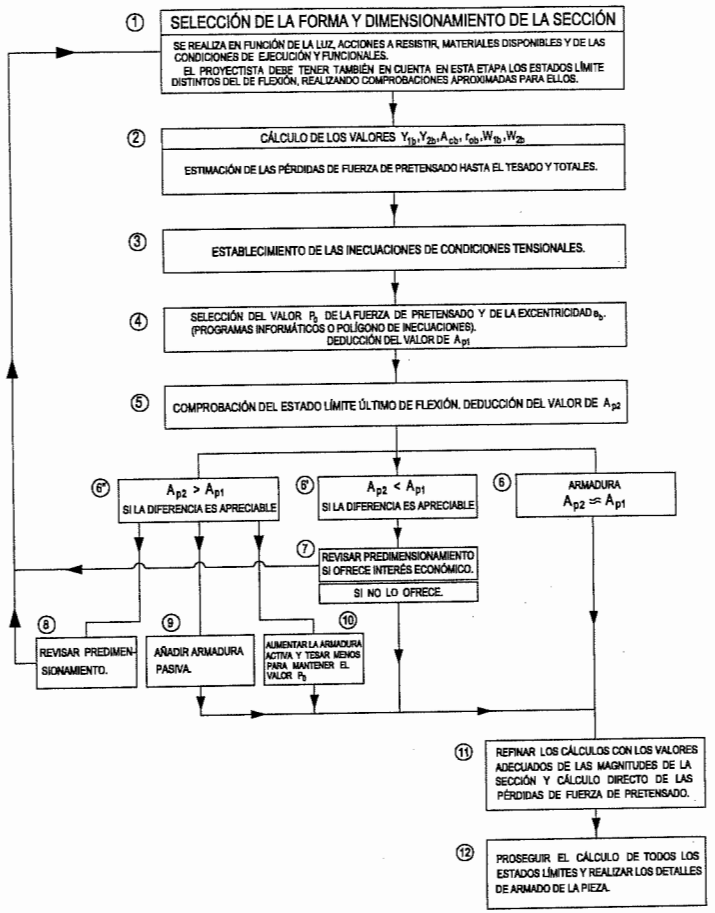


Figura 31-4

Las expresiones toman ahora la forma:

Comprobaciones al tesar

Fibra extrema inferior:

$$\sigma_{c1} = \frac{\gamma_p P_t}{A_{c,o}} \left(1 + \frac{e_o\, y_{1,o}}{r_o^{\,2}} \right) + \frac{M_{g1}}{W'_{1,o}} \geq k_1 \qquad [31.36]$$

Fibra extrema superior

$$\sigma_{c2}=\frac{\gamma_p P_t}{A_{c,o}}\left(1+\frac{e_o\, y_{2,o}}{r_o^2}\right)+\frac{M_{g1}}{W'_{2,o}}\le k_2 \qquad [31.37]$$

Comprobaciones en servicio

Fibra extrema inferior

$$\sigma_{c1}=\frac{\gamma_p P_t}{A'_{co}}\left(1+\frac{e'_o\, y'_{1,o}}{(r'_o)^2}\right)+\frac{M_{g1}+M_{g2}+M_q}{W_{1,h}}\ge k'_3 \qquad [31.38]$$

$$\sigma_{c2}=\frac{\gamma_t P_t}{A'_{co}}\left(1+\frac{e'_o\, y'_{2,o}}{(r'_o)^2}\right)+\frac{M_{g1}+M_{g2}+M_q}{W_{2,h}}\le k'_4 \qquad [31.39]$$

31.2.5. TRAZADO DE TENDONES

De acuerdo con lo anteriormente dicho, el valor elegido para P_o, volviendo al polígono de condiciones tensionales[1] (Fig. 31-5) habrá sido, una vez realizado el dimensionamiento definitivo, otro ligeramente mayor, como el P'_o. Al valor P'_o le corresponde todo un conjunto de excentricidades posibles, que conservando el valor de la fuerza de pretensado, P'_o, varían la distribución de sus tensiones sobre la sección de hormigón, cumpliendo por supuesto las condiciones límites tensionales establecidas. Este conjunto es el de los puntos del segmento 1-2 y, por lo tanto, cualquier excentricidad entre $e_{h,min}$ y $e_{h,max}$ es válida.

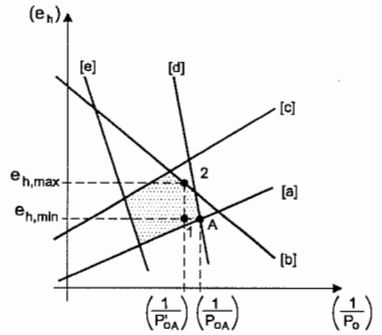


Figura 31-5

Considerando de nuevo la pieza pretensada, (Fig. 31-6), ello quiere decir que el c.d.g. de todos los tendones (no cada uno de ellos individualmente por supuesto) ha de pasar entre los puntos que distan del c.d.g. G de la sección homogeneizada los valores $e_{hA,1}$ y $e_{hA,2}$.

1 Construido ya con las magnitudes homogeneizadas de la sección y referido por tanto a e_h.

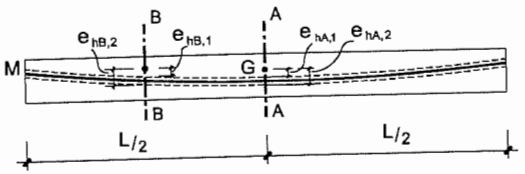


Figura 31-6

Si consideramos cualquier otra sección como la *B-B*, le corresponderá un momento flector diferente tanto del p.p. de la pieza como de las acciones exteriores y un nuevo polígono por tanto de condiciones tensionales, tal como el de la figura 31-7, pero evidentemente el valor de la fuerza de tesado en el extremo *M* ha de ser el mismo, P'_o, si bien los valores P_t y P_f de dicha fuerza en la sección *B-B* serán diferentes de los de la sección *A-A*, debido a la diferencia de pérdidas entre ambas secciones.

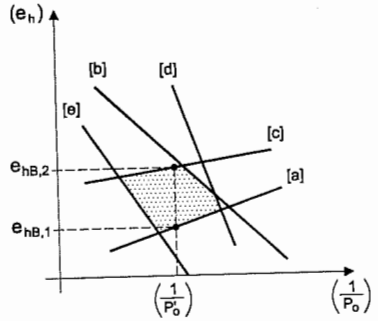


Figura 31-7

Representando el valor P'_o en el nuevo polígono, nos indica que en la sección *B-B* el campo de excentricidades posibles va de $e_{hB,1}$ a $e_{hB,2}$.

Análogamente ocurre en todas las secciones y en particular en los extremos. En ellos es usual que la resultante de tendones pase por el c.d.g. de la sección.

Con ello se tienen a lo largo de la luz dos curvas límites de posición del c.d.g. de los tendones.

Normalmente interesa acercarse a la curva de excentricidades máximas pues ello mejora el valor del momento último M_u.

En la figura 31-8 se ha indicado un caso particular, que es frecuente en la práctica y es el de piezas en las que se cortan algunos tendones. Es claro que la fuerza de pretensado P'_o es una entre *BC* y otra en los segmentos de pieza *AB* y *CD*, pero el procedimiento anterior se generaliza inmediatamente.

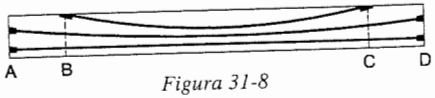
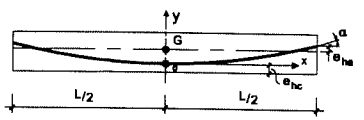
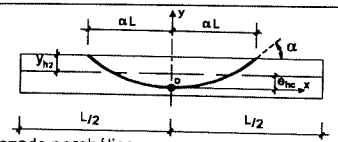
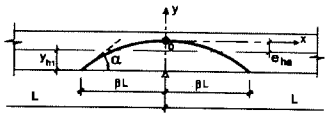
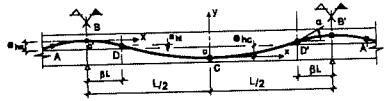
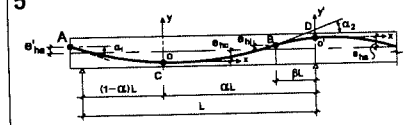


Figura 31-8

31.2.6 FÓRMULAS PARA LA DEFINICIÓN DE LOS TENDONES

En la figura 31-9 se han indicado los cinco casos más frecuentes de trazado de tendones. Para cada caso se indican la ecuación o ecuaciones de la línea media del tendón, las tangentes en los puntos importantes y los radios de curvatura mínimos.

TRAZADO	FÓRMULAS PARA PIEZAS DE SECCIÓN CONSTANTE SOMETIDAS A CARGA UNIFORME POR UNIDAD DE LONGITUD
1  * Trazado parabólico. * e_{ha}, e_{hc}, son las excentricidades de la resultante de los tendones en la sección de apoyo y en el centro de vano, referidas al c.d.g. de la sección homogeneizada. * e_{ha}, e_{hc} se consideran positivas en el sentido positivo del eje OY.	**Ecuación de la resultante de los tendones referida a los ejes OX, OY** $y = \frac{4\left(e_{ha} - e_{hc}\right)}{L^2} \cdot x^2$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4\left(e_{ha} - e_{hc}\right)}{L}$ ρ (radio de curvatura mínimo en O) $\rho = \frac{L^2}{8\left(e_{ha} - e_{hc}\right)}$
2  * Trazado parabólico. * e_{hc}, y_{h2}, son las excentricidades de la resultante de los tendones en la sección central y de la fibra extrema superior, referidas al c.d.g. de la sección homogeneizada. * e_{hc}, e_{h2} se consideran positivas en el sentido positivo del eje OY.	**Ecuación de la resultante de los tendones referida a los ejes OX, OY** $y = \frac{4\left(y_{h2} - e_{hc}\right)}{\alpha^2 L^2} \cdot x^2$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4\left(y_{h2} - e_{hc}\right)}{\alpha L}$ ρ (radio de curvatura mínimo en O) $\rho = \frac{\alpha^2 L^2}{8\left(y_{h2} - e_{hc}\right)}$
3  * Trazado parabólico. * e_{hc}, y_{h1}, son las excentricidades de la resultante de los tendones en la sección central y de la fibra extrema inferior, referidas al c.d.g. de la sección homogeneizada. * e_{hc}, y_{h1} se consideran positivas en el sentido positivo del eje OY.	**Ecuación de la resultante de los tendones referida a los ejes OX, OY** $y = \frac{4\left(y_{h1} - e_{ha}\right)}{\beta^2 L^2} \cdot x^2$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\left(e_{ha} - y_{h1}\right)}{\beta L}$ ρ (radio de curvatura mínimo en O) $\rho = \frac{\beta^2 L^2}{8\left(y_{h1} - e_{ha}\right)}$

TRAZADO	FÓRMULAS PARA PIEZAS DE SECCIÓN CONSTANTE SOMETIDAS A CARGA UNIFORME POR UNIDAD DE LONGITUD
4  * Trazados parabólicos tangentes en D y D'. * e_{ha}, e_{hi}, e_{hc}, son las excentricidades de la resultante en las secciones de apoyo, en los puntos de inflexión y en la sección de centro de vano, respectivamente, referidas al c.d.g. de la sección homogeneizada. * e_{ha}, e_{hi} e_{hc} se consideran positivas en el sentido positivo del eje OY.	**Ecuaciones de la resultante de los tendones referida a los ejes OXY (tramo ACD),y O'X'Y' (tramos ABD y A'B'D')** **Tramo ACD:** $y = \frac{e_{hi} - e_{hc}}{L^2\left(0{,}5 - \beta\right)^2} \cdot x^2$ **Tramos ABD y A'B'D'** $y = \frac{e_{hi} - e_{ha}}{\alpha^2 L^2} \cdot x^2$ Posición del punto de inflexión $\beta = 0{,}5\,\frac{e_{ha} - e_{hi}}{e_{ha} - e_{hc}}$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\left(e_{hi} - e_{hc}\right)}{\left(0{,}5 - \alpha\right) L}$ Radio de curvatura en O $\rho_a = \frac{L^2\left(0{,}5 - \beta\right)^2}{e_{hi} - e_{he}}$ Radio de curvatura en O' $\rho_{a'} = \frac{\alpha^2 L^2}{2\left(e_{hi} - e_{ha}\right)}$
5  * Trazados parabólicos tangentes en B. * e'_{ha}, e_{hc}, e_{hi}, e_{ha}, son, respectivamente, las excentricidades de las resultante en las secciones de simple apoyo en A, de punto más bajo en vano C, de punto de inflexión B y de apoyo continuo D, referidas al c.d.g. de la sección homogeneizada.	**Ecuaciones de la resultante de los tendones referida a los ejes OXY (tramos AC y CB),y O'X'Y' (tramo BD)** **Tramo AC:** $y = \frac{e'_{ha} - e_{hc}}{\left(1 - \alpha\right)^2 L^2} x^2$ $\operatorname{tg}\alpha_1 = -2 \cdot \frac{e'_{ha} - e_{hc}}{\left(1 - \alpha\right) L}$

TRAZADO	FÓRMULAS PARA PIEZAS DE SECCIÓN CONSTANTE SOMETIDAS A CARGA UNIFORME POR UNIDAD DE LONGITUD
* e'_{ha}, e_{hc}, e_{hi}, y e_{ha}, se consideran positivas en el sentido positivo del eje OY.	**Tramo CB** $y = \frac{e_{hi} - e_{hc}}{(\alpha - \beta)^2 L^2} \cdot x^2$ $\text{tg}\,\alpha_2 = 2 \cdot \frac{e_{hi} - e_{hc}}{(\alpha - \beta) L}$ **Tramo BD** $y = \frac{e_{hi} - e_{ha}}{\beta^2 L^2} x^2$ Radio de curvatura en O ρ_o : El menor de $\left\{ \frac{(1-\alpha)^2 L^2}{2(e'_{ha} - e_{hc})} ; \frac{(\alpha - \beta)^2 L^2}{2(e_{hi} - e_{hc})} \right.$ Radio de curvatura en O' $\rho_{o'} = \frac{\beta^2 L^2}{2(e_{hi} - e_{ha})}$

Notas

1. Las ecuaciones indicadas son adecuadas para el cálculo y corresponden al eje de la vaina. Las coordenadas en los planos deben referirse normalmente a la generatriz inferior de la vaina y al fondo del encofrado ya que será la cota más fpacil de comprobar en el replanteo
2. Debido al fenómeno de descentramiento indicado en la figura 26-4, el eje de la vaina no coincide con el del tendón. El fenómeno puede tenerse en cuenta al adoptar los valores correspondientes de e_h.

Figura 31-9

31.3 PIEZAS PRETENSADAS CON ARMADURAS PRETESAS

Análogamente en este caso deberá comprobarse la pieza en dos instantes diferentes. Una en el instante de la transferencia y otra en el estado de servicio.

Sin embargo, en este caso existen particularidades importantes. Para el caso de piezas lineales (Fig. 31-10), al ser recta la resultante de los tendones, al transferir el pretensado y tomar la pieza las contraflechas, actúa el peso propio. La sección crítica de comprobación es la *A-A* del extremo. (Obsérvese que en esta situación la pieza trabaja con una luz igual a su longitud total, superior por tanto a la luz entre apoyos que tendrá en condiciones de servicio).

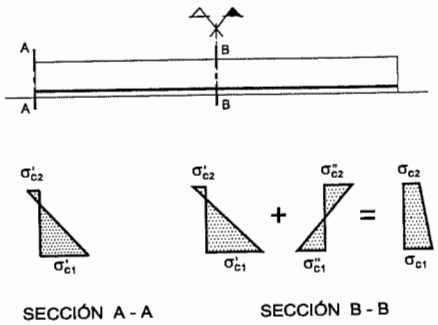


Figura 31-10

En sentido estricto, podría elegirse otra sección distante de la *A-A* la longitud de introducción (Ver 32.5.3.8.3).

Sin embargo el efecto compensador del peso propio es en ella muy pequeño y dada la dificultad de estimación realista de esta longitud, lo habitual es comprobar en la sección extrema. Las mínimas compresiones en fibra inferior se producen en cambio en la sección central.

Para la comprobación de tensiones en el estado de servicio, la sección crítica es evidentemente la central.

Se exceptúan de lo anterior los casos en que se empleen las técnicas de desviación de armaduras o de entubado de tendones (Figs. 25-14 y 25-15) ya que en estos casos la resultante de fuerzas en todos los tendones no es recta, sino que sigue las leyes indicadas en la figura 31-11.a) y b) y su cálculo debe realizarse, en cuanto a la comprobación de las diversas secciones como se vio en el caso de armaduras postesas.

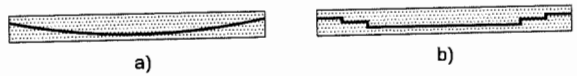


Figura 31-11

31.3.1. TENSIONES MÁXIMAS ADMISIBLES EN EL INSTANTE DE LA TRANSFERENCIA[1]

Emplearemos las notaciones e_o, $y_{o,1}$, $y_{o,2}$, $A_{c,o}$, γ_p, $W_{1,o}$, y $W_{2,o}$ para la sección neta, es decir la bruta de la sección de hormigón menos el área ocupada por los tendones[2].

En la sección extrema

1 Las piezas para forjados se rigen en este punto por la Instrucción EF.

2 En el caso de armaduras postesas empleábamos esta notación para la sección bruta menos el área ocupada por las vainas y estas notaciones con ' para la bruta menos el área ocupada por los tendones.

$$\sigma'_{c1} = \gamma_p P_t \left(1 + \frac{e_o y_{1,0}}{r_o^2} \right) \leq k_2 \qquad [31.40]$$

$$\sigma'_{c2} = \gamma_p P_t \left(1 + \frac{e_o y_{2,0}}{r_o^2} \right) \geq k_1 \qquad [31.41]$$

De acuerdo con 32.6.a) γ_p =1,05, si la acción de pretensado es desfavorable, y γ_p=0,95, si es favorable.

También en este caso expondremos los valores límites k_1 y k_2 especificados por EHE y ACI 318-95.

a) **Tensiones admisibles de acuerdo con EHE**

- Fibra extrema en mínima compresión o en tracción nominal

$$\sigma_c \geq \left\{ \begin{array}{ll} \text{Clase de exposición} & \text{Tensión límite} \\ I & W_{máx} \leq 0{,}2 \ mm \\ II_a, II_b, H & W_{máx} \leq 0{,}2 \ mm \\ III_a, III_b, N, F & \geq 0 \text{ (descompresión)} \\ III_c, Q_a, Q_b, Q_c & \geq 0 \text{ (descompresión)} \end{array} \right\} \text{ con } \gamma_p = 0{,}95 \qquad [31.42]$$

- Fibra extrema en máxima compresión

$$\sigma_c \leq 0{,}6 f_{ck,t} \text{ (con } \gamma_p = 1{,}05 \text{)} \qquad [31.43]$$

$f_{ck,t}$ es la resistencia del hormigón a compresión medida en probeta cilíndrica 15/30 y curada en las mismas condiciones que el hormigón de la pieza, ensayada a la edad de transferencia.

b) **Tensiones admisibles de acuerdo con ACI 318-95**

Fibra extrema en mínima compresión o en tracción nominal:

- Si la zona es la más precomprimida por el pretensado

$$\sigma_c \geq -0{,}50 \sqrt{f_{ck,j}} \qquad [31.44]$$

- En otro caso:

En general

$$\sigma_c \geq -0{,}25 \sqrt{f_{ck,j}} \qquad [31.45]$$

En los extremos de piezas simplemente apoyadas

$$\sigma_c \geq -0{,}50 \sqrt{f_{ck,j}} \qquad [31.46]$$

Fibra extrema en máxima compresión:

$$\sigma_c \leq 0{,}60 f_{ck,j} \qquad [31.47]$$

31.3.2. TENSIONES MÁXIMAS ADMISIBLES EN EL ESTADO DE SERVICIO

Consideraremos en este caso la sección más desfavorable, que para piezas lineales con carga uniforme por unidad de longitud será la central.

Las acciones exteriores actúan sobre la sección homogeneizada. De nuevo, ha de procederse como se indicó en 31.3.1 para la determinación del valor de m y calcular luego las características de la sección homogeneizada. De nuevo las fórmulas siguientes dan una aproximación excelente.

$$A_{ch} = A_{co} [1 + (m - 1) q] \qquad [31.48]$$

$$W_{1h} = W_{1,o} [1 + 1{,}5 \ m \ q] \qquad [31.49]$$

$$W_{2h} = W_{2,o} [1 + 0{,}5 \ m \ q] \qquad [31.50]$$

$$I_{ch} = I_{co} (1 + m \ q) \qquad [31.51]$$

Valen análogas consideraciones sobre la edad de comprobación que se hicieron en 31.3.1 y por tanto consideraremos el valor final de la fuerza de pretensado, P_t, y la resistencia del hormigón a 28 días.

Las fórmulas correspondientes resultan

$$\sigma_{c1} = \frac{\gamma_p P_t}{A_{c,o}} \left(1 + \frac{e_o y_{0,1}}{r_o^2} \right) + \frac{M_{g1} + M_{g2} + M_q}{W_{h,1}} \geq k_3 \qquad [31.52]$$

$$\sigma_{c2} = \frac{\gamma_p P_t}{A_{c,o}} \left(1 + \frac{e_o y_{0,2}}{r_o^2} \right) + \frac{M_{g1} + M_{g2} + M_q}{W_{h,2}} \leq k_4 \qquad [31.53]$$

M_{g1} = Momento flector en la sección, debido al p.p. de la pieza.

M_{g2} = Momento flector en la sección, debido a las restantes cargas permanentes.

M_q = Momento flector en la sección, debido a las sobrecargas.

Establecido lo anterior, las comprobaciones necesarias son las siguientes:

a) **Tensiones admisibles de acuerdo con EHE**

Fibra extrema en mínima compresión o en tracción nominal

$$\sigma_c \geq \left\{ \begin{array}{ll} \text{Clase de exposición} & \text{Tensión límite} \\ I & W_{máx} \leq 0{,}2\ mm \\ II_a, II_b, H & W_{máx} \leq 0{,}2\ mm \\ III_a, III_b, N, F & \geq 0 \text{ (descompresión)} \\ III_c, Q_a, Q_b, Q_c & \geq 0 \text{ (descompresión)} \end{array} \right\} \text{ con } \gamma_p = 0{,}95 \qquad [31.54]$$

Fibra extrema en máxima compresión

$$\sigma_c \leq 0{,}6\, f_{ck,j} \text{ (con } \gamma_p = 1{,}05 \text{)} \qquad [31.55]$$

b) **Tensiones admisibles de acuerdo con ACI 318-95**

Fibra extrema en mínima compresión o con tracción nominal

En general

$$\sigma_c \geq -0{,}50 \sqrt{f_{ck,j}} \qquad [31.56]$$

Si se han comprobado las flechas mediante un cálculo riguroso y los recubrimientos no son inferiores, en elementos no expuestos a la intemperie ni a ambiente agresivo, a 30 mm en losas y viguetas y a 55 mm en otras piezas, y estos valores se elevarán a 40 y 55 mm respectivamente, si el elemento está expuesto a la intemperie o a ambiente agresivo, y el valor anterior puede elevarse a

$$\sigma_c \geq -\sqrt{f_{ck,j}} \qquad [31.57]$$

Fibra extrema en máxima compresión

- Bajo las acciones de pretensado y permanentes o cuasipermanentes

$$\sigma_c \leq 0{,}45\ f_{ck,j} \qquad [31.58]$$

- Bajo las acciones de pretensado, permanentes y variables

$$\sigma_c \leq 0{,}60\ f_{ck,j} \qquad [31.59]$$

31.3.3. SIGNIFICADO GEOMÉTRICO

También en este caso las cuatro condiciones de tensiones, con el posible desdoblamiento en dos de la condición de mínima compresión o tracción nominal [31.54], con límites distintos para las cargas permanentes y las totales, da lugar a un polígono (Fig. 31-12)[1].

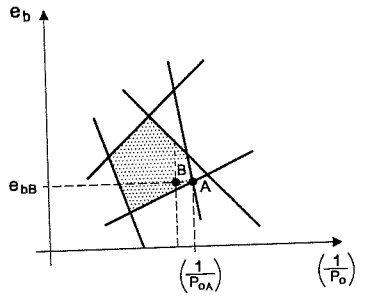


Figura 31-12

Para ello basta estimar las pérdidas hasta la transferencia y las totales y referir la fuerza de tesado $P_t = \alpha_1 P_o$ y la final $P_f = \alpha_2 P_o$. En este caso al no haber curvas ni conductos o vainas, la fuerza P_o es constante a lo largo de toda la pieza. Los valores de la sección recta y de la homogeneizada se sustituyen por los de la bruta para poder dibujar el polígono, como hicimos en 31.2.3.

De nuevo no será conveniente elegir el valor estricto (punto A) sino otro correspondiente a una fuerza de pretensado algo mayor, como P_{OB}.

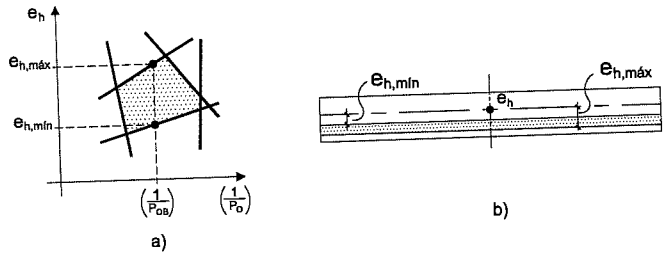


Figura 31-13

Con esa fuerza de pretensado se conoce ya la cuantía y es posible plantear con los valores correctos las ecuaciones de condición y representar el polígono definitivo (Fig. 31-13.a)). En él, al valor P_o le corresponde una excentricidad mínima $e_{h,mín}$ y una máxima $e_{h,máx}$ y cualquier posición entre ellas de la fuerza de pretensado P_{oB} cumple

1 Vale aquí, respecto al empleo de EHE, la nota a pie de página de 31.2.4.

las ecuaciones de condición de tensiones. En general interesa el valor $e_{h.máx}$ ya que aumentará el valor del momento último de rotura M_u.

El valor de la armadura A_p, por razones de capacidad resistente, puede estimarse, como vimos en el caso de armaduras postesas, mediante la fórmula

$$A_p = \frac{M_d}{0{,}9\, d\, f_{pd}} \qquad [31.60]$$

31.3.4 CASO DE VIGAS PRETENSADAS DE CANTO VARIABLE

En el caso de vigas pretensadas, en especial en prefabricación, se presenta a veces el caso indicado en la figura 31.14 de viga de canto variable. Siendo M el momento flector actuante en la sección AA, llamando h_o al canto entre c.d.g. de las secciones de las alas, A_c y A'_c a sus áreas, y despreciando las tensiones en el alma, el equilibrio se ha de establecer entre las resultantes F y F' de las tensiones en las alas.

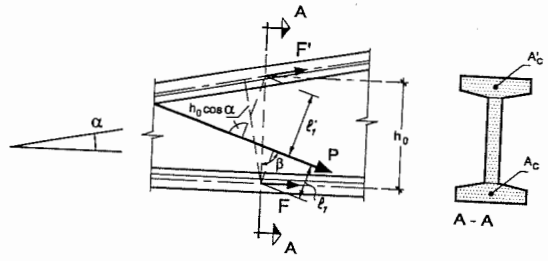


Figura 31-14

Si aplicamos la teoría de las piezas de canto constante

$$\sigma' = \frac{M}{h_o A'_c}$$

$$\sigma = \frac{M}{h_o A_c}$$

El área A_c corresponde realmente a la de la sección recta del ala inferior y por tanto $F = \frac{M}{h_o}$ y $\sigma_c = \frac{M}{h_o A_c}$

En cambio, para el ala superior, el área de su sección recta es $A'_c \cos \alpha$ y el brazo $h_o \cos \alpha$ (fig. 31-14) y por tanto

$$F' = \frac{M}{h_o \cos \alpha}$$

$$\frac{F'}{A'_c \cos \alpha} = \frac{M}{h_o A'_c \cos^2 \alpha}$$

luego

$$\sigma'_c = \frac{\sigma'}{\cos^2 \alpha} \qquad [31.61]$$

Con esto hemos corregido los valores de las tensiones producidas por la variación del canto y debidas al momento flector correspondiente a la acciones exteriores.

Naturalmente es necesario corregir también los valores de las tensiones producidas por la fuerza de pretensado P (Fig. 31-14). Llamando l_1 y l'_1 las distancias de los c.d.g. de las secciones de las alas a la línea de acción de la fuerza de pretensado, las tensiones se deducen inmediatamente para el caso de canto constante, despreciando de nuevo las tensiones en el alma

$$\sigma_{cp} = \frac{l'_1 P}{(l_1 + l'_1) A_c} \qquad [31.62]$$

$$\sigma'_{cp} = \frac{l_1 P}{(l_1 + l'_1) A'_c} \qquad [31.63]$$

o bien

$$\sigma_{cp} = \frac{l'_1 P}{h_o A_c \cos \alpha} \qquad [31.64]$$

$$\sigma'_{cp} = \frac{l_1 P}{h_o A'_c \cos \alpha} \qquad [31.65]$$

De nuevo, el valor de σ_{cp} es válido para el ala inferior, pero debido a la variación de canto, no es válido el valor calculado para σ_{cp} en el ala superior.

La fuerza en el ala superior será

$$\frac{P \cdot l_1}{h_o \cos \alpha}$$

y se reparte en una sección recta $A'_c \cos \alpha$, luego

$$\sigma_{lcp} = \frac{l'_1 P}{h_o A_c} \qquad [31.66]$$

$$\sigma'_{1cp} = \frac{l_1 P}{h_o A'_c \cos^2 \alpha} \qquad [31.67]$$

En ambos casos, momento M y fuerza P de pretensado, las tensiones en el ala horizontal no han requerido corrección debido a la variación de canto. Las tensiones en el ala superior han resultado incrementadas, en ambos casos, por el factor

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \text{tg}^2 \alpha$$

Lo anterior conduce a valores del lado de la seguridad, debido al hecho de haber despreciado las tensiones en el alma. GUYON , con base en la comparación de muchos proyectos reales, recomienda emplear en lugar del factor $1 + tg^2 \alpha$ el factor $1 + \frac{\text{tg}^2 \alpha}{2}$

EJEMPLO 31.1. Se desea dimensionar las vigas de la figura 31-15. El hormigón es de calidad *H-50*. El acero en armaduras activas está constituido por cordones Y 1770 S7 con las siguientes características:

- Resistencia a tracción, $f_{p,máx}$: 1770 N/mm²
- Sección transversal: 150 mm²
- Valor característico de la carga de rotura: 265 kN
- Valor característico del límite elástico al 0.2%: 233 kN
- Valor característico del límite elástico al 0.1%: 225 kN
- Para la relajación se adoptará la curva 32-20b) (Capítulo 32)

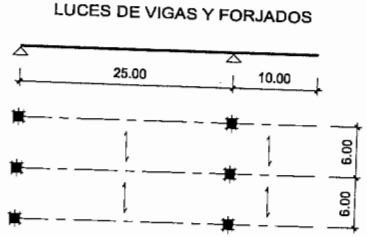


Figura 31-15

El diagrama tensión-deformación es el que se muestra en la figura 31-16.

Los coeficientes de minoración de las características resistentes de los materiales son:

- Para el hormigón: $\gamma_c = 1.50$
- Para el acero: $\gamma_s = 1.15$

Las acciones son las siguientes:

- Cargas permanentes (excluido el peso propio de la viga):

  7.5 kN/m² en vano

  5.5 kN/m² en voladizo

- (de ellos, 0.5 kN/m² actúan antes de tesar y corresponden al encofrado perdido)
- Sobrecarga de uso:
- 3.5 kN/m². La sobrecarga actúa simultáneamente en vano y voladizo, sin que exista posibilidad de alternancia de sobrecargas.
- Cerramiento en borde de voladizo: 10 kN/ml

Los coeficientes de mayoración de acciones son $\gamma_g = 1.35$ y $\gamma_q = 1.50$, y para el pretensado $\gamma_p = 1.10$ (favorable) y $\gamma_p = 0.90$ (desfavorable). Se suponen una humedad relativa del 70% y temperatura de 20°C constantes a lo largo de la vida de la pieza. Ambiente tipo I. Por razones constructivas el tesado debe realizarse únicamente desde el extremo opuesto al voladizo.

El tesado se realizará a los 5 días de edad, instante en el que, de los ensayos realizados, se deduce que el hormigón tendrá una resistencia del 80% de la prevista a 28 días. Tómese $\mu = 0.19$ y $k = 0.01^{-1}$. La penetración de cuñas es $\delta = 5$ mm.

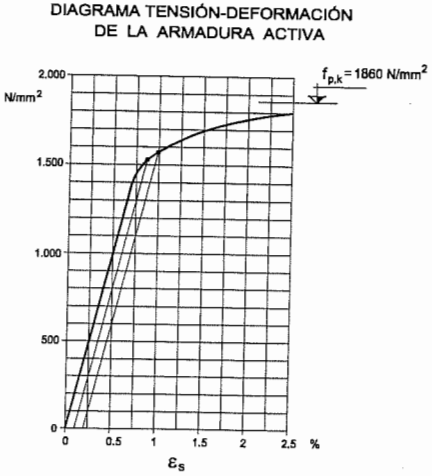


Figura 31-16

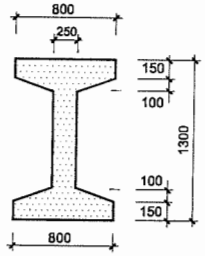


Figura 31-17

1) PREDIMENSIONAMIENTO

Por tanteos predimensionamos la sección transversal, de los que se deduce la que se indica en la figura 31-17.

1.1) CONSTANTES MECÁNICAS DE LA SECCIÓN BRUTA

$A_{c,b}$ = 0.5450 m²

$y_{1,b}$ = -650 mm

$y_{2,b}$ = 650 mm

I_b = 0.112641 m⁴

$W_{1,b}$ = - 0.173294 m⁴

$W_{2,b}$ = 0.173294 m⁴

Peso propio de la viga = 13.63 kN/m

1.2) CARGAS

Peso propio más cargas permanentes existentes antes del tesado:

g_1 = 13.63 + 0.50 · 6.00 = 16.63 kN/m

Carga muerta en vano: g_2 = 6.00·7.0 = 42 kN/m

Carga muerta en voladizo: g_2 = 6.00 · 5.0 = 30.00 kN/m

Sobrecarga: q = 6.00 · 3.5 = 21.00 kN/ml

Carga en punta de voladizo: 10 · 6.00 = 60.00 kN

1.3) ESFUERZOS

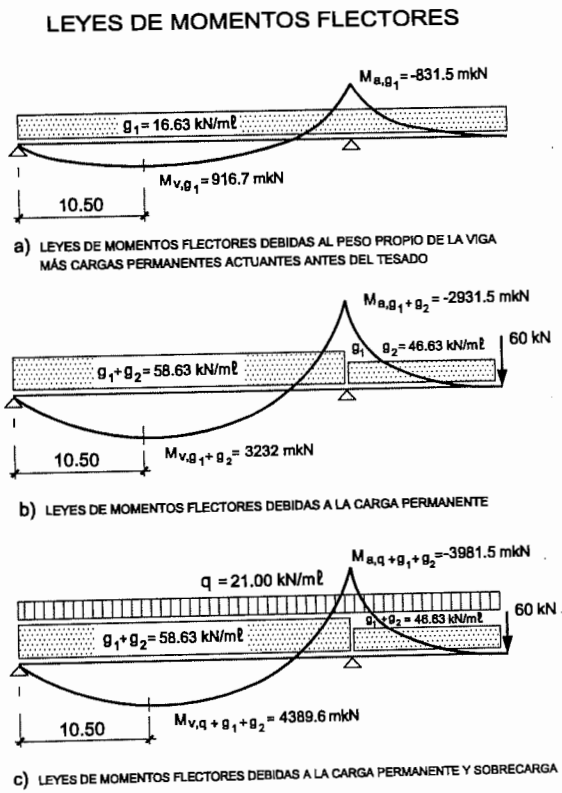


Figura 31-18

1.4) ESTIMACIÓN DE LA FUERZA INICIAL DE PRETENSADO P0 Y SU EXCENTRICIDAD

Para estimar los valores de la fuerza inicial de pretensado, P_o, y su excentricidad referida a la sección bruta, e_b, en las secciones críticas, suponemos unas pérdidas de la fuerza de pretensado al anclar la armadura del 10% en la sección de momento máximo de vano y del 15% en el arranque del voladizo, y del 35% a tiempo infinito. De acuerdo con el apartado 31.2.3., considerando las características de la sección bruta y la estimación adoptada para las pérdidas de pretensado obtenemos los siguientes polígonos que encierran posibles soluciones (P_0, e_0)[1].

1 Las condiciones a', b', c', d' y e' son las que se indican en el apartado 2.4.

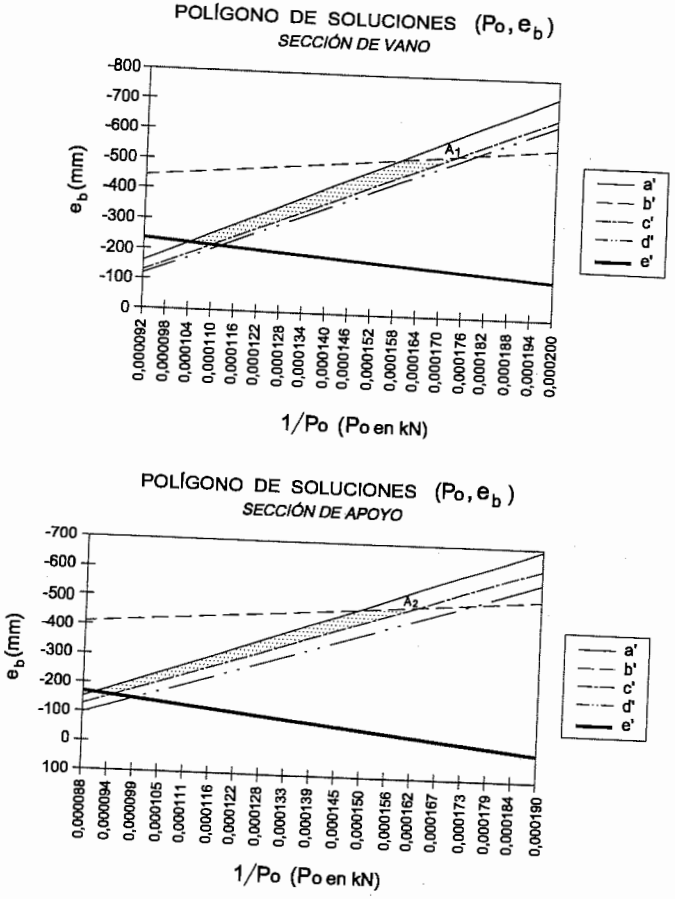


Figura 31-19

Cualquiera de los puntos interiores de los polígonos sombreados corespondería a un par de valores (P_0, e_b) en principio correctos. Tomamos unos puntos A^1 y A^2 [1]

- Sección de vano: $1/P_0 = 0.000170$; $P_0 = 5882$ kN

$$e_b = -490 \text{ mm}$$

$$P_o = \min\{0{,}75 \cdot n \cdot 265;\ 0{,}90 \cdot n \cdot 233\} = 5882 \Rightarrow n = 29$$

1 No tomamos los puntos A1 y A2 estrictos dado que se trata de un tanteo preliminar, y la consideración de las pérdidas reales y las características de las secciones neta u homogeneizada (según el caso) podría conducir a que no se cumplieran alguna de las condiciones necesarias en el cálculo definitivo que sigue.

- Sección de apoyo: $1/P_0 = 0.00165$; $P_0 = 6060$ kN

$$e_b = -500 \text{ mm}$$

$$P_o = \min\{0{,}75 \cdot n \cdot 265;\ 0{,}90 \cdot n \cdot 233\} = 6060 \Rightarrow n = 30$$

Disponemos 2 vainas dispuestas en vertical de ϕ75 mm con 15 tendones cada una (esto supone una ocupación de la vaina de 50.9%).

1.4) TRAZADO DE LOS TENDONES

Dispondremos un trazado parabólico que pasará por los siguientes puntos (véase la figura 31-20):

- En las secciones extremas, con excentricidad nula.
- En el punto de momento máximo de vano (punto *C*), con excentricidad
  - 490 mm
- En apoyo (punto *D*), con excentricidad 500 mm
- En el punto de momento nulo (punto *B*), con excentricidad nula.

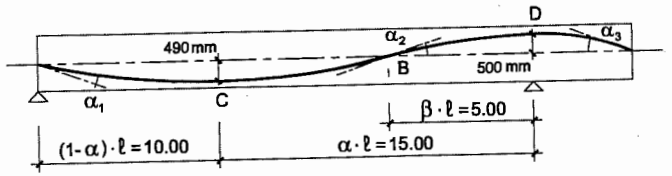


Figura 31-20

De acuerdo con las fórmulas recogidas en 31.2.6 tenemos:

TRAMO *AB*

$$y = \frac{e'_A - e'_c}{(1-\alpha)^2 \cdot l^2} x^2 = \frac{-(-0.490)}{(1-0.60)^2 \cdot 25.00^2} x^2 = 0.0049 \cdot x^2$$

$$\text{tg}\alpha_1 = -2 \cdot \frac{-(-0.490)}{(1-0.60) \cdot 25} = -0.098;\quad \alpha_1 = -0.098 \text{ rad}$$

TRAMO *BC*

$$y = \frac{e'_i - e'_c}{(\alpha-\beta)^2 \cdot l^2} x^2 = \frac{-(-0.490)}{(0.60-0.20)^2 \cdot 25.00^2} x^2 = 0.0049 \cdot x^2$$

$$tg\alpha_2 = -2 \cdot \frac{-0.490}{(0.60 - 0.20) \cdot 25} = 0.098; \quad \alpha_2 = 0.098 \text{ rad}$$

TRAMO *BD*

$$y = \frac{e'_i - e'_D}{\beta^2 \cdot l^2} x^2 = \frac{-(-0.500)}{-0.20^2 \cdot 25.00^2} x^2 = 0.020 \cdot x^2$$

$$tg\alpha_3 = -2 \cdot \frac{0.500}{(1 - 0.50) \cdot 20} = 0.100; \quad \alpha_3 = 0.100$$

2) COMPROBACIÓN

2.1) FUERZA INICIAL DE PRETENSADO

$$P_o = \min\{0{,}75 \cdot n \cdot 265;\ 0{,}90 \cdot n \cdot 233\} = 5962.5\ kN$$

2.2) COMPROBACIÓN DE LA SECCIÓN DE VANO

a) Pérdidas instantáneas de fuerza de pretensado

a.1) Pérdidas por rozamiento en el conducto

$\Delta P_1 = P_0 \cdot (1 - e^{-\mu(\alpha + kx)})$

- x = 10.50 m
- α = 0.098 rad

$\Delta P_1 = 5962.5 \cdot (1 - e^{-0.19(0.098 + 0.01 \cdot 10.5)}) = 225.6$ kN (3.8%)

a.2) Pérdidas debidas a la penetración de cuñas

$$\ell_c = \sqrt{\frac{1000 \cdot \delta \cdot A_p \cdot E_p}{P_o \cdot \mu \cdot (\frac{\alpha}{\ell} + k)}}$$

- δ = 5 mm
- E_P = 190. 000 N/mm²
- A_P = 30 · 150 = 4500 mm²
- α = 0.098 + 0.098 · 2 + 0.100 = 0.394

$$\ell_c = \sqrt{\frac{1000 \cdot 5 \cdot 4500 \cdot 190000}{5962.5 \cdot 10^3 \cdot 0.19 \cdot (\frac{0.394}{35} + 0.01)}} = 13324 \text{ mm}$$

$$P_{om} = P_o \cdot e^{-\mu(2 \cdot \frac{\alpha}{\ell} lc + klc)} = 5962.5 \cdot e^{-0.19(2 \cdot \frac{0.394}{35} 13.324 + 0.1 \cdot 13.324)} = 5491.4\ kN$$

$$(\Delta P_3)_A = 5962.5 - 5491.4 = 471.1\ kN$$

En la sección de vano (sección *C*),

$$\Delta P_2 = \frac{(13.324 - 10.500)}{13.324} \cdot 471.1 = 99.8\ kN\ (1.7\%)$$

a.3) Pérdidas por acortamiento elástico del hormigón

Constantes mecánicas de la sección neta en *C*:

- A_0 = 0.5362 m²
- $y_{1,0}$ = -658.1 mm
- $y_{2,0}$ = 641.9 mm
- I_0 = 0.110485 m⁴
- $W_{0,1}$ = -0.167885 m⁴
- $W_{0,2}$ = 0.172122 m⁴
- r_0 = 0.453929 m
- e_0 = -498.1 mm

$P_2 = 5962.5 - 225.6 - 99.8 = 5637.1\ kN$

Resistencia del hormigón al tesar: 0.80 · 50 = 40 N/mm²

$E'_{cj} = 8500 \cdot 40^{1/3} = 29070$ N/mm²

$$m_p = \frac{190000}{29070} = 6.5$$

$$\sigma_{cp} = \frac{5637.1}{0.5362} \left(1 + \frac{(-0.4981)^2}{0.453929^2}\right) \cdot 10^{-3} = 23\ N/mm^2$$

$$\Delta P_3 = A_p \cdot m_p \cdot \sigma_{cp} \cdot \left(\frac{n-1}{2n}\right)$$

$$\Delta P_3 = 4500 \cdot 6.5 \cdot 23 \cdot \left(\frac{30 - 1}{2 \cdot 30}\right) \cdot 10^{-3} = 325.2\ kN\ (5.5\%)$$

b) Tensión en el hormigón en el instante de tesado

$P_t = 5637.1 - 325.2 = 5311.9\ kN$

b.1) Fibra extrema inferior:

$$\sigma_{c1} = 1.1 \cdot \frac{P_t}{A_{c,o}}\left(1 + \frac{e_o\, y_{1,o}}{r_o^2}\right) + \frac{M_{g1}}{W_{1,o}}$$

$$\sigma_{c1} = 1.1 \cdot \frac{5311.9}{0.5362}\left(1 + \frac{0.4981 \cdot 0.6581}{0.453929^2}\right)\cdot 10^{-3} + \frac{916.7}{-0.167885}\cdot 10^{-3} = 23\ \text{N/mm}^2$$

$$\sigma_{c1} = 23\ N/mm^2 \le 0.60 \cdot (0.80 \cdot 50) = 24\ N/mm^2$$

b.2) Fibra extrema superior:

$$\sigma_{c2} = 0.9 \cdot \frac{P_t}{A_{c,o}}\left(1 + \frac{e_o\, y_{2,o}}{r_o^2}\right) + \frac{M_{g1}}{W_{2,o}}$$

$$\sigma_{c2} = 0.9 \cdot \frac{5311.9}{0.5362}\left(1 - \frac{0.4981 \cdot 0.6419}{0.453929^2}\right)\cdot 10^{-3} + \frac{916.7}{0.172122}\cdot 10^{-3} = 0\ \text{N/mm}^2$$

correcto.

b.3) Tensión en el hormigón al nivel del c.d.g. de las armaduras activas:

$$\sigma_{cp} = 1.1 \cdot \frac{5311.9}{0.5362}\left(1 - \frac{0.4981^2}{0.453929^2}\right)\cdot 10^{-3} + \frac{3232 \cdot 0.4981}{0.110485}\cdot 10^{-3} = 9\ \text{N/mm}^2$$

c) Pérdidas diferidas de fuerza de pretensado

c.1) Cálculo de $\varphi(\infty,5)$

Resistencia del hormigón a 5 días: 42.5 N/mm²

$E'_{c,i}(5) = 8500 \cdot 40^{1/3} = 29070$ N/mm²

$E'_{c,i}(28) = 8500 \cdot 50^{1/3} = 31313$ N/mm²

$\alpha = 1.50$; $\varphi_{01} = 2.0$

espesor ficticio: $e_f = \alpha \frac{2A}{u} = 1.50\ \frac{2 \cdot 0.5450}{4.9705} = 0.33\ m$

$\varphi_{02} = 1.37$

$\beta_5 = 0.17$

$\beta_\infty = 1.0$

$\beta'_{\infty-5} = 1.0$

$\frac{f_5}{f_\infty} = 0.40$

$\beta(5) = 0.8 \cdot (1 - 0.4) = 0.48$

$\varphi(\infty,5) = \beta(5) + \varphi_{01} \cdot \varphi_{02}(\beta_\infty - \beta_5) + 0.4 \cdot \beta'_{\infty-5} = 0.48 + 2.0 \cdot 1.37(1.0 - 0.17) + 0.4 \cdot 0.48 = 2.95$

c.2) Cálculo de $\varepsilon_{cs}(\infty,5)$

$\varepsilon_{01} = -32 \cdot 10^{-5}$

$\varepsilon_{02} = 0.97$

$\beta_5 = 0.03$

$\beta_\infty = 1.0$

$\varepsilon_{cs}(\infty,5) = (\beta_\infty - \beta_5)\varepsilon_{01}\varepsilon_{02} = (1.0 - 0.03) \cdot (-32 \cdot 10^{-5}) \cdot 0.97 = -301.1 \cdot 10^{-6}$

c.3) Cálculo de $\Delta\sigma_{pr}$

De acuerdo con la figura 32-20b) $\rho = 1.7\%$

$$\Delta\sigma_{pr} = \frac{1.7}{100} \cdot \frac{5311.9}{4500} = 20\ N/mm^2$$

$$q = \frac{4500 \cdot 10^{-6}}{0.5362} = 8.4 \cdot 10^{-3}\ \text{(cuantía geométrica)}$$

De GT-78 y GT-79 se deduce que $\chi = 0.72$

$$m_p = \frac{190000}{31393} \approx 6$$

$$r_0 = \sqrt{\frac{0.105031}{0.5362}} = 0.4426\ \text{m}$$

$$\Delta P_{dif} = 4500\ \frac{6 \cdot 2.95 \cdot 9 + 190000 \cdot 301.1 \cdot 10^{-6} + 0.80 \cdot 20}{1 + 6 \cdot 8.4 \cdot 10^{-3} \cdot \left(1 + \left(\frac{0.4819}{0.4539}\right)^2\right) \cdot (1 + 0.72 \cdot 2.95)} \cdot 10^{-3} = 776.7\ \text{kN}\ (13.0\%)$$

d) Tensiones a tiempo infinito

Fuerza de pretensado a tiempo infinito:

$$P_\infty = 5311.9 - 776.7 = 4535.2\ \text{kN}$$

Tensiones bajo cargas permanentes:

Tensiones en la fibra inferior:

$$\sigma_{c1} = 0.9 \cdot \frac{P_\infty}{A'_{c,o}}\left(1 + \frac{e'_o\, y_{1,0}}{(r'^2_o)}\right) + \frac{M_{g1}+M_{g2}}{W_{0,1}} = 0 \text{ N/mm}^2$$

Tensiones en la fibra superior:

$$\sigma_{c2} = 1{,}1 \cdot \frac{P_\infty}{A'_{c,o}}\left(1 + \frac{e'_o\, y'_{1,0}}{(r'_o)^2}\right) + \frac{M_{g1}+M_{g2}}{W_{0,2}} = 13 \text{ N/mm}^2 \le 0.45 \cdot f_{ck,28} = 22 \text{ N/mm}^2$$

Tensiones bajo carga total:

Tensiones en la fibra inferior:

$$\sigma_{c1} = 0.9 \cdot \frac{P_\infty}{A'_{c,o}}\left(1 + \frac{e'_o\, y'_{1,0}}{(r'_o)^2}\right) + \frac{M_{g1}+M_{g2}+M_q}{W_{0,1}} = -6 \text{ N/mm}^2 \ge f_{ckt,28}$$

Tensiones en la fibra superior:

$$\sigma_{c2} = 1.1 \cdot \frac{P_\infty}{A'_{c,o}}\left(1 + \frac{e'_o\, y'_{2,0}}{(r'_o)^2}\right) + \frac{M_{g1}+M_{g2}+M_q}{W_{0,2}} = 20 \text{ N/mm}^2 \le 0.6 \cdot f_{ck,28} = 30 \text{ N/mm}^2$$

2.3) COMPROBACIÓN DE LA SECCIÓN DE APOYO

a) Pérdidas instantáneas de fuerza de pretensado

a.1) Pérdidas por rozamiento en el conducto

En este caso, x = 25.00 m y $\alpha = 0.098 + 0.098 + 0.098 = 0.294$ rad

$\Delta P_1 = 5962.5 \cdot (1 - e^{-0.19(0.294+0.01\cdot 250)}) = 585.5$ kN (9.8%)

a.2) Pérdidas debidas a la penetración de cuñas

En esta sección, al ser $\ell_c < 25.00$ m , $\Delta P_2 = 0$.

a.3) Pérdidas por acortamiento elástico del hormigón

Constantes mecánicas de la sección neta en *D*: coinciden prácticamente con las de la sección *C* (salvo e_o, que es -508.1 mm).

$P_2 = 5962.5 - 585.5 = 5377.0$ kN

$$\sigma_{cp} = \frac{5377.0}{0.5362}\left(1 + \frac{(-0.5081)^2}{0.453929}\right) \cdot 10^{-3} = 23 \; N/mm^2$$

$$\Delta P_3 = 4500 \cdot 6.5 \cdot 23 \cdot \left(\frac{30 - 1}{2 \cdot 30}\right) 10^{-3} = 325.2 \; kN \; (5.5\%)$$

b) Tensión en el hormigón en el instante de tesado

$P_t = 5962.5 - 585.5 - 325.2 = 5051.8$ *kN*

b.1) Fibra extrema más comprimida:

$$\sigma_{c1} = 1.1 \cdot \frac{P_t}{A_{c,o}}\left(1 + \frac{e'_o\, y_{1,o}}{r_o^2}\right) + \frac{M_{g1}}{W_{1,o}}$$

$$\sigma_{c1} = 1.1 \cdot \frac{5051.8}{0.5362}\left(1 + \frac{0.5081 \cdot 0.6581}{0.453929^2}\right) \cdot 10^{-3} + \frac{831.5}{-0.167885} \cdot 10^{-3} = 22 \; N/mm^2$$

$\sigma_{c1} = 22 \; N/mm^2 \le 0.60 \cdot (0.75 \cdot 50) = 23 \; N/mm^2$

b.2) Fibra extrema menos comprimida o traccionada.

$$\sigma_{c2} = 0.9 \cdot \frac{P_t}{A_{c,o}}\left(1 + \frac{e_o\, y_{2,o}}{r_o^2}\right) + \frac{M_{g1}}{W_{2,o}}$$

$$\sigma_{c2} = 0.9 \cdot \frac{5051.8}{0.5362}\left(1 - \frac{0.5081 \cdot 0.6419}{0.453929^2}\right) \cdot 10^{-3} + \frac{831.5}{0.163408} \cdot 10^{-3} = 0 \; N/mm^2$$

$\sigma_{c2} = 0 \; N/mm^2 \ge 0 \; N/mm^2$

b.3) Tensión en el hormigón al nivel del c.d.g. de las armaduras activas:

$$\sigma_{cp} = 1.1 \cdot \frac{5051.8}{0.5362}\left(1 - \frac{0.5081^2}{0.453929^2}\right) \cdot 10^{-3} - \frac{2931.5 \cdot 0.5081}{0.110485} \cdot 10^{-3} = 10 \; N/mm^2$$

c) Pérdidas diferidas de fuerza de pretensado

$$\Delta P_{dif} = 4500 \frac{6 \cdot 2.95 \cdot 10 + 190000 \cdot 301.1 \cdot 10^{-6} + 0.80 \cdot 20}{1 + 6 \cdot 8.4 \cdot 10^{-3} \cdot \left(1 + \left(\frac{0.4819}{0.4539}\right)^2\right) \cdot (1 + 0.72 \cdot 2.95)} \cdot 10^{-3} = 831.1 \; kN \; (13.9\%)$$

d) Tensiones a tiempo infinito

Fuerza de pretensado a tiempo infinito:

$P_\infty = 5051.8 - 831.1 = 4220.7$ kN

Tensiones bajo cargas permanentes:

Tensiones en la fibra menos comprimida o traccionada:

$$\sigma_{c1} = 0.9 \cdot \frac{P_\infty}{A'_{c,o}} \left(1 + \frac{e'_o\, y'_{1,o}}{(r'_o)^2} \right) + \frac{M_{g1} + M_{g2}}{W_{0,1}}$$

$$\sigma_{c1} = 0.9 \cdot \frac{4220.7}{0.5362} \left(1 + \frac{(-0.5081)\cdot(-0.6581)}{(0.453929)^2} \right) \cdot 10^{-3} + \frac{2931.5}{-0.167885} \cdot 10^{-3} = 1 \; N/mm^2$$

Tensiones en la fibra más comprimida:

$$\sigma_{c2} = 1.1 \cdot \frac{P_\infty}{A'_{c,o}} \left(1 + \frac{e'_o\, y'_{2,o}}{(r'_o)^2} \right) + \frac{M_{g1} + M_{g2}}{W_{0,2}}$$

$$\sigma_{c2} = 1.1 \cdot \frac{4220.7}{0.5362} \left(1 + \frac{(-0.5081)\cdot(0.6419)}{(0.453929)^2} \right) \cdot 10^{-3} + \frac{2931.5}{0.172122} \cdot 10^{-3}$$

$\sigma_{c2} = 12$ N/mm^2 $\leq 0.45 \cdot f_{ck,28} = 27 \; N/mm^2$

Tensiones bajo carga total:

Tensiones en la fibra menos comprimida o traccionada:

$$\sigma_{c1} = 0.9 \cdot \frac{P_\infty}{A'_{c,o}} \left(1 + \frac{e'_o\, y'_{1,o}}{(r'_o)^2} \right) + \frac{M_{g1} + M_{g2} + M_q}{W_{0,1}}$$

$$\sigma_{c1} = 0.9 \cdot \frac{4220.1}{0.5362} \left(1 + \frac{(-0.5081)\cdot(-0.6581)}{(0.453929)^2} \right) \cdot 10^{-3} + \frac{3981.5}{-0.167885} \cdot 10^{-3}$$

$\sigma_{c1} = -5$N/mm$^2 \geq f_{ckt,28}$

Tensiones en la fibra más comprimida:

$$\sigma_{c2} = 1.1 \cdot \frac{P_\infty}{A'_{c,o}} \left(1 + \frac{e'_o\, y'_{2,o}}{(r'_o)^2} \right) + \frac{M_{g1} + M_{g2} + M_q}{W_{0,2}}$$

$$\sigma_{c2} = 1.1 \cdot \frac{4220.1}{0.5362} \left(1 + \frac{(-0.5081)\cdot(0.6581)}{(0.453929)^2} \right) \cdot 10^{-3} + \frac{3981.5}{0.172122} \cdot 10^{-3}$$

$\sigma_{c2} = 18$ N/mm^2 $\leq 0.6 \cdot f_{ck,28} = 30 \; N/mm^2$

Resumen de pérdidas:

	Sección de vano	Sección de arranque de voladizo
a) Hasta el tesado:		
Pérdidas por rozamiento en el conducto:	3.8%	9.8%
Pérdidas por penetración de cuñas:	1.7%	0.0%
Pérdidas por acortamiento elástico del hormigón:	5.5%	5.5%
Pérdida total hasta el tesado:	11.0%	15.3%
b) Pérdidas totales a tiempo infinito:	24.0%	28.3%

Tensiones finales en la armadura, a tiempo infinito:

En la sección de vano: $\sigma_{pf} = 1007.8 \; N/mm^2$

En la sección de arranque del voladizo: $\sigma_{pf} = 937.8 \; N/mm^2$

NOTAS:

1. Se ha realizado el predimensionamiento con las condiciones límite de tensiones del ACI. Como hemos dicho, se realice el cálculo definitivo por la Norma ACI o por EHE, este suele ser el método más práctico de predimensionamiento.
2. Por supuesto, una vez predimensionada la fuerza, la comprobación puede realizarse de acuerdo con EHE, aunque en el ejemplo hemos elegido la comprobación también según la norma ACI.
3. Como puede verse, las tensiones en la fibra extrema al tesar resultan 0 en los dos casos, lo cual indica que puede reducirse la sección hasta alcanzar las tracciones admisibles. Como ejemplo podría tratar de reducirse ligeramente el ancho de la cabeza superior (muy poco pues la inferior está ya en compresión límite al tesar).
4. El tanteo de M_U de acuerdo con [31.35] resulta

   $M_U = 0.9 \cdot d \cdot A_p \cdot f_{pd} = 0.9 \cdot (1.300 - 0.160) \cdot 30 \cdot 265 = 8156.7 \; mkN$

   que con $M_{gd} = 4363.2 \; mkN$ y $M_{qd} = 1736.4$ mkN en la sección más desfavorable, cumple holgadamente.
5. A continuación del cálculo realizado, éste debe completarse con los siguientes:

   Estados límite últimos:

   Flexión: Ver capítulo 36.

   Cortante: Ver capítulo 39.

   Zonas de anclaje: Ver capítulo 57.

   Estados límite de servicio:

   Fisuración (si se desea verificar con EHE): Ver capítulo 43.

   Deformaciones: Ver capítulo 48.

CAPÍTULO 32

MÉTODO DE LOS ESTADOS LÍMITE Y OTROS MÉTODOS DE CÁLCULO. CARACTERÍSTICAS DEL HORMIGÓN. CARACTERÍSTICAS DE LAS ARMADURAS. INTRODUCCIÓN DE LA SEGURIDAD EN EL CÁLCULO

32.1 CONCEPTOS GENERALES SOBRE LOS MÉTODOS DE CÁLCULO DE ESTRUCTURAS DE HORMIGÓN

Todo método de cálculo de estructuras de hormigón se inserta en un proceso general de proyecto, que comprende las siguientes etapas principales:

a) Concepción de la estructura

b) Establecimiento de las acciones

c) Elección de los materiales

d) Introducción de la seguridad

e) Cálculo de las solicitaciones

f) Dimensionamiento de secciones y piezas

g) Desarrollo de los detalles constructivos

La funcionalidad, durabilidad, economía y cualidades estéticas de la estructura están fuertemente condicionadas por la eficacia con que se resuelven esas etapas. En los últimos años se han realizado avances importantes en las etapas b) a f). Sin

embargo no debe olvidarse que las etapas a) y g), correspondientes a la concepción general y al desarrollo de los detalles constructivos, tienen una importancia medular sobre la calidad final de la estructura.

Anteriormente hemos estudiado el proceso de cálculo destinado a conocer los *esfuerzos* actuantes en una sección cualquiera, cuyo conjunto forma *la solicitación* actuante en esta sección. La solicitación actuante en una sección, debe ser menor o igual que la capacidad resistente de dicha sección[1]. En los diferentes capítulos se han analizado los distintos tipos y esquemas estructurales y sus campos de aplicación preferentes[2].

Los esfuerzos (momentos flectores, momento torsor, esfuerzo cortante, esfuerzo rasante, esfuerzo axil, etc.) no tienen existencia real, sino que son artificios de cálculo, que se han mostrado extremadamente eficaces en la práctica. Sin embargo, los métodos de ensayo en modelo reducido, o el de modelos mediante elementos finitos, por citar dos ejemplos, permiten el cálculo directo de las deformaciones y tensiones sin el empleo del artificio de los esfuerzos ni de la solicitación.

Como hemos dicho, es obvio que la etapa de concepción es esencial para los aspectos funcionales, constructivos y estéticos de la estructura. No es menor su importancia en los aspectos económicos y debemos señalar que, de las dos fases que más marcadamente condicionan la economía de una solución estructural, y que son la concepción general y el cálculo propiamente dicho, la primera es de primordial importancia. Si la elección del esquema estructural es desacertada, por muy refinado que luego sea el cálculo, la solución será siempre más costosa que la correspondiente a un planteamiento estructural lógico, aunque su cálculo no se haya realizado tan refinadamente.

A lo largo del desarrollo del hormigón armado, hasta su estado actual, han sido muchos y muy diversos los métodos de cálculo utilizados.

- Desde el punto de vista del establecimiento de la seguridad, los métodos pueden ser *deterministas o probabilistas.*
- Considerado el cálculo de los esfuerzos, los métodos pueden corresponder al cálculo *lineal*, al *no lineal*, o a los basados en la formación de rótulas plásticas.
- Al considerar el comportamiento de los materiales, y en particular su resistencia, de nuevo los métodos pueden dividirse en *deterministas o probabilistas.*
- Desde el punto de vista del cálculo de secciones, en especial por lo que se refiere a los esfuerzos de flexión y compresión, podemos hablar de métodos elásticos o de métodos plásticos.

Todo ello se amplía a continuación y será desarrollado en los capítulos siguientes.

1 EHE siguiendo una traducción directa de las versiones inglesas del MODEL CODE 90 (32.1) y del EUROCÓDIGO EC-2 (32.2) emplea la expresión "Efecto de las acciones" en lugar del de "solicitaciones", que empleamos en adelante.

2 EHE siguiendo de nuevo la traducción directa de las versiones inglesas del MODEL CODE 90 y del EUROCÓDIGO EC-2 emplea la expresión "Respuesta de la estructura".

32.2 INTRODUCCIÓN DE LA SEGURIDAD

32.2.1 EL CONCEPTO DE SEGURIDAD

La necesidad de intercalar un cierto margen entre la situación capaz de producir la pérdida de la capacidad resistente de una estructura y la situación prevista para su utilización, es una idea intuitiva. El concepto no es nada elemental y PUGSLEY (32.3) cita los estudios preliminares de MOSLEY (32.4), que se planteó ya en 1843 el problema de la seguridad de la estabilidad de un prisma (fig. 32-1a)), de peso N y sometido a una fuerza horizontal H, actuante en su centro de gravedad G.

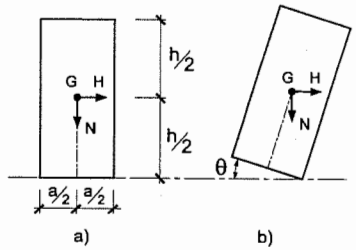


Figura 32-1

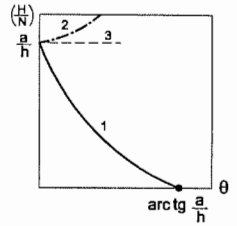


Figura 32-2

Las condiciones clásicas de equilibrio, llamando μ al coeficiente de rozamiento entre el prisma y el plano de apoyo, son:

$$N\mu \geq H \text{ (Deslizamiento)} \qquad [32.1]$$

$$N\frac{a}{2} \geq H\frac{h}{2} \text{ (Vuelco)} \qquad [32.2]$$

Estas ecuaciones de equilibrio estricto, evidentemente no nos dejan satisfechos, pues resulta fácil concebir que se ha sobrestimado el coeficiente de rozamiento o subestimado el valor de H o que simplemente suceda que H sufra un aumento imprevisto. Parece pues clara la necesidad de que [32.1] y [32.2] sean cumplidas, no estrictamente, sino con un cierto margen de seguridad.

Pero este margen resulta necesario *no sólo por los motivos expuestos.*

Consideremos, tal como se indica en la figura 32-1b), que el prisma gira un ángulo bajo la acción de la fuerza H y que el no deslizamiento está garantizado.

La condición [32.2] se transforma ahora en

$$N\left(\frac{a}{2}\cos\theta - \frac{h}{2}\operatorname{sen}\theta\right) \geq H\left(\frac{a}{2}\operatorname{sen}\theta + \frac{h}{2}\cos\theta\right) \qquad [32.3]$$

de donde, en condición de equilibrio estricto,

$$H = N\frac{a - h\,\mathrm{tg}\,\theta}{h + a\,\mathrm{tg}\theta} \qquad [32.4]$$

En la figura 32-2 se representa [32.4] como variación de $\frac{H}{N}$ con θ, como curva 1, y pone de manifiesto *que, una vez iniciado el giro, el valor de H necesario para producir el vuelco decrece.* Para la mayoría de los técnicos esto representa una peligrosa particularidad de esta estructura y preferirían que, al aumentar el giro θ, el valor necesario de H para producir el vuelco creciese (curva 2) o, al menos, se mantuviese constante (línea 3).

Como en cualquier construcción debe admitirse la posibilidad de pequeños giros θ, de nuevo es clara la necesidad de introducir un cierto margen de seguridad en la condición [32.2].

32.2.2 DETERMINISMO Y PROBABILISMO

La capacidad resistente de una pieza depende, en general, de muchos valores, entre los cuales deben señalarse las características de los materiales empleados, las dimensiones de la sección, la cantidad y posición de las armaduras, etc.

La solicitación actuante en esa sección, es decir, el conjunto de esfuerzos aplicados a ella, en especial si la pieza es hiperestática, depende no solamente de todo lo dicho, sino, además, de los valores alcanzados por los pesos específicos de los materiales que componen la estructura y de los valores de las cargas permanentes, acciones de uso, viento, sismo, temperatura, posibles asientos, etc.

Todas estas magnitudes pueden ser manejadas considerándolas:

a) *Como valores deterministas*. En este sentido se suponen como *perfectamente conocidos*[1].

b) *Como valores probabilistas*. En este caso, dichas magnitudes se consideran como *variables aleatorias* y, por tanto, de imposible *conocimiento*, aunque sí susceptibles de ser *estimadas* con la *fiabilidad* que deseemos. En general, cuanto más alta sea la fiabilidad deseada, mayor será el coste económico del proceso de estimación, pero más reducido el coste de la estructura.

32.2.3 MÉTODOS ELÁSTICOS Y MÉTODOS PLÁSTICOS

La introducción de la seguridad supone siempre una comparación entre la *solicitación actuante* en cada sección de las piezas y la *capacidad resistente* que la sección es capaz de desarrollar en forma de *respuesta.*

El cálculo de la capacidad *resistente* puede hacerse de dos formas notablemente diferentes:

- Suponiendo un comportamiento lineal del hormigón y del acero, con proporcionalidad entre tensiones y deformaciones. Normalmente, los métodos basados en esta hipótesis son designados como *Métodos Elásticos o Métodos Clásicos.*
- Suponiendo un comportamiento plástico o elastoplástico del hormigón y un comportamiento elastoplástico del acero. Normalmente los métodos de este tipo se denominan *Métodos en Rotura.*

Actualmente las Normas de casi todos los países se basan en el cálculo en rotura, asociado o no a bases probabilistas.

Con ello, se han ido abandonando los métodos clásicos, en los que se basaban las normas antiguas. De hecho, los métodos clásicos aún siguen siendo convenientes para algunos problemas concretos y, por ello, los estudiaremos en parte en los capítulos siguientes. Por lo demás, y desde un punto de vista general, son métodos superados y con errores importantes, que analizaremos más adelante[1].

32.3 MÉTODO DE LOS ESTADOS LÍMITE (INSTRUCCIÓN EHE)

32.3.1 BASES GENERALES

El objetivo esencial del proyecto, desde el punto de vista de la seguridad, es definido muy claramente por el MODEL CODE en el apartado 1.2 del Volumen 1.

"Las estructuras deben, con el grado de fiabilidad apropiado:

- *Soportar todas las acciones y otras influencias medioambientales que, previsiblemente, puedan ocurrir durante la construcción.*
- *Comportarse adecuadamente durante su utilización a través del período de vida útil previsto, que debe ser especificado por el cliente."*

En lo anterior se establecen dos puntos de primordial interés. El primero es el tratamiento probabilista de la seguridad y la introducción por tanto del concepto de "probabilidad de puesta fuera de servicio" aceptando, en definitiva, que la estructura tendrá un *fiabilidad determinada*, pero no una seguridad absoluta.

Un concepto pionero en este campo fue el introducido por E. TORROJA y A. PÁEZ (31.5), que estudiaron la determinación del valor del coeficiente de seguridad que hace mínima la suma de los costes de la obra en sí, más el de la reconstrucción y el de la prima del seguro de daños.

Una exposición general fue realizada por J. FERRY BORGES y M. CASTANHETA en 1971 (32.6).

El segundo punto importante es el concepto de *duración de vida prevista o vida útil*, renunciando a la idea de que nuestra estructura se construye *para siempre*. La tabla T-32.1, tomada de la referencia (32.3), indica las vidas útiles para las que se suelen proyectar objetos muy diferentes.

1 La palabra, hoy habitual en el cálculo de estructuras, fue primitivamente empleada en la física y la filosofía. Muy probablemente, el primero en utilizarla fue LAPLACE.

1 En general, estos errores están del lado de la seguridad. Es obligado conocer que el funcionamiento de dichos métodos fue bastante satisfactorio y no debe olvidarse que la mayoría de las estructuras hoy existentes fueron calculadas con ellos.

TABLA T-32.1

PERÍODOS DE VIDA ÚTIL CONSIDERADOS EN PROYECTO (Tomado de A. PUGSLEY) (32.3)

Automóviles	150.000 km ó 10 años
Aviones	30.000 horas de vuelo ó 10 años
Barcos	40 años
Edificios de Viviendas	100 años
Edificios de Oficinas	50 años
Grandes Fábricas	40 años
Almacenes	80 años
Puentes de Carretera	100 años
Puentes de Ferrocarril	80 años
Obras de Puertos	200 años
Iglesias	500 años
Catedrales	1.000 años

La tabla pone en evidencia, no el que no seamos capaces de proyectar esos objetos para vidas útiles más largas, sino el que no es rentable hacerlo, debido a previsibles cambios sociales, económicos y técnicos, que harán necesario o interesante su reemplazamiento y, por tanto, superfluos mayores períodos de vida útil.

Los riesgos de una puesta fuera de servicio son de muy diferentes tipos y de compleja valoración, pero pueden agruparse en:

- Riesgo de pérdidas de vidas humanas, de heridas a personas, reacciones de la opinión pública frente a las consecuencias de una eventual puesta fuera de servicio, etc.
- Riesgos económicos, en especial:
  - Los provocados por la interrupción del servicio de la estructura.
  - Los correspondientes a su reparación, si ésta es posible.
  - Los relativos a su eventual demolición, retirada y reconstrucción.
  - No debiera nunca dejar de considerarse el problema en toda su globalidad. Los riesgos a considerar no son sólo los de la propia construcción sino los de otras próximas y los del entorno que pueda resultar afectado.

32.3.2 DEFINICIÓN DE LOS ESTADOS LÍMITE

Se considera que una estructura o una parte de ella se ha vuelto impropia para el cumplimiento de la función para la que fue proyectada, cuando alcanza un estado, que llamaremos estado *límite*, en el cual se viola alguno de los criterios que rigen su comportamiento.

De acuerdo con lo anterior, los estados límites pueden clasificarse en dos grandes grupos:

- *Estados límite últimos*. Son los correspondientes a la capacidad de la estructura para resistir las cargas previstas.
- *Estados límite de utilización*. Son los correspondientes a la utilización normal de la estructura y a su durabilidad.

32.3.3 ESTADOS LÍMITE ÚLTIMOS

Puede alcanzarse un estado límite último, en los casos siguientes:

1. Pérdida del equilibrio estático de una parte o del conjunto de la estructura, considerada como un cuerpo rígido.
2. Transformación de la estructura en un mecanismo.
3. Estados límite últimos de resistencia o de deformación excesiva del material en una sección:
   - Bajo solicitaciones normales. Se entiende por solicitaciones normales las que producen tensiones paralelas a la directriz de la pieza, tales como el momento flector y el esfuerzo axil.
   - Bajo solicitaciones tangentes:
     - Anclaje
     - Esfuerzo cortante
     - Esfuerzo rasante
     - Punzonamiento
     - Torsión
4. Estados límite últimos motivados por inestabilidad.
5. Estados límite últimos motivados por fatiga.

32.3.4 ESTADOS LÍMITE DE UTILIZACIÓN

1. *Fisuración*. Bien sea producida por el alargamiento de las armaduras, bien por excesivas compresiones en el hormigón.
2. *Deformación*. Su limitación puede venir impuesta por condiciones intrínsecas de la propia estructura o por la necesidad de que sus movimientos resulten compatibles con otras partes no estructurales del edificio (fachadas, tabiquerías, solados, etc.) o con elementos contenidos en el edificio.
3. *Vibración*. La acción de la maquinaria, del viento, de vehículos o personas puede crear vibraciones desagradables para los seres humanos o perturbadoras para la funcionalidad del edificio.

32.3.5 NIVELES DE CÁLCULO EN ESTADOS LÍMITE

El método de los estados límite, desarrollado fundamentalmente en el seno del CEB (Comité Eurointernacional del Hormigón) y de la FIP (Federación Internacional del Pretensado)[1], puede plantearse en tres niveles diferentes.

Nivel 1. En este nivel, que es el actualmente más elaborado y el adoptado tanto por el MODEL CODE CEB-FIP 90 (32.1), el EUROCÓDIGO EC-2 (32.2), la Instrucción EHE (32.7) y por las Normas de muchos otros países, los aspectos probabilistas del cálculo se tienen en cuenta a través de valores característicos de las acciones y de las resistencias de los materiales. A estos valores se asocian coeficientes parciales de seguridad, basados en lo posible en la consideración de los aspectos probabilísticos y en la experiencia práctica. Es por tanto un método semiprobabilista.

Nivel 2. En este nivel, el cálculo se aborda representando las acciones y las resistencias de los materiales mediante funciones aleatorias definidas a través de unos parámetros estadísticos adecuados, todo ello asociado a un cierto nivel de fiabilidad. Es por tanto un método probabilista. Su aplicación práctica, a causa de nuestro atraso en cuanto a conocimientos de las funciones estadísticas de acciones y de resistencias, está todavía limitada a casos especiales. Es la base para el cálculo de los coeficientes parciales empleados en el Nivel 1.

Nivel 3. Se basa en un cálculo probabilista exacto de la estructura, mediante el conocimiento completo de las funciones de distribución correspondientes, estando definidos los niveles de seguridad en función de una probabilidad de ruina previamente fijada. Su estado de desarrollo es aún muy incipiente.

32.4 ACCIONES

32.4.1 CLASIFICACIÓN DE LAS ACCIONES

Las distintas acciones capaces de producir solicitaciones en una estructura pueden clasificarse según lo siguiente:

a) Según su naturaleza. Pueden distinguirse:

a-1) Acciones directas. Son los que se aplican directamente sobre la estructura, como por ejemplo:

- Peso propio de los elementos de la estructura.
- Otras cargas permanentes
- Las sobrecargas de uso.
- Los empujes de tierra, de líquidos, etc.

a-2) Acciones indirectas. Son, bien deformaciones impuestas, bien aceleraciones, que dan lugar, de manera indirecta, a la aparición de fuerzas en la estructura, como por ejemplo:

- Acciones reológicas.
- Variaciones térmicas.

1 Actualmente fusionados en la FIB (Federación International du Beton.)

- Asientos de la cimentación.
- Acciones sísmicas.

b) Según su variación a lo largo del tiempo. Pueden distinguirse:

b-1) Acciones permanentes. Las designaremos con la letra *G*. Son las que actúan constantemente en magnitud y posición.

Se clasifican como tales aquellas en las que se cumple al menos una de las condiciones siguientes:

- La variabilidad en el tiempo es pequeña.
- Su importancia sobre el efecto total de las acciones es pequeña.
- Presentando dos valores representativos de *G*, uno máximo y otro mínimo, resulta evidente cuál es el que gobierna todas las partes de la estructura.

Pueden citarse como ejemplo:

- El peso propio de la estructura.
- Las cargas inertes que gravitan sobre los elementos de la estructura.
- Peso de elementos embebidos en la estructura o fijados permanentemente a ella.
- Acciones resultantes de un nivel de líquido prácticamente constante.

b-2) Acciones permanentes de valor no constante. Las designaremos con la letra *G**. Son las que actúan constantemente, pero su valor no es constante a lo largo del tiempo, como por ejemplo:

- Acciones reológicas.
- Asientos de cimentación.
- Fuerza de pretensado.

b-3) Acciones variables. Las designaremos con la letra *Q*. Son aquellas cuyas variaciones son frecuentes y no despreciables, incluido el caso de las que pueden actuar o no sobre la estructura, como por ejemplo:

- Acciones de explotación o uso.
- Acciones de montaje.
- Acciones de viento y nieve.
- Acciones térmicas producidas por las variaciones de temperatura.
- Empujes de líquidos en general.
- Empujes del terreno.

b-4) Acciones accidentales. Las designaremos con la letra *A*. Son aquellas que presentan una débil probabilidad de actuación sobre la estructura pero su valor es de gran importancia, como por ejemplo:

- Impactos.

- Explosiones.

- Hundimientos del terreno.

- Avalanchas de piedra o nieve.

- Acciones sísmicas.

- Tornados en zonas habitualmente no expuestas a ellos.

En general, las acciones accidentales no son tenidas en cuenta en el cálculo más que en aquellos casos en que su valor, por un lado, no es despreciable y, por otro, no es tan importante que resulte irrazonable asegurar la resistencia de la estructura frente a tales acciones.

c) **Según su variación en el espacio.** Se distinguen dos grupos:

c-1) **Acciones fijas.** Son aquellas que se aplican sobre un mismo punto de la estructura, siendo constantes su dirección y sentido, como por ejemplo el peso propio, las cargas muertas, etc.

c-2) **Acciones libres.** Son aquellas que pueden variar en cuanto a su punto de aplicación, dirección o sentido, como por ejemplo las sobrecargas de uso, las acciones de viento y sismo, etc..

d) **Por su carácter dinámico**. Es importante la distinción entre:

- Acciones estáticas o cuasi-estáticas.

- Acciones dinámicas.

32.4.2 VALORES CARACTERÍSTICOS DE LAS ACCIONES

En el establecimiento del valor de una acción a considerar en el cálculo de la estructura, es evidente que no sólo deben ser tenidos en cuenta sus valores extremos, sino también la dispersión que presenten.

En general se define para cada acción un *valor característico* que permite estimarla con un cierto *nivel de confianza* que en la Instrucción EHE es del 95%. Esto es lo mismo que definir el valor característico de una acción como aquel que presenta una probabilidad del 95% de **no ser sobrepasado, en el sentido desfavorable para la estructura, durante su período de vida útil.**

Si las acciones siguen una *distribución gaussiana*, sus valores pueden estimarse en función únicamente de su valor medio y de su desviación cuadrática media relativa, de acuerdo con las fórmulas:

$$F_k = F_m(1 + 1{,}64\delta) \qquad [32.5]$$

cuando el riesgo procede del incremento de valor de la acción, y

$$F_k = F_m(1 - 1{,}64\delta) \qquad [32.6]$$

cuando dicho riesgo procede de la reducción del valor de la acción.

En las fórmulas [32.5] y [32.6] se han empleado las notaciones

F_m = Valor medio

F_k = Valor característico

δ = Desviación cuadrática media relativa de los valores de la acción[1].

El coeficiente 1,64 corresponde al nivel de confianza del 95% en el caso de distribución gaussiana.

En muchos casos las distribuciones de las acciones no se pueden asimilar a la ley gaussiana o no se posee la información necesaria sobre el tema y sus valores deberán ser fijados de manera empírica, a la vista del uso a que va a ser sometida la estructura[2].

a) **Peso propio de la estructura.** Se adoptan los siguientes pesos específicos:

Hormigón en masa:	23 kN/m³
Hormigón armado y pretensado:	25 kN/m³

b) **Valores característicos de las restantes acciones permanentes.**

La dispersión de las cargas permanentes puede venir de variaciones en sus dimensiones (sobreespesores, errores dimensionales, desviaciones permisibles, etc.) o en el peso específico de los materiales.

En general en España se utilizan para edificación como valores característicos los proporcionados por la Norma NBE-AE-88 (32.9) que considera los casos más frecuentes. Para otros casos, deberá recurrirse a los datos suministrados por los fabricantes de los productos o bien a mediciones directas.

Debe señalarse que los valores de la Norma NBE-AE-88 no son realmente valores característicos, es decir, no están asociados al nivel de confianza del 95%, pero en ausencia de mejor información vienen siendo manejados como tales. En la mayoría de los casos, las diferencias no son importantes[3].

Para otros tipos de estructura, véase lo expuesto en el Capítulo 9.

c) **Valores característicos de las acciones variables.**

También aquí, para los casos más frecuentes de edificación, vienen manejándose los valores proporcionados por la Norma NBE-AE-88 como valores característicos, aunque en sentido estricto no lo son. Una información alternativa puede obtenerse en la Norma UNE 24003 (32.10)[4].

Las diferencias entre las Normas citadas y la realidad pueden ser muy importantes y, en general, situadas del lado de la seguridad. Como un ejemplo esclarecedor, la Norma NBE-AE-88 fija para oficinas privadas una acción variable de uso de 20 kN/m². La figura 32-3, tomada de HART (32.11),

1 La desviación cuadrática media relativa se designa habitualmente como "coeficiente de variación".

2 El Eurocódigo 1 (32.8) contiene también información sobre lo que sigue.

3 NBE-AE-88 es, prácticamente, una reproducción de la Norma MV-101 de 1963.

4 Actualmente cancelada. Véase 9.3.

representa el histograma de frecuencias de las acciones variables de uso medidas por CULVERT en edificios reales. De acuerdo con la fórmula [32.5], el valor característico, si se acepta la distribución normal, resulta

$$F_k = 4{,}4\left(1 + 1{,}64\,\frac{2{,}7}{4{,}4}\right) = 8{,}8\ kN/m^2 \qquad [32.7]$$

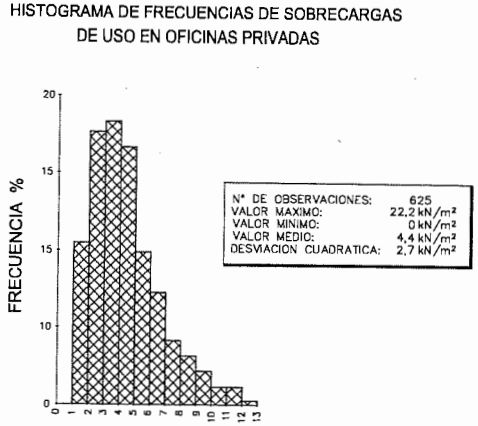


Figura 32-3

De todas formas, los valores normalizados de las acciones variables, y en particular de las de uso, deben ser considerados siempre con cautela, especialmente en el proceso preliminar de asimilación del uso de un edificio concreto al de uno de los tipos generales considerados en las Normas. Como ejemplo, el término "almacén" puede corresponderse con acciones de uso desde 20 kN/m² a varias kilo-Newton por m². Análogamente, existen "bibliotecas" para las que una acción de uso de 25 kN/m² puede ser suficiente y otras para las que el valor 100 kN/m² puede resultar escaso.

En cuanto a las acciones de viento y nieve, la normalización española está también contenida en la citada Norma NBE-AE-88. Para casos especiales de edificios sometidos a la acción del viento pueden consultarse las referencias (32.12), (32.13), (32.14) y el Cuaderno INTEMAC Nº 28 (32.15), así como la Norma Francesa correspondiente, (32.16), que contiene también información detallada sobre acciones de nieve.

Para los Puentes de Carretera, Puentes de Ferrocarril y otros tipos de construcciones, véase lo dicho en el Capítulo 9. En particular, las Acciones en Puentes de Carretera y Ferrocarril están definidas en dicho capítulo.

La reglamentación en España de las acciones sísmicas está contenida en la Norma Sismo-resistente (NCS-94) (32.17).

d) Valores característicos de las acciones accidentales. Son valores nominales que se escogen como aquellos más allá de los cuales no interesa pretender la supervivencia de la estructura. En el caso de la Edificación no suelen estar normalizados, por lo que generalmente son fijados por el cliente o por el autor del proyecto. En el caso de Obras Públicas, deben regir las normas específicas (Capítulo 9).

32.4.3 VIBRACIONES

Para evitar molestias a los usuarios, producidas por las vibraciones de las estructuras, la frecuencia natural de vibración de la estructura, f, debe ser mantenida lejos de la frecuencia crítica, f_{crit}, la cual depende del uso del edificio.

$$f \neq k f_{crit} \qquad [32.8]$$

donde k puede tomar cualquier valor entero positivo. Los valores de f_{crit} se indican en la Tabla T-32.2 de acuerdo con el MODEL CODE 90 [1].

Las vibraciones pueden producirse por personas andando o corriendo, máquinas, viento, tráfico de carretera o ferrocarril, el propio proceso constructivo, etc.

TABLA T-32.2

FRECUENCIA CRÍTICA DE ESTRUCTURAS SOMETIDAS A VIBRACIONES CAUSADAS POR MOVIMIENTO DE PERSONAS

Clase de edificio	Frecuencia crítica f_{crit} (Herzios)
Gimnasios y edificios deportivos	8,0
Salas de baile y salas de concierto sin asientos fijos	7,0
Salas de concierto con asiento fijo	3,4
Estructuras para peatones y ciclistas:	
En este tipo de estructuras deben evitarse frecuencias entre 1,6 y 2,4 Hz y entre 3,5 y 4,5 Hz.	
Estructuras para corredores a pie:	
En este tipo de estructuras deben evitarse frecuencias entre 2,4 y 3,5 Hz.	

32.5 MATERIALES[2]

Aunque con muchos matices convencionales, también las características fundamentales del hormigón y del acero son tratadas con una base semiprobabilista.

1 Si las vibraciones están en resonancia y pueden producir grandes flechas o fatiga, el problema debe ser tratado como un estado límite último.

2 Véase el Capítulo 28 para otras propiedades del hormigón.

32.5.1 HORMIGÓN

Habitualmente el hormigón de una estructura es definido en el proyecto fijando tres de sus parámetros fundamentales:

- Tamaño máximo del árido
- Consistencia
- Resistencia

Por supuesto, algunas obras de características especiales pueden requerir la fijación de condiciones a otros parámetros, en especial el cemento.

a) *Tamaño máximo del árido*

El motivo de su limitación radica en la necesidad de asegurar que el hormigón pasará con razonable facilidad entre las armaduras o entre éstas y los encofrados y rellenará correctamente el volumen encofrado.

A este fin, la Instrucción EHE fija que al menos el 90%, en peso, del árido grueso será de tamaño inferior a la menor de las dimensiones siguientes:

a-1) El 0,8 de la distancia horizontal libre entre armaduras o vainas independientes o entre éstas y el borde de la pieza si las armaduras o vainas forman más de 45° con la dirección del hormigonado.

a-2) 1,25 de la distancia entre una armadura o vaina y el paramento más próximo si la armadura o vaina forma un ángulo no mayor de 45° con la dirección de hormigonado.

a-3) La cuarta parte de la anchura, espesor o dimensión mínima de la pieza que se hormigona, con las dos excepciones siguientes:

- Un tercio del espesor mínimo en el caso de ejecución muy cuidada (prefabricación en taller, por ejemplo) y en aquellos elementos en que el efecto pared del encofrado sea reducido, como por ejemplo forjados que se encofren por una sola cara.
- 0,4 veces el espesor mínimo en el caso de la losa superior de forjados.

b) *Consistencia*

Su valor se fija para garantizar que, considerada la forma de la pieza y la disposición de las armaduras y tenidos en cuenta los medios de compactación disponibles en obra, el hormigón podrá rellenar eficazmente el volumen nominal de la pieza, sin presentar tampoco un exceso de agua que reduciría su resistencia y durabilidad.

De acuerdo con la Instrucción EHE, la resistencia se mide mediante el Cono de Abrams, realizándose el ensayo según la Norma UNE 83.313/90 (32.18).

La consistencia se clasifica de acuerdo con la Tabla T-32.3.

TABLA T-32.3

TOLERANCIAS PARA LA CONSISTENCIA DEL HORMIGÓN

Consistencia definida por su tipo		
Tipo de consistencia	Tolerancia en cm	Intervalo resultante
Seca[1]	0	0 - 2
Plástica	± 1	2 - 6
Blanda	± 1	5 - 10
Fluida	± 2	8 - 17
Consitencia definida por su asiento		
Asiento en cm	Tolerancia en cm	Intervalo resultante
Entre 0 - 2[1]	± 1	A ± 1
Entre 3 - 7	± 2	A ± 2
Entre 8 - 12	± 3	A ± 3

A es la consistencia especificada, en cm.

Como hemos dicho antes, un asiento excesivo, si es fruto de un contenido alto de agua (y no, por ejemplo del uso de superfluidificantes, solución correcta), puede significar un riesgo para la resistencia y durabilidad de la estructura. Pero también entraña un riesgo el uso de una consistencia excesivamente baja, ya que puede conducir a dificultades de compactación en obra y, por tanto, el riesgo de que queden coqueras, externas o internas, en el hormigón. En este sentido debe siempre recordarse que la consistencia del hormigón ha de obtenerse con una dosificación cuidada que conduzca a un hormigón fácil de compactar y en ella *será esencial disponer el cemento necesario y no conseguir la resistencia reduciendo indiscriminadamente el agua*. Obsérvese que un defecto de este tipo conducirá a una estructura deficiente, pero sin embargo la resistencia de las probetas de control será satisfactoria, ya que las probetas son siempre fácil y enérgicamente compactadas.

En la tabla T-32.4 recomendamos los valores adecuados en nuestra opinión para la mayoría de los casos.

1 La consistencia seca no debería ser controlada con el Cono de Abrams, que es muy poco sensible para ello. Existen métodos más apropiados como el de VEBE.

TABLA T-32.4
CONSISTENCIAS DE HORMIGÓN RECOMENDABLES

CONSISTENCIAS RECOMENDABLES (cm)		TIPO DE PIEZAS															
		DE DÉBIL DENSIDAD DE ARMADURAS				DE MEDIA DENSIDAD DE ARMADURAS						DE FUERTE DENSIDAD DE ARMADURAS					
		CIMENTACIONES	MUROS	PILARES Y PANTALLAS	VIGAS	FORJADOS, LOSAS Y ESCALERAS	CIMENTACIONES	MUROS	PILARES PILAS DE PUENTE Y PANTALLAS	VIGAS	FORJADOS, LOSAS Y ESCALERAS	CIMENTACIONES	MUROS	PILARES, PILAS DE PUENTE Y PANTALLAS	VIGAS	FORJADOS, LOSAS Y ESCALERAS
	MÍNIMA	7	7	9	9	7	9	9	11	11	9	10	10	20	15	10
	MÁXIMA	4	4	6	6	4	5	5	7	7	5	6	6	8	8	6

En todo lo anterior nos venimos refiriendo a la consistencia del hormigón en el momento del vertido en el encofrado y no a la que el hormigón tenga inmediatamente después de su amasado, que es irrelevante a los efectos de lo expuesto. Naturalmente, si el transporte del hormigón es largo, esto puede obligar a variar la dosificación de agua a lo largo del año según la temperatura ambiente.

c) *Resistencia a compresión*

Es la característica fundamental del hormigón y de hecho la mayoría de sus cualidades crece paralelamente a la resistencia y se miden y controlan a través de ella.

El término "resistencia del hormigón" carece, en sí mismo, de sentido. La resistencia de un mismo hormigón depende, entre otras cosas, del tipo y dimensiones de la probeta empleada y de su edad y condiciones de conservación. En la Instrucción EHE se emplea como probeta normalizada la cilíndrica de 15 cm de diámetro y 30 cm de altura, curada a una humedad relativa no inferior al 95% y a 20 ± 2°C y rota en estado húmedo a los 28 días de edad[1,2].

También la resistencia se enfoca desde un punto de vista probabilístico y la Instrucción EHE define la resistencia a considerar en el proyecto y establece el método de control durante la ejecución basándose en consideraciones probabilistas.

Para ello, introduce el concepto de *resistencia característica*, que es el valor que *presenta un nivel de confianza del 95%*, o lo que es lo mismo, cualquier probeta muestreada al azar tiene una probabilidad de 0,95 de superar dicho valor. Esta definición es también la adoptada por el CEB y por la FIP.

Si las resistencias del hormigón constituyen una población con distribución gaussiana, el valor característico (cuantil 0,95) viene dado por la expresión[3]:

$$f_{ck} = f_{cm}\,(1\text{-}1{,}64\delta) \qquad [32.9]$$

donde:

f_{ck} = Resistencia característica.

f_{cm} = Resistencia media.

δ = Desviación cuadrática media relativa (coeficiente de variación) de los valores de las resistencias.

Las resistencias características del hormigón a compresión están

1 El resto de los países europeos, excepto Francia, emplean probetas cúbicas de 15 ó 20 cm de arista. La probeta cilíndrica es la empleada también en Estados Unidos. CEB y EUROCÓDIGO EC-2 se basan en la probeta cilíndrica, aunque incluyen equivalencias con la cúbica.

2 El estado de humedad relativa igual o superior al 95%, aparte de su facilidad de obtención es el que conduce a un valor mínimo de la resistencia. Un hormigón seco resiste del orden del 20% más que en estado húmedo.

3 El MODEL CODE 90 adopta una relación, para los casos habituales, $f_{cm} = f_{ck} + 8$ (unidades en MPa).

recomendadas en EHE y se indican en la tabla T-32.5

TABLA T-32.5

RESISTENCIAS TIPIFICADAS DEL HORMIGÓN

Designación del hormigón	H-20	H-25	H-30	H-35	H-40	H-45	H-50
Resistencia característica (MPa)	20	25	30	35	40	45	50
Campo de empleo	Sólo hormigón en masa	No recomendable para hormigón pretensado					

Una vez adoptado en el proyecto un valor de la resistencia característica, la Instrucción establece el correspondiente sistema de control de calidad para verificar que se mantiene en el suministro del hormigón un valor de la resistencia característica no inferior al establecido en el proyecto.

Es claro que el valor de la resistencia característica del hormigón suministrado no coincidirá con el especificado en el proyecto, superándolo como norma habitual. Obsérvese que hablamos de resistencia característica del hormigón suministrado y no de resistencia característica del hormigón de la estructura. La razón es que, estrictamente hablando, la resistencia característica del hormigón de la estructura es de imposible averiguación, pues ni se habrá curado a humedad relativa superior al 95%, ni a la temperatura de 20 ±2°C, ni es posible reducir todo el hormigón de la estructura a probetas cilíndricas. Aunque las condiciones de humedad y temperatura fueran, por casualidad, las correspondientes a la probeta normalizada, y *estimásemos* la resistencia característica mediante el ensayo de probetas testigo 15/30, tampoco el resultado sería estrictamente comparable con el valor de la resistencia característica fijado en el proyecto. La razón es que el vertido y la compactación del hormigón en la estructura nunca son tan cuidadosos como en la probeta. El proyectista debe tener clara la idea de que el hormigón de la estructura es de inferior resistencia, a igual edad, que el de las probetas y, por lo tanto, que el valor especificado en el proyecto[1,2].

1 A igual edad y humedad, la relación de resistencias del hormigón de la estructura al de las probetas moldeadas oscila de 0,9 a 0,6, según la calidad de ejecución, facilidad de vertido y resistencia del hormigón, etc. En general, la relación disminuye al aumentar la resistencia.

2 En España, ha existido hasta 1998 la costumbre de emplear resistencias muy bajas de hormigón, con frecuencia f_{ck} = 17,5 MPa. Esta resistencia, con los cementos actuales, puede alcanzarse con contenidos muy bajos de cemento, con grave daño para la durabilidad. Por ello se ha excluido en la normativa de todos los países, para hormigón armado y pretensado.

De hecho, no se afirma que el hormigón de la estructura esté correctamente representado por el de las probetas moldeadas. Lo que si puede afirmarse es que, de acuerdo con los análisis teóricos, las investigaciones de laboratorio y la experiencia práctica, con los coeficientes de seguridad reglamentarios y basándose en la resistencia del hormigón en probetas moldeadas, los métodos actuales de cálculo conducen a estructuras satisfactorias y razonablemente económicas.

d) *Valores recomendables de la resistencia del hormigón*

Los estudios sobre optimización de estructuras, tanto por lo que se refiere a luces y dimensiones de piezas como a resistencias de los materiales, son escasos, debiendo destacarse los trabajos de MORAGUES (32.19), (32.20), (32.21) y GÓMEZ HERMOSO (32.22).

Como norma general, en piezas de cimentación y en general en piezas a flexión, no suele resultar económico el empleo de hormigones superiores al H-35, siendo el campo habitual el de los hormigones H-25 a H-35[1].

En edificios de alturas hasta 10 plantas, esos mismos hormigones pueden resultar aconsejables para pilares, vigas y forjados. En cambio, en edificios de mayor altura, para los pilares debe utilizarse un hormigón de resistencia más alta. Los rascacielos de hormigón, que alcanzan ya las 80 plantas, se están construyendo con hormigón de 80 a 140 MPa de resistencia, más alta sobre todo en pilares de las plantas inferiores[2]. En este tipo de edificios, la ventaja del hormigón de alta resistencia en pilares viene de tres aspectos diferentes:

- Ahorro directo en el coste de los pilares, pues la resistencia del hormigón crece más deprisa que su precio.
- Ahorro de espacio en las zonas bajas por la reducción de sección transversal de los pilares.
- Ahorro en el coste de la cimentación por reducción del peso de la estructura.

Estos hormigones no resultan, en general, en cambio interesantes en vigas ni forjados, pues no conducen a un ahorro significativo de hormigón en tales piezas. Incluso en edificios de gran altura, el hormigón adecuado para forjados y vigas es el de 25 a 35 MPa de resistencia[3]. Una excepción es el de elementos esbeltos de gran luz, en los cuales también los hormigones de alta resistencia tienen un campo de empleo interesante.

e) *Diagrama característico del hormigón*

Como diagrama característico tensión-deformación del hormigón se adopta el indicado en la figura 32-4, formado por un arco de parábola *0A*, de eje vertical y

1 A igual edad y humedad, la relación de resistencias del hormigón de la estructura al de las probetas moldeadas oscila de 0,9 a 0,6, según la calidad de ejecución, facilidad de vertido y resistencia del hormigón, etc. En general, la relación disminuye al aumentar la resistencia.

2 Estas resistencias se consiguen con cementos de gran calidad y relaciones A/C muy bajas, pero empleando superfluidificantes que permiten obtener consistencias muy fluidas, empleando sin embargo poca agua, y añadiendo microsílice. (Véase el Anejo 5).

3 Debe prestarse atención a que, si se emplea hormigón diferente en pilares del de vigas y forjados, al hormigonar estas últimas piezas las "rebanadas" de pilares que se hormigonan al mismo tiempo que los forjados y vigas deben hormigonarse con la calidad de hormigón prevista para los pilares. Esto complica un poco la ejecución. (Véase el Anejo nº 5).

vértice *A*, y un tramo rectilíneo *AB* de deformación perfectamente plástica, con deformación de rotura del 3,5‰.

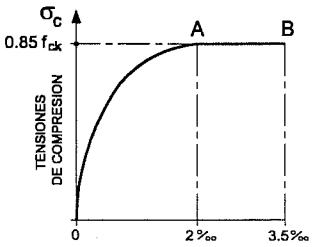


Figura 32-4

Este diagrama, adoptado por el CEB, la FIP y el EUROCÓDIGO EC-2 presenta en general un buen ajuste experimental. En algunos casos, como veremos más adelante, puede sustituirse incluso para diagramas más simples. El coeficiente 0,85 *no es un coeficiente de seguridad*, sino que representa un ajuste de la resistencia del hormigón de la pieza al de la probeta cilíndrica, habida cuenta de su diferente tamaño y de la posible aplicación de la carga durante largos períodos de tiempo.

32.5.2 ARMADURAS PASIVAS

32.5.2.1 Productos

Actualmente están en uso, como armaduras de hormigón armado, los productos siguientes:

a) *Barras lisas*

Su uso ha sido abandonado. Las correspondientes normas UNE han sido canceladas.

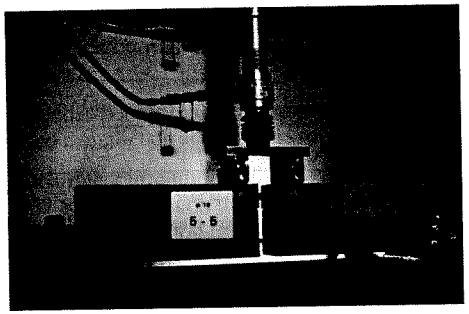
b) *Barras corrugadas*

Están normalizadas en UNE 36068:94 (32.23).

Tanto las Normas UNE como la Instrucción EHE consideran dos tipos de acero designados como B 400 S y B 500 S, donde las cifras corresponden a los límites elásticos garantizados de 400 y 500 N/mm^2. Ambos se fabrican en calidad soldable.

Dado que los aceros de alta resistencia tienen un módulo de elasticidad sensiblemente igual que el del acero ordinario, oscilando de 190.000 a 215.000 N/mm^2, al trabajar a tensiones altas sufren también grandes alargamientos, lo que en principio crearía peligro de fisuración excesiva en las piezas de hormigón. Este riesgo está paliado, en gran medida, por el hecho de que las barras son corrugadas, con lo que su adherencia y por lo tanto sus condiciones de anclaje mejoran sustancialmente y el incremento de fisuración producido no es, en general, excesivo.

Las características geométricas del corrugado son objeto de comprobación experimental para garantizar que proporcionan a la barra una capacidad adherente satisfactoria. El ensayo de adherencia se realiza por el método del BEAM-TEST, de acuerdo con lo previsto en la Norma UNE 36740:97 (32.24) (fig. 32.5), y en él se determinan la tensión media de adherencia (τ_{bm}) y la tensión de rotura de adherencia (τ_{bu}), que deberán cumplir las condiciones indicadas en la tabla T-32.6.



Ensayo por el método de BEAM-TEST para determinar las características de una barra corrugada con el fin de la homologación de la misma. Observense los comparadores electrónicos digitales y los transductores de inducción dispuestos en los dos extremos de la barra para registrar los corrimientos. (Cortesía de INTEMAC)

Figura 32-5

La tensión media de adherencia es el valor medio de las tensiones de adherencia que producen deslizamientos de la barra respecto al hormigón que la rodea de 0,01, 0,1 y 1 mm y es un valor más relacionado con el comportamiento adherente de la barra que el τ_{bu}, que tiene escaso significado práctico.

TABLA T-32.6

CONDICIONES DE ADHERENCIA DE LAS BARRAS CORRUGADAS

DIÁMETRO (mm)	τ_{bm} (N/mm^2)	τ_{bu} (N/mm^2)
$\phi \leq 8$	6,88	11,22
$8 \leq \phi < 32$	7,84 -0,12ϕ	12,74 - 0,19ϕ
$\phi \geq 32$	4	6,66

Las características de adherencia, si resultan satisfactorias en el ensayo, son objeto de homologación. El Certificado de Homologación, en el que figuran las características mínimas a cumplir por la geometría de los resaltos, debe ser facilitado por el fabricante del acero a petición del usuario.

TABLA T-32.7

CARACTERÍSTICAS MECÁNICAS MÍNIMAS GARANTIZADAS DE LAS BARRAS CORRUGADAS

Designación	Clase de acero	Límite elástico f_y en N/mm² no menor que (1)	Carga unitaria de rotura f_s en N/mm² no menor que (1)	Alargamiento de rotura en % sobre base de 5 diámetros no menor que	Relación f_s/f_y en ensayo no menor que (2)
B 400 S	Soldable	400	440	14	1,05
B 500 S	Soldable	500	550	12	1,05

(1) Para el cálculo de los valores unitarios se utilizará la sección nominal.

(2) Relación mínima admisible entre la carga unitaria de rotura y el límite elástico obtenido en cada ensayo

En las Tablas T-32.7 y T-32.8 se resumen las condiciones exigidas por EHE a las barras corrugadas, además del Certificado de Homologación de Adherencia. En los ensayos de doblado-desdoblado indicados en la Tabla 32.7 no deben apreciarse fisuras.

TABLA T-32.8

DIÁMETRO DE LOS MANDRILES

Designación	Doblado-desdoblado			
	$\alpha = 90°$ $\beta = 20°$			
	d ≤ 12	12 < d ≤ 16	16 < d ≤ 25	d > 25
B 400 S	5 d	6 d	8 d	10 d
B 500 S	6 d	8 d	10 d	12 d

donde:

d = Diámetro nominal de barra

α = Ángulo de doblado

β = Ángulo de desdoblado

Además de lo anteriormente indicado, las barras corrugadas deben llevar marcas de identificación del tipo de acero (geometría del corrugado) del Fabricante y del país de origen de la Unión Europea. Los códigos correspondientes se indican en la Norma UNE 36088. La serie de diámetros es la siguiente:[1]

6 - 8 - 10 - 12 - 14 - 16 - 20 - 25 - 32 y 40 mm

1 La serie indicada tiene, en principio, la ventaja de que permite distinguir fácilmente los diámetros por simple inspección visual. El intercalar el 14, hace perder esta importante cualidad a la serie.

c) *Mallas electrosoldadas*

Están normalizadas en UNE 36092:96 (32.25) y realizadas a partir de alambres cuyos diámetros pertenecen a la serie siguiente:

5 - 5,5 - 6 - 6,5 - 7 - 7,5 - 8 - 8,5 - 9 - 9,5 - 10 - 10,5 - 11 - 12 y 14 mm[1].

Para el reparto y control de la fisuración superficial pueden utilizarse, además, mallas con alambres corrugados de diámetros 4 - 4,5 mm. Estas mallas no pueden tenerse en cuenta a los efectos de comprobación de los estados límite últimos[2].

Se fabrican con alambres corrugados y pueden fabricarse también a partir de barras corrugadas.

Las condiciones exigidas por EHE a los alambres se resumen en la Tabla T-32.9. Estos, además, deben cumplir con el ensayo de adherencia anteriormente descrito.

Los nudos soldados deberán cumplir el ensayo de despegue definido en la Norma UNE 36462-80 (32.26), con una carga de despegue no inferior a 0,30 $A_s f_y$, siendo A_s el área de la sección transversal nominal del alambre sometido a tracción, que ha de ser el mayor de los concurrentes en el nudo, y f_y el límite elástico garantizado del acero[3].

TABLA T-32.9

CARACTERÍSTICAS MECÁNICAS MÍNIMAS GARANTIZADAS DE LOS ALAMBRES

Designación de los alambres	Ensayo de tracción (1)				Ensayo de doblado-desdoblado $\alpha = 90°$ (5) $\beta = 20°$ (6) Diámetro de mandril D'
	Límite elástico f_y N/mm² (2)	Carga unitaria f_s N/mm² (2)	Alargamiento de rotura (%) sobre base de 5 diámetros	Relación f_s/f_y	
B 500 T	500	550	8 (3)	1,03 (4)	8 d (7)

(1) Valores característicos inferiores garantizados.

(2) Para la determinación del límite elástico y la carga unitaria se utilizará como divisor de las cargas el valor nominal del área de la sección transversal.

(3) Además, deberá cumplirse:

1 En España no es usual el empleo de diámetros superiores a 12 mm aunque si frecuente la fabricación con parejas de barras en contacto. En otros países se llega al diámetro 16.

2 EHE autoriza hasta el 31 de diciembre del año 2000, la utilización de mallas, con alambres corrugados de diámetros 4 ó 4,5 mm para la comprobación de estados límite últimos. La razón de eliminar los diámetros finos, se basa en que para obtener estos alambres con la debida ductilidad es necesario realizar la laminación en frío con poca reducción de diámetro, es decir partiendo de un alambrón muy fino, lo cual es costoso.

3 Véase el Capítulo 43 sobre la resistencia de cruces soldadas dentro y fuera del hormigón.

$$A\% \geq 20 - 0{,}02\, f_{yi}$$

donde:

A = Alargamiento de rotura

f_{yi} = Límite elástico medido en cada ensayo

(4) Además, deberá cumplirse:

$$\frac{f_{si}}{f_{yi}} \geq 1{,}05 - 0{,}1\left(\frac{f_{yi}}{f_{yk}} - 1\right) < 1{,}03$$

donde:

f_{yi} = Límite elástico medido en cada ensayo

f_{si} = Carga unitaria obtenida en cada ensayo

f_{yk} = Límite elástico garantizado

(5) α = Ángulo de doblado

(6) β = Ángulo de desdoblado

(7) d = Diámetro nominal del alambre

El acero de los alambres corrugados se obtiene por un procedimiento de laminación en frío y no de trefilado. Su diagrama tensión-deformación es del tipo indicado en la figura 32-6 con ① mientras que, usualmente los aceros de dureza natural presentan un diagrama del tipo ②, con un amplio escalón horizontal. Entre los dos tipos de acero hay diferencias de comportamiento según el alargamiento que experimenten en la estructura.

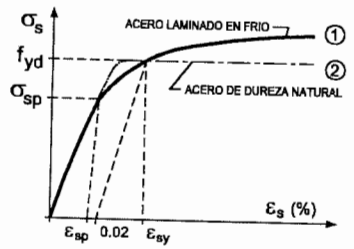


Figura 32-6

Desde el alargamiento ε_{sp}, correspondiente al límite de proporcionalidad, hasta el ε_{sy} del límite elástico, a igualdad de deformaciones el acero de dureza natural presenta mayores tensiones. Para alargamientos superiores a ε_{sy} ocurre lo contrario.

Frecuentemente se adopta para el cálculo un diagrama del tipo ②, para todo tipo de acero, pero puede considerarse el ① si se desea. En el Capítulo 20 se ven ambos casos.

32.5.2.2 Valores característicos

Como el valor habitualmente utilizado en los casos es el del límite elástico, éste se define, análogamente a como vimos en el caso de la resistencia del hormigón, en el sentido de *valor característico*, entendiendo por tal el que presenta un nivel de confianza del 95%.

Si los límites elásticos del acero constituyen una población de distribución gaussiana, el valor característico (cuantil 0,95) viene dado por la expresión

$$f_{yk} = f_{ym}\,(1\text{-}1{,}64\delta) \qquad [32.10]$$

donde:

f_{yk} = Límite elástico característico

f_{ym} = Límite elástico medio

δ = Desviación cuadrática media relativa (coeficiente de variación), de los valores de los límites elásticos.

Realmente y como veremos en lo que sigue, no sólo manejamos en el cálculo el valor del límite elástico, sino una amplia zona del diagrama del acero.

En este sentido, los fabricantes deberían garantizar un *diagrama característico* del acero (fig. 32-7), entendido como aquél en que a cada deformación ε_i le corresponde una tensión σ_{si} que tiene un nivel de confianza del 95%[1]. A falta de un diagrama garantizado por el Fabricante, la Instrucción EHE adopta el diagrama de la figura 32-8.

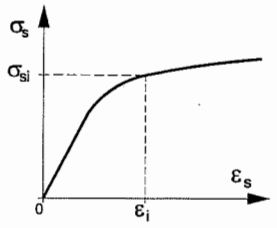


Figura 32-7

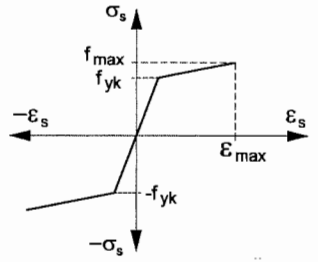


Figura 32-8

Para aceros laminados en frío, puede adoptarse el diagrama de la figura 32-9, cuya expresión analítica viene dada por las fórmulas

1 Véase el trabajo "Consideraciones sobre normalización de armaduras para hormigón" (J. CALAVERA) (32.27). En él puede ampliarse este aspecto, que exige algunas modificaciones en la definición tradicional (e incorrecta) del límite elástico característico. El MODEL CODE 90 recoge esta diferencia que es conceptualmente importante.

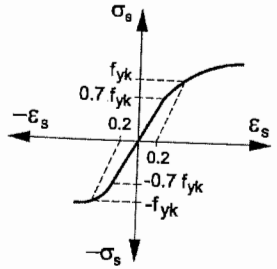


Figura 32-9

$$\sigma_s \le -0{,}7\,f_{yk} \qquad \varepsilon_s = -\frac{\sigma_s}{E_s} - 0{,}823\left[\frac{\sigma_s}{f_{yk}} + 0{,}7\right]^5 \qquad [32.11]$$

$$-0.7\,f_{yk} \le \sigma_s \le 0{,}7\,f_{yk} \qquad \sigma_s = \varepsilon_s\,E_s \qquad [32.12]$$

$$\sigma_s \ge 0{,}7\,f_{yk} \qquad \varepsilon_s = \frac{\sigma_s}{E_s} + 0{,}823\left[\frac{\sigma_s}{f_{yk}} - 0{,}7\right]^5 \qquad [32.13]$$

Para aceros laminados en frío, puede ocurrir que el módulo de elasticidad en compresión sea más bajo que en tracción, aunque la diferencia carece de importancia.

32.5.2.3 Clasificación de los aceros según su ductilidad

a) **Instrucción EHE**

Para zonas sísmicas, la Instrucción EHE, en su Anejo 12°, establece requisitos suplementarios para el acero. Las condiciones son las siguientes:

$$1.20 \le \frac{f_s}{f_y} \le 1{,}35 \qquad [32.14]$$

$$\varepsilon_{max} \ge 9\% \qquad [32.15]$$

Un acero que cumple estas condiciones es en España el definido como B 400 SD (soldable con características especiales de ductilidad), normalizado en la Norma UNE experimental 36065:97 EX (32.28). Los diámetros cubiertos por la norma son los de la serie:

6 - 8 - 10 - 12 - 14 - 16 - 20 - 25 - 32 - 40 mm

Además de la condición de alta adherencia estos aceros deben cumplir las condiciones de la Tabla T-32.10.

TABLA T-32.10
CARACTERÍSTICAS MECÁNICAS GARANTIZADAS DE LAS BARRAS CORRUGADAS DE ACERO B 400 SD

Designación	Clase de acero	f_y (N/mm²) no menor que (1)	f_s (N/mm²) no menor que (1)	f_y real/f_y nominal	Alargamiento de rotura sobre base de 5 diámetros	$\varepsilon_{máx}$	f_s/f_y en ensayo (2)
B 400 SD	Soldable con características especiales de ductilidad	400	480	≤ 1,20	≥ 20%	≥ 9%	≥ 1,20 ≤ 1,35

(1) Para el cálculo de los valores unitarios se utilizará la sección nominal.
(2) Relación mínima y máxima admisible entre la carga unitaria de rotura y el límite elástico obtenido en cada ensayo.

Estas barras, además de los otros requisitos restantes correspondientes a las barras corrugadas, deben resistir el ensayo de carga cíclica con tres ciclos de histeresis de gran amplitud tal como se prescribe en PNE 36065 EX (32.28). Véase el Capítulo 67.

b) **MODEL CODE 90.** Considera tres clases de acero, de acuerdo con su ductilidad.

CLASE A: $\frac{f_s}{f_v} \ge 1{,}08$ y $\varepsilon_{uk} \ge 5\%$ [32.16]

CLASE B: $\frac{f_s}{f_v} \ge 1{,}05$ y $\varepsilon_{uk} \ge 2{,}5\%$ [32.17]

CLASE S: $\frac{f_s}{f_v} \ge 1{,}15$ y $\varepsilon_{uk} \ge 6\%$ [32.18]

En zonas de alto riesgo sísmico, puede exigirse además una limitación al límite elástico real

$$\frac{f_{y,real}}{f_{yk}} \le 1{,}3 \qquad [32.19]$$

(ε_{uk} es el valor característico del alargamiento repartido bajo carga).

c) **EUROCÓDIGO EC-2**

El EUROCÓDIGO EC-2 presenta la clasificación siguiente:

Aceros de alta ductilidad

$$\left(\frac{f_s}{f_y}\right)_k > 1{,}08 \quad \text{y} \quad \varepsilon_{uk} > 5\% \qquad [32.20]$$

Aceros de ductilidad normal

$$\left(\frac{f_s}{f_y}\right)_k > 1{,}05 \quad \text{y} \quad \varepsilon_{uk} > 2{,}5\% \qquad [32.21]$$

La clasificación de los aceros según su ductilidad tiene relación con los métodos de cálculo no lineal, tal como se indica en el Capítulo 17 y en el Anejo nº 1 y por supuesto con el cálculo en zonas sísmicas tal como se expone en el Capítulo 67 [1].

32.5.3 ARMADURAS ACTIVAS

32.5.3.1 Generalidades

Se entiende por armaduras activas aquellas mediante cuyo tesado se introducen tensiones previas en el hormigón.

Las armaduras activas de uso habitual son las siguientes:

32.5.3.2 Alambre

Es un producto de sección maciza, liso o grafilado, procedente de un estirado en frío o trefilado de alambrón posteriormente sometido a un tratamiento de estabilización. Normalmente se presenta en rollos.

Aparte de las especificaciones de la Instrucción EHE, la calidad, métodos de ensayo y condiciones de aceptación y rechazo figuran en la NORMA UNE 36094:97 "ALAMBRES Y CORDONES DE ACERO PARA ARMADURAS DE HORMIGÓN PRETENSADO" (32.30).

Los diámetros normalizados en mm corresponden a la serie siguiente: (Como armaduras pretesas, rara vez se usan diámetros superiores a 5 mm)

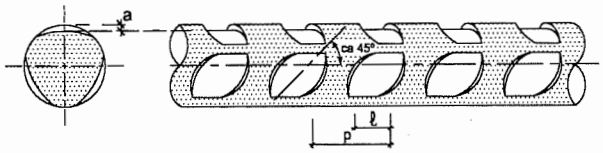
3; 4; 5; 6; 7; 7,5; 8; 9 y 10

En general, los alambres se fabrican con dos tipos de superficies: alambres lisos y alambres grafilados. Estos últimos se indican en la figura 32-10 en su modalidad más frecuente. La tabla T-32.11, contiene los datos geométricos de las grafilas.

1 Un estudio sobre la capacidad de redistribución con los diferentes tipos de acero puede verse en la Tesis Doctoral de H. ORTEGA (32.29).

TABLA T-32.11

Diámetro nominal del alambre mm	Dimensiones nominales de las grafilas			
	Profundidad (a) centésimas de mm		Longitud (ℓ)	Separación (p)
	Tipo 1	Tipo 2	mm	mm
3	2 a 6		3,5 ±0,5	5,5 ± 0,5
4	3 a 7	5 a 9		
5	4 a 8	6 a 10		
6	5 a 10	8 a 13	5,0 ± 0,5	8,0 ± 0,5
≥ 7	6 a 12	10 a 20		



El alambre liso, en diámetros muy finos, tiene suficiente adherencia para su uso en hormigón pretensado. Por supuesto, los alambres trefilados no pueden emplearse en hormigón armado, pues su adherencia es casi nula. La razón de la diferencia de comportamiento reside en el hecho de que, en hormigón armado, la armadura se alarga y, por efecto *Poisson* reduce su diámetro, perjudicando la adherencia. En hormigón pretensado, la armadura reduce su tensión a partir del tesado inicial, a causa de las pérdidas, y esto motiva ya un aumento de diámetro que coloca a la armadura en excelentes condiciones de adherencia. Sin embargo, la razón más poderosa es el llamado efecto HOYER, que se indica en la figura 32-11. El trozo de alambre exterior a la pieza tiene tensión nula y diámetro d_o. Una vez transferida la tensión el diámetro es $d_1 < d_o$, lo cual crea grandes compresiones del hormigón sobre la zona extrema del alambre, beneficiando de manera muy importante la adherencia.

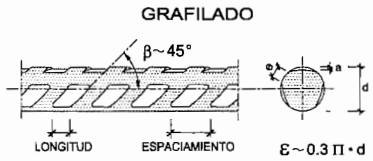


Figura 32-10

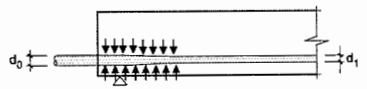


Figura 32-11

Las dimensiones y características mecánicas de los alambres se resumen en la Tabla T-32.11 según UNE 36094:1997.

TABLA T–32.12
DIMENSIONES Y PROPIEDADES DE LOS ALAMBRES

Designación del acero	Valores nominales			Valores especificados					
	Diámetro mm	Resistencia a la tracción MPa	Masa 1) g/m	Sección transversal recta mm²	Tolerancia de la sección transversal recta mm²	Valor característico mínimo de la carga de la rotura kN	Caraga máxima de rotura kN	Valor característico del límite elástico al 0,1 2) kN	Valor característico del límite elástico al 0,2- 3) kN	Diámetro del mandril para el ensayo de doblado alternativo mm
Y 1770 C	3,0	1770	55,5	7,07	±0,14	12,5	14,6	10,4	10,6	15
Y 1770 C	4,0	1770	98,6	12,6	±0,25	22,3	26,1	18,5	19,0	20
Y 1860 C	4,0	1860	98,6	12,6	±0,25	23,4	27,4	19,4	19,9	20
Y 1770 C	5,0	1770	154	19,6	±0,39	34,7	40,6	28,8	29,5	30
Y 1860 C	5,0	1860	154	19,6	±0,39	36,5	42,7	30,3	31,0	30
Y 1870 C	6,0	1770	222	28,3	±0,47	50,1	58,6	41,6	42,6	37
Y 1670 C	7,0	1670	302	38,5	±0,58	64,3	75,2	53,4	54,7	34
Y 1670 C	7,5	1670	347	44,2	±0,66	73,8	86,3	61,3	62,7	50
Y 1670 C	8,0	1670	395	50,3	±0,75	84,0	98,3	69,7	71,4	55
Y 1570 C	9,4	1570	545	69,4	±1,00	109	127	90,5	92,7	70
Y 1570 C	10,0	1570	616	78,5	±1,10	123	144	102	105	75

1) La masa se calcula a partir de la sección transversal recta especificada y dando un valor a la masa específica del acero de 7,85 kg/dm³.
2) El valor característico del límite elástico al 0,1% se calcula como el 83% de la carga característica de rotura.
3) El valor característico del límite elástico al 0,2% se calcula como el 85% de la carga característica de rotura.

El valor del límite elástico al 0,2% de un alambre estará comprendido entre el 85% y el 95% de la carga característica de rotura.

- La estricción a la rotura será igual o superior al 25% en alambres lisos y visible a simple vista en los grafilados.
- El módulo de elasticidad tendrá el valor garantizado por el Fabricante con una tolerancia de ±7%.

El grado de relajación *R* es la pérdida de tensión a 1000 horas y con tensión inicial igual al 70% de la carga de rotura garantizada y a 20°C, expresada en tanto por ciento y en la Tabla T-32.13 se recoge, junto con otros requisitos adicionales para los alambres. La Instrucción EHE indica una relajación al 70% *de la carga máxima garantizada* (sección nominal), del 2%, en lugar del 2,5% indicado en la tabla que se refiere a la sección real y la medida de alargamiento $A_{g\ ;}$ bajo carga máxima la establece sobre 200 mm en lugar de sobre 100 mm que especifica UNE 36094:1997

TABLA-32.13
REQUISITOS ADICIONALES PARA LOS ALAMBRES

Propiedad	Especificación
Módulo elástico	205 kN/mm² ± 7%
Mínimo alargamiento bajo carga máxima (A_{gt}) $L_0 \geq 100\ mm$	3,5
Estricción a la rotura:	
Alambres lisos	≥ 25%
Alambres grafilados	Visible a simple vista
Número mínimo de doblados alternativos (1):	
Alambres lisos	4
Alambres grafilados	3
Relajación máxima a 1000 h (1):	
Al 60%	1,5%
Al 70%	2,5%
Al 80%	4,5%
Fatiga:	
Alambres lisos	200 N/mm²
Alambres grafilados	180 N/mm²
Corrosión bajo tensión:	
Valor mínimo individual	1,5 h
Valor mínimo de la media de los ensayos	4 h

1) Para alambres destinados a la armadura transversal de tuberías y aquellos que deban cumplir exigencias especiales de durabilidad, el alargamiento bajo carga máxima será del 5% y el número mínimo de ciclos de doblado alternativo que debe soportar el alambre será de 7.

2) El valor de la relajación es el obtenido empleando una carga inicial igual al 60%, 70% u 80% de la carga de rotura real, medida en probeta contigua. En aquellos casos en los que las exigencias de enderezado sean muy severas, como la fabricación de traviesas de ferrocarril (diámetros 7 - 7,5 - 9,4 y 10 mm), se podrá acordar con el cliente el suministro de alambres de relajación normal, en cuyo caso se aplicarán los siguientes límites de relajación a 1000 h:

Al 60%	4,5%
Al 70%	8,0%
Al 80%	12%

El límite elástico característico estará comprendido entre el 0,88 y el 0,95 de la carga de rotura. Esto ha de cumplirse tanto en los valores garantizados como en los obtenidos en cada ensayo.

32.5.3.3 Torzal [1]

Es el producto formado por dos o tres alambres enrollados helicoidalmente. El paso de hélice estará comprendido entre 15 y 25 veces el diámetro nominal del torzal, para torzales de dos alambres y entre 14 y 22 veces dicho diámetro para torzales de tres alambres.

Aparte de las especificaciones de EHE, la calidad, métodos de ensayo y condiciones de aceptación y rechazo figuran en la Norma UNE 36094:97 (32.30). Los diámetros se definen de acuerdo con la figura 32-12.

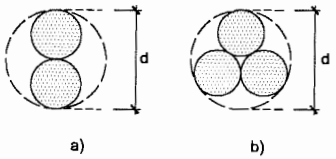


Figura 32-12

Para el resto de las características rige lo que a continuación se indica para cordones.

32.5.3.4 Cordón

Es el producto formado por un cierto número de alambres del mismo diámetro arrollado helicoidalmente alrededor de un alambre central.

Aparte de las especificaciones de EHE, la calidad, métodos de ensayo y condiciones de aceptación y rechazo figuran en la Norma UNE 36094:97 "ALAMBRES Y CORDONES DE ACERO PARA ARMADURAS DE HORMIGÓN PRETENSADO". Esta norma considera exclusivamente los cordones de 7 alambres.

Las dimensiones y propiedades fundamentales se resumen en la Tabla T-32.14.

1 EHE unifica los torzales y los cordones bajo el nombre genérico de cordones.

TABLA T-32.14
DIMENSIONES Y PROPIEDADES DE LOS TORZALES Y CORDONES

Clase	Designación del acero	Valores nominales			Valores especificados					
		Diámetro	Resistencia a la tracción	Masa [1]	Sección transversal recta	Tolerancia de la sección transversal recta [2]	Valor característico mínimo de la carga de rotura	Carga máxima de rotura	Valor característico del límite elástico al 0,1) [3]	Valor característico del límite elástico al 0,2 [4]
		mm	MPa	g/m	mm²	mm²	kN	kN	kN	kN
A	Y1770 S2 [5]	5,6	1770	96,7	12,3	±0,25	21,8	25,5	18,5	19,2
	Y1770 S2 [5]	6,0	1770	111	14,1	±0,28	25,0	29,3	21,3	22,0
	Y1960 S3 [5]	5,2	1960	107	13,6	±0,27	26,7	31,2	22,7	23,5
	Y1860 S3 [5]	6,5	1860	166	21,1	±0,43	39,2	45,9	33,3	34,3
	Y1860 S3 [5]	6,8	1860	184	23,4	±0,47	43,5	50,9	37,0	38,3
	Y1860 S7	7,5	1860	227	29,0	±0,58	54,0	63,2	45,9	47,5
	Y1860 S7	9,3	1860	408	52	±1,04	96,7	113	82,2	85,1
	Y1860 S7	13,0	1860	785	100	±2,00	186	218	158	164
	Y1770 S7	16,0	1770	1176	150	±3,00	265	310	225	233
B	Y2060 S3 [5]	5,2	2060	107	13,6	±0,27	28,0	32,8	23,8	24,6
	Y1860 S7	15,2	1860	1101	140	±2,80	260	304	2215	2297
	Y1860 S7	16,0	1860	1176	150	±3,00	279	326	237	246

1) La masa se calcula a partir de la sección transversal recta especificada y dando un valor a la masa específica del acero de 7,85 kg/dm³.
2) La tolerancia del área de la sección transversal está basada en un ±2% del área de la sección transversal.
3) El valor característico del límite elástico al 0,1% se calcula como el 85% de la carga característica de rotura.
4) El valor característico del límite elástico al 0,2% se calcula como el 88% de la carga característica de rotura
5) Los cordones de 2 y 3 alambres se emplean normalmente para pretensado por adherencia.

El diámetro de los cordones se define y mide de acuerdo con lo indicado en la Figura 32-13.

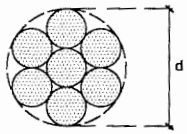


Figura 32-13

La Tabla T-32.14 recoge, de acuerdo con UNE 36094:1997 los requisitos adicionales para torzales y cordones.

TABLA T-32.15
REQUISITOS ADICIONALES PARA LOS CORDONES

Propiedad	Especificación
Módulo elástico	195 kN/mm² ± 7%
Mínimo alargamiento bajo carga máxima (A_{gt}) $L_0 \geq 500$ *mm*	3,5
Estricción a la rotura	Visible a simple vista
Relajación máxima a 1000 h (1): Al 60% Al 70% Al 80%	 1,5% 2,5% 4,5%
Fatiga: Cordones lisos Cordones grafilados	 190 N/mm² 170 N/mm²
Tracción desviada aplicable a cordones de 7 alambres de diámetro nominal de cordón ≥ 13 mm	$D_{max} = 28\%$
Corrosión bajo tensión: Valor mínimo individual Valor mínimo de la media de los ensayos	 1,5 h 4 h

(1) El valor de la relajación es el obtenido empleando una carga inicial igual al 60%, 70% u 80% de la carga de rotura real medida en probeta contigua.

EHE indica la relajación al 70% de la carga de rotura garantizada (sección nominal) en el 2% en lugar de hacerlo en el 2,5% establecido por UNE, pero referido a la sección real.

El límite elástico estará comprendido entre el 0,88 y el 0,95 de la carga máxima. Esto ha de emplearse tanto para los valores garantizados como para los obtenidos con cada ensayo.

32.5.3.5 Barras

Las barras para hormigón pretensado se especifican en la Instrucción EHE. (No hay Norma UNE sobre el tema). Las especificaciones son las siguientes:

a) La carga unitaria máxima, $f_{máx}$, no será inferior a 980 N/mm².

b) El límite elástico f_y, estará comprendido entre el 75 y el 90 por 100 de $f_{máx}$. Esta relación se debe cumplir en los valores garantizados y en los reales obtenidos en el ensayo de cada barra.

c) El alargamiento bajo carga máxima, medido sobre base de longitud no inferior a 200 mm no será inferior a 3,5%.

d) El módulo de elasticidad tendrá el valor garantizado por el fabricante con una tolerancia del ±7%.

e) Las barras soportarán sin rotura ni agrietamiento el ensayo de doblado especificado en UNE 7472:89.

f) La relación a 1000 horas a temperatura de 20° ±1°C y para una tensión inicial igual al 70% del valor de $f_{máx}$ garantizado, no será superior al 3 por ciento. El ensayo debe realizarse según UNE 36422:85 (32.31).

32.5.3.6 Tratamientos

Los alambres experimentan un proceso de envejecimiento natural. Este fenómeno se acelera mediante un tratamiento térmico aplicado después del trefilado y que tiene por objeto elevar la relación límite elástico/carga de rotura, aumentar el alargamiento de rotura y provocar una cierta eliminación de tensiones internas.

Se entienden por armaduras estabilizadas aquellas que han sufrido un tratamiento termomecánico que, además de las ventajas enumeradas en el párrafo anterior, producen una importante reducción de la relajación.

32.5.3.7 Diagrama tensión-deformación

Para el cálculo de las piezas de hormigón pretensado es de gran importancia el conocimiento del diagrama tensión-deformación de la armadura y el fabricante debe garantizarlo para cada tipo de producto.

La figura 32-14 recoge diagramas usuales.

Debe considerarse que el conocimiento del diagrama de la armadura, en el caso del hormigón pretensado, tiene la misma importancia que en el caso del hormigón armado para realizar un cálculo correcto, pero, además, en el pretensado es fundamental su conocimiento para el cálculo y control del recorrido de tesado. En este sentido, debe tenerse especial cuidado si se manejan armaduras, tales como algunos tipos de cordones, que presenten un diagrama noval (a primer ciclo de carga) distinto del posterior repetitivo. En este caso, debe manejarse el noval para el cálculo del recorrido de tesado y el repetitivo para el cálculo de las piezas.

De acuerdo con EHE, el fabricante debe garantizar el módulo de elasticidad con una tolerancia de ±7%. Sería de desear que la garantía se orientase en el sentido

de dar los valores característicos superior e inferior del módulo de elasticidad, como asociados a niveles de confianza 5% y 95%, respectivamente. Véase la referencia (36.27).

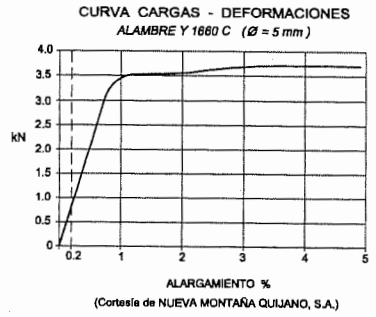


Figura 32-14 a)

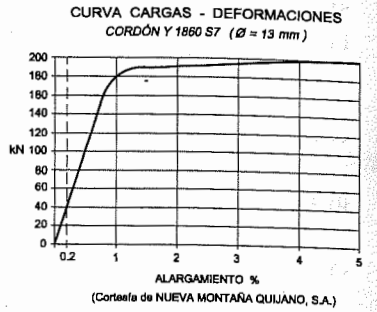


Figura 32-14 b)

En general, y desde el punto de vista de su uso en piezas de hormigón, el único alargamiento interesante es el repartido bajo carga máxima. Actualmente, no existe una opinión definitva sobre el tema, pero puede decirse que, para estructuras isostáticas, un 2% parece suficiente y, para estructuras hiperestáticas, este valor debería elevarse al 3 ó 3,5% con el fin de permitir la readaptación plástica de la estructura.

Por supuesto, el alargamiento bajo carga máxima es de medición complicada y, para el control habitual, puede manejarse el concentrado sobre 5 ó 10 diámetros, pero siempre que los requisitos fijados a estos últimos sean concordantes con las exigencias básicas fijadas al alargamiento repartido bajo carga máxima.

EHE fija también las siguientes relaciones de límite elástico a carga de rotura:

Alambres	de 0,85 a 0,95
Torzales y cordones	de 0,88 a 0,95
Barras	de 0,75 a 0,90
Cordones	de 0,85 a 0,95

32.5.3.8 Longitudes de definición del pretensado

Para el uso de armaduras de hormigón pretensado, especialmente cuando van a ser ancladas por adherencia, es necesario el conocimiento de tres longitudes, que son la base de la definición del pretensado en la pieza.

Se definen tres longitudes básicas:

a) Longitud de transferencia[1]**.** Es la longitud en la cual un tendón adherente transmite la fuerza de pretensado a la pieza de hormigón. Más allá de esta longitud, la fuerza de pretensado es constante, para cada tiempo t, a lo largo del tendón, hasta la zona de transmisión del extremo opuesto del tendón, en que se produce el fenómeno en sentido inverso.

b) Longitud de anclaje. Es la longitud necesaria para anclar, mediante la adherencia del tendón al hormigón, una fuerza igual a la diferencia entre la de rotura del tendón, y la correspondiente al estado de deformación del tendón en el instante t considerado.

c) Longitud de introducción. Es la necesaria para que la ley de deformaciones debidas al pretensado sea plana.

Obsérvese que las longitudes de transmisión y de anclaje, dependen sólo de características del tendón, del hormigón al que se adhiere y de la altura de su posición en la sección. La longitud de introducción es también función de la forma de la sección transversal de la pieza pretensada.

En lo que sigue se expone el Método del MODEL CODE 90 que coincide con EHE, y presenta algo más de detalle, y con el EUROCÓDIGO EC-2.

32.5.3.8.1 Longitud de transferencia

a) Método del MODEL CODE CEB-FIP

A continuación se desarrolla la fórmula correspondiente, con base en la longitud básica de anclaje, ℓ_{bp} , que es la necesaria para anclar el tendón con tensión inicial nula.

Se define por la expresión:

$$\ell_{bp} = \frac{A_{sp}}{p} \cdot \frac{1{,}5\, f_{ptd}}{\eta_{p1}\, \eta_{p2} \cdot f_{ctk}(t)} \qquad [32.22]$$

donde:

A_{sp} = Área de la sección transversal del tendón

p = Perímetro adherente del tendón

f_{ptd} = Valor de cálculo de la resistencia garantizada a tracción del tendón

η_{p1} = Factor dependiente del tipo de tendón

η_{p1} = 1,4 para alambres grafilados

η_{p1} = 1,2 para torzales y cordones

η_{p2} = Factor dependiente de la posición del tendón en la pieza

η_{p2} = 1,00 para tendones a menos de 250 mm del fondo de la pieza o a más de 300 mm por debajo de la cara superior del hormigonado

η_{p2} = 0,7 para las demás posiciones.

$f_{ctk}\,(t)$ = Resistencia característica (cuantil 95%) a tracción del hormigón, en el instante t para el que se calcula la longitud de transmisión

1 Llamada también "Longitud de transmisión"..

$\frac{A_{sp}}{p}$ vale 0,25 ϕ para alambres y barras

0,25 ϕ_i para torzales de dos alambres

0,3ϕ_i para torzales de tres alambres (ϕ_i es el diámetro del alambre que forma el torzal)

0,19 ϕ para cordones de 7 alambres. (ϕ es el diámetro del cordón).

La longitud de transferencia, se define por la fórmula:

$$\ell_{bpt} = \alpha_1 \, \alpha_2 \, \alpha_3 \, \ell_{bp} \, \frac{\sigma_{pi}}{f_{ptd}} \qquad [32.23]$$

donde:

α_1 = Factor dependiente de la forma de realizar la transferencia

α_1 = 1,00 para transferencia lenta

α_1 = 1,25 para transferencia brusca. (P.ej. corte de la armadura)

α_2 = Factor dependiente del tipo de cálculo para el que se emplea ℓ_{bpt}.

α_2 = 1,00 para el cálculo a esfuerzo cortante

α_2 = 0,5 para el cálculo de la armadura transversal en la zona de anclaje

α_3 = Factor dependiente del tipo de tendón

α_3 = 0,5 para torzales y cordones

α_3 = 0,7 para alambres grafilados

σ_{pi} = es la tensión del tendón inmediatamente después de la transferencia

f_{ptd} = es el valor de cálculo de la tensión garantizada de rotura del tendón

b) Método del EUROCÓDIGO EC-2

El EUROCÓDIGO EC-2 define la longitud de transferencia por la fórmula

$$\ell_{bpt} = \beta_b \cdot \phi \qquad [32.24]$$

donde β_b viene dado por la tabla T-32.16.

TABLA T-32.16

FACTOR β_b QUE DEBE TOMARSE PARA LA LONGITUD DE TRANSMISIÓN EN CORDONES Y ALAMBRES PRETENSADOS (LISOS O GRAFILADOS) EN FUNCIÓN DE LA RESISTENCIA DEL HORMIGÓN EN EL MOMENTO DE LA TRANSFERENCIA

Resistencia del hormigón en la transferencia (MPa)		25	30	35	40	45	50
β_b	Cordones y alambres lisos o grafilados	75	70	65	60	55	50
	Alambres corrugados	55	50	45	40	35	30

Como valor de cálculo ℓ_{bpd}, se tomará 0,8 ℓ_{bpt} ó 1,2 ℓ_{bpt}, escogiéndose el menos favorable según el efecto que se vaya a considerar.

Este tratamiento es mucho más simplificado que el del MODEL CODE, pero más pobre en información.

c) Investigación experimental

El tema ha sido estudiado experimentalmente por diversos investigadores (32.32), (32.33).

A continuación, se exponen los resultados obtenidos por HOLMBERG y LINDGREN (32.32). En la figura 32-15, se indica una pieza pretensada con su armadura. Al transferir la tensión, se registra una cierta penetración de la armadura en el hormigón debida al deslizamiento producido en ese extremo libre. En este punto, la deformación ε_c transmitida al hormigón es nula. La figura 32-15 indica la relación $\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cmáx}}$ en función de la distancia ℓ. Dicha relación es una curva que puede sustituirse con buena aproximación por una recta. La transferencia se inicia a partir de una longitud ℓ_0 y puede considerarse realizada, a efectos prácticos, en una longitud ℓ. La Tabla T-32.17 indica los valores correspondientes.

Los valores de la Tabla T-32.17 deben, de todas formas, considerarse como orientativos.

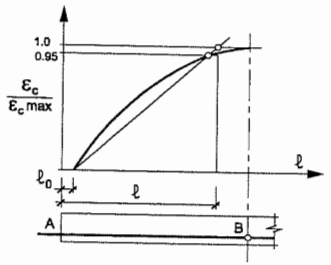


Figura 32-15

TABLA T-32.17

TIPO DE ARMADURA		TRANSFERENCIA DE TENSIÓN			
		LENTA		INSTANTÁNEA	
		ℓ_0 / ϕ	ℓ / ϕ	ℓ_0 / ϕ	ℓ / ϕ
Alambre redondo	Liso[1]	20	200		
	Rugoso	20	170		
Alambre ondulado o grafilado	Liso	10	140	30	175
	Rugoso	10	100	30	125
Cordón con 7 alambres	Liso	5	60	10	75
	Rugoso	0	35	5	45

Los valores indicados corresponden a armaduras horizontales situadas cerca del fondo de la pieza con hormigones de resistencia superior a 20 MPa. Para armaduras en la parte superior de la pieza, conviene considerar longitudes 1,5 veces las de la tabla.

Los valores son válidos para una tensión de pretensado después de la transferencia de 1200 N/mm². Para otras tensiones de pretensado σ_p, deben multiplicarse por $\left(\frac{\sigma_p}{1200}\right)^{0,75}$

32.5.3.8.2 Longitud de anclaje

a) Método del MODEL CODE CEB-FIP 1990

Viene definida por la expresión

$$\ell_{bpa} = \ell_{bpt} + \ell_{bp} \frac{\sigma_{pd} - \sigma_{p\infty}}{f_{pd}} \qquad [32.25]$$

1 Por liso se entiende el estado de la armadura en la situación de recién fabricada. Rugoso es el estado producido por una ligera oxidación.

donde:

ℓ_{bp} = viene dada por [32.22]

ℓ_{bpt} = viene dada por [32.21]

σ_{pd} = es la tensión del tendón bajo las acciones de cálculo

$\sigma_{p\infty}$ = es la tensión de pretensado permanente de la armadura

b) Investigación experimental

En el apartado 3.1.7, analizamos el concepto de longitud de transferencia. A una distancia ℓ_{bpt} del extremo de la pieza, el pretensado está establecido y las tensiones de la armadura son ya constantes. Esta es una situación de servicio de la pieza. Si ésta se carga hasta rotura, la tensión del acero a una distancia ℓ_a llega a un valor σ_{pu} igual o muy cercano a la tensión de rotura de la armadura. La longitud de anclaje debe, en sentido estricto definirse para cada tensión última de la armadura. Como se indica en la figura 32-16 la sobretensión del acero por las acciones exteriores modifica ligeramente las tensiones en la zona de transmisión.

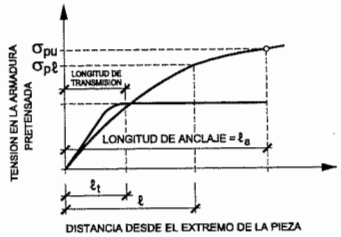


Figura 32-16

Muchos investigadores han dado fórmulas para la comprobación de las condiciones de anclaje. La que exponemos a continuación está basada en los ensayos de HOLMBERG y LINDGREM (32.32).

$$\sigma_{px} = \sigma_{pt} + K\frac{x}{\phi} > f_{pt} \qquad [32.26]$$

[1]

donde:

x = distancia desde el extremo de la pieza a la sección considerada en centímetros.

σ_{px} = tensión de la armadura en el agotamiento, en la sección situada a distancia x (N/mm²).

σ_{pt} = tensión permanente de pretensado (N/mm²).

1 Si se supone que la rotura σ_p alcanza aproximadamente el valor de la tensión de rotura de la armadura [32.26], permite despejar x como longitud ℓ_a de anclaje *total* y debe ser en ese caso inferior a la distancia del extremo a la sección de momento máximo.

ϕ = diámetro de la armadura en mm.

K = coeficiente que figura en la Tabla T-32.18.

La fórmula [32.26] es válida para armaduras situadas en la parte inferior de la sección. Para armaduras situadas en la zona superior, debe tomarse como valor de K, 0,7 veces el indicado en la tabla.

TABLA T-32.18 [1]

TIPO DE ARMADURA		K(N/mm²)
Alambre redondo	Liso	-
	Rugoso	1
Alambre ondulado o grafilado	Liso	2,5
	Rugoso	2,5
Cordón con 7 alambres	Liso	2,5
	Rugoso	5

La fórmula [32.26] establece en definitiva una limitación a la tensión final de la armadura, según su distancia x al extremo de la pieza, para asegurar su anclaje. Normalmente esta comprobación no es crítica más que en piezas de longitud reducida.

32.5.3.8.3 Longitud de introducción (Longitud de desarrollo según EHE)

Para armaduras adherentes, puede estimarse

$$\ell_{ip} = \sqrt{h^2 + 0{,}36\ell^2_{bpt}} \qquad [32.27]$$

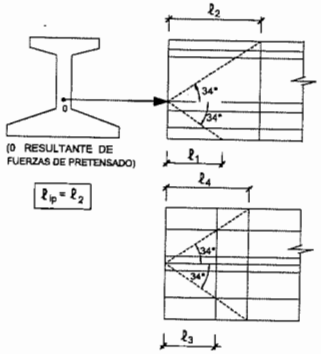


Figura 32-17

1 Por liso se entiende el estado de la armadura en la situación de recién fabricada. Rugoso es el estado producido por una ligera oxidación.

Para armaduras postesas puede estimarse mediante la construcción de la figura 32-17.

32.5.3.8.4 Empleo de las longitudes de definición del pretensado

Simplificadamente, el empleo de las longitudes anteriores se indica en la figura 32-18.

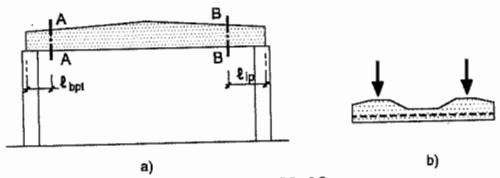


Figura 32-18

En el caso de la figura 32-18 a), que representa una viga pretensada de cubierta de una nave industrial, no se puede contar, a efectos de esfuerzo cortante, con la totalidad de la fuerza de pretensado hasta una sección situada a una distancia igual a la longitud de transmisión ℓ_{bpt} a partir de la cara extrema de la viga.

En la misma figura, para el cálculo del ángulo θ de fisuración (ver el Capítulo 39), el método no es aplicable hasta una distancia de la cara externa igual a la longitud de introducción, ℓ_{ip}.

En el caso de la traviesa de ferrocarril indicada en la figura 32-18 b), la condición crítica es la longitud de anclaje, dado que se trata de una pieza de muy corta longitud.

32.5.3.9 Relajación

Se entiende por relajación la disminución de la tensión que sufre un material a lo largo del tiempo, bajo el efecto de una deformación impuesta constante.

Fluencia es el aumento de deformación que sufre un material a lo largo del tiempo bajo el efecto de una tensión constante.

En el caso de las armaduras de hormigón pretensado, su situación no es ni la de un caso de fluencia ni de relajación, ya que la tensión de la armadura decrece por efecto de la relajación, pero, al mismo tiempo, sus anclajes extremos se aproximan debido a las deformaciones del hormigón bajo la acción del propio pretensado, como vimos en el Capítulo 29.

La relajación de una armadura se expresa por el "grado de relajación", que es la máxima pérdida de tensión que experimenta en 1000 horas, tesada al 70% de la carga de rotura y a 20°C. De acuerdo con EHE, se considera un único grado de relajación del 2%, para alambres, torzales, cordones, y al 3% para barras.

El fabricante de un acero debe, de acuerdo con la obligación establecida en EHE, suministrar los valores de relajación a 120 h y a 1000 h para tensiones iniciales de 0,6; 0,7 y 0,8 de la carga de rotura y a temperatura de 20±1°C y debe garantizar el valor de 1000 h para tensión inicial de 0,7 de la carga de rotura, valor que, como hemos visto, define el grado de relajación de la armadura.

Para el cálculo de las piezas de hormigón pretensado, interesa en muchos casos conocer la pérdida por relajación en distintos momentos. La Instrucción EHE,

siguiente al MODEL CODE CEB-FIP 1990, ha adoptado la fórmula:

$$\log \frac{\Delta\sigma_{pr}}{\sigma_{pi}} = K_1 + K_2 \log t \qquad [32.28]$$

válida para tensiones σ_{pi} no superiores a 0,8 de la carga, ni inferiores a 0,5 de dicho valor, ya que, para esta última tensión, las armaduras usuales de pretensado no experimentan relajación apreciable.

En la fórmula [32.28]

$\Delta\sigma_{pr}$ = pérdida de tensión por relajación al cabo del tiempo t

σ_{pi} = tensión inicial a la que se anclan las armaduras

t = tiempo en horas

K_1, K_2 = coeficientes que dependen del valor de σ_{pi} y del tipo de acero

Con los valores de relajación para tensiones iniciales de 0,6; 0,7 y 0,8 de la carga de rotura a 120 h y 1000 h suministrados por el fabricante, pueden determinarse los valores K_1 y K_2 correspondientes a cada tensión inicial y dibujarse en escalas logarítmicas la recta correspondiente a la expresión [32.8] para cada tensión inicial, tal como se indica en la figura 32-19.

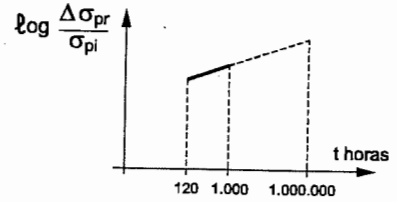


Figura 32-19

De la expresión [32.28] se pueden deducir:

$$10^{(K_1 + K_2 \log t)} = \frac{\Delta\sigma_{pr}}{\sigma_{pi}}$$

y, para dos instantes t_1 y t_2:

$$\frac{10^{(K_1 + K_2 \log t_1)}}{10^{(K_1 + K_2 \log t_2)}} = \frac{\Delta\sigma_{pr,t_1}}{\Delta\sigma_{pr,t_2}}$$

y operando:

$$\frac{\Delta\sigma_{pr,t_1}}{\Delta\sigma_{pr,t_2}} = \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{K_2} \qquad [32.29]$$

La fórmula [32.9] permite, conocida la pérdida para un tiempo dado, calcular la correspondiente a cualquier otro lugar. El valor K_2 suele oscilar de 0,15 a 0,25. La figura 32-20 contiene resultados de armaduras de fabricación española.

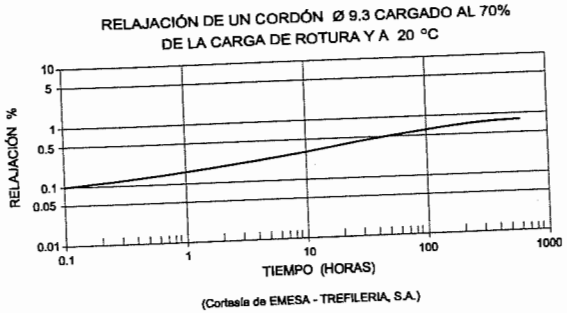


Figura 32-20 a)

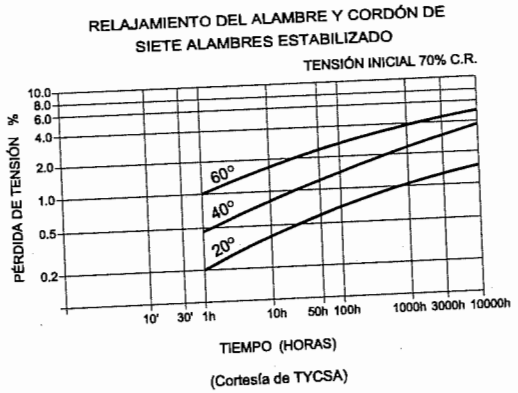
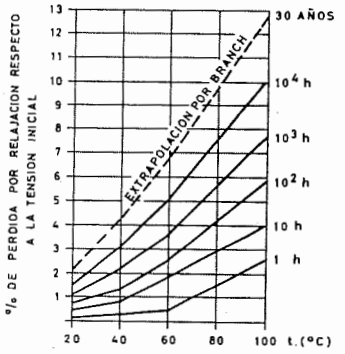


Figura 32-20 b)

Todo lo anterior se refiere a armaduras a 20°C de temperatura. El fenómeno de la relajación es extraordinariamente sensible a los aumentos de temperatura. La figura 32-21 resume ensayos de BRANCH (32.34), para alambres y cordones. Es evidente que, para estructuras que vayan a estar sometidas a temperaturas apreciablemente superiores a la de 20°C, o que vayan a sufrir un curado térmico acelerado, es necesario tener esto en cuenta con base en ensayos directos del tipo de armadura.

En la práctica, es frecuente que, debido a tratamientos térmicos de curado al vapor, la armadura se encuentre durante algunas horas a temperatura de 65 a 80°C. El tema se analizó con detalle en el Capítulo 29.



Pérdidas por relajación en función de la temperatura para alambres y cables astabilizados de diferentes diámetros, tensados al 70-75% de la resistencia real a 20ºC (datos de BRANCH). Referencia (32.33)

Figura 32-21

32.5.3.10 Coeficiente de eficacia

Se define como la relación entre la carga de rotura de un tendón anclado en su correspondiente pieza de anclaje y la carga de rotura de ese tendón en el ensayo normal de tracción. Es, en definitiva, un concepto que permite evaluar la reducción, (generalmente por efecto de entalla en la zona de cuñas), que produce el anclaje en la resistencia del tendón.

EHE fija este valor en 0,92, como mínimo, para las armaduras postesas que van a ser luego adherentes. No menciona explícitamente el caso de armaduras pretesas, pero durante su anclaje en la mesa de fabricación, su situación es idéntica y debe, por tanto, exigirse un coeficiente de eficacia de 0,92, como mínimo.

En caso de fallos por este motivo, es difícil aclarar si la responsabilidad está en el tendón o en la pieza de anclaje, pues existen problemas geométricos en cuanto a la forma del tendón, dureza superficial de éste, sensibilidad a la entalla, etc., pero análogos problemas se presentan en la geometría y calidad de las cuñas. El ensayo lo único que permite es juzgar el conjunto tendón-anclaje y no sus componentes aislados.

Para el caso de tendones no adherentes, EHE eleva el valor mínimo del coeficiente de eficacia a 0,96.

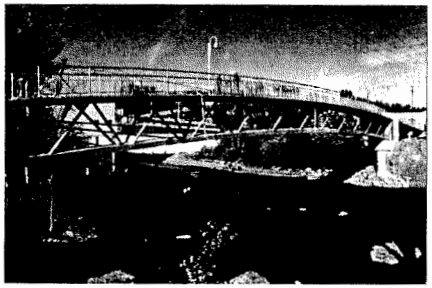
32.5.4 NUEVOS MATERIALES

Está ya comenzando, con intensidad variable, la aplicación de nuevos materiales tanto en el campo de los hormigones como en el de las armaduras activas y pasivas.

32.5.4.1 NUEVOS HORMIGONES

Con el empleo de cementos de resistencias medias y altas y superfluidificantes pueden alcanzarse fácilmente resistencias de 70 MPa. Con la adición de humo de sílice pueden alcanzarse valores hasta 200 MPa. Todos estos hormigones presentan una bajísima relación *A/C* pero una reducida consistencia gracias al empleo de los superfluidificantes.

La empresa francesa BOUYGHES está desarrollando un hormigón de características muy especiales y sometido a tratamientos diferentes de los clásicos, con los que se pueden alcanzar resistencias entre 200 y 800 MPa. El árido está constituido por particulas de tamaño máximo 5 mm y el hormigón se somete a un tratamiento térmico a 90°C.



(Cortesía de BOUYGUES S.A. & "THE VSL GROUP")

Figura 32-22

La fotografía (32-22) indica un puente construido recientemente con este hormigón, con f_{ck} = 200 MPa.

La Instrucción EHE trata el tema de los hormigones de alta resistencia en el Anejo nº 5.

Debe hacerse notar que el nombre de estos hormigones es tema controvertido. Un hormigón autocompactado que es un hormigón de moderada relación *A/C* con fuertes adiciones de superfluidificantes, tiene una fluidez tal que no requiere ninguna compactación. No es un hormigón de alta resistencia, pero es un hormigón de alta calidad. Por este motivo se emplea cada vez más, para recoger a todos estos hormigones, el término de "Hormigones de Altas Prestaciones".

32.5.4.2 ARMADURAS

Muchos tipos de nuevas armaduras están en investigación y algunas de ellas comenzando sus aplicaciones. Pueden destacarse las siguientes:

Armaduras galvanizadas. Es un sistema ya muy antiguo (las célebres láminas de la Ópera de Sidney se armaron con este tipo de barras en los años 60). No requieren especificaciones especiales de uso, pues su adherencia y el resto de las propiedades son idénticas a las barras ordinarias. El Código ACI 318-95 las recoge sin especificar para ellas ningún requisito especial.

Armaduras de acero inoxidable. Son fabricadas con aceros al cromo y constituyen una solución de alta calidad, aunque también de alto precio.

No pueden ponerse en contacto con otros metales por razones de corrosión. Es un material no magnético y con una resistencia al fuego muy superior a la de las barras ordinarias.

Barras recubiertas de epoxy. Se consiguen haciendo pasar las barras por el interior de un spray circular de resina. Es una excelente protección pero requieren mayores longitudes de anclaje (≈ 50% más) que las barras ordinarias debido a su menor adherencia y cuidados especiales si se van a realizar operaciones de doblado después de la aplicación.

Fibras artificiales. Están en estudio y en utilización inicial muchas variantes, tales como:

- Barras de fibra de vidrio.
- Cables "Parafil" para pretensado, a base de polímeros.
- Cables de fibra de vidrio para pretensado.
- Tendones de pretensado a base de "Aramide". (Un producto orgánico con un elevadísimo grado de cristalización). "Aramide" es un nombre genérico que comprende fibras procedentes de poliamidas aromáticas.

Mallas de polimeros. Para empleo en elementos superficiales.

Una ampliación de lo anterior puede seguirse en CLARKE (32.35). Un excelente estudio crítico fue publicado en 1990 por DOLAN (32.36).

32.6 APLICACIÓN DEL MÉTODO DE LOS ESTADOS LÍMITE

La aplicación práctica del Método de los Estados Límite se hace evaluando por un lado la solicitación en la sección considerada de la pieza. S_d calculada a partir de las acciones actuantes sobre la estructura multiplicadas por coeficientes de seguridad o *coeficientes de ponderación de acciones*, γ_f, cuyos diferentes valores se detallan más adelante. Por otro lado, se evalúa la capacidad resistente de esa sección de la estructura, R_d, calculada en función de la geometría de la sección y de las *resistencias de cálculo de los materiales*.

Se define como resistencia de cálculo del hormigón a compresión el valor

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \qquad [32.30]$$

donde f_{ck} es la resistencia característica, tal como ha sido definida en 32.5.1.c) y γ_c, el *coeficiente de minoración* del hormigón, cuyos valores se indican más adelante.

Como diagrama de cálculo del hormigón se adopta el de la figura 32-23, obtenido a partir del característico, mediante una afinidad paralela al eje σ_c, de valor $\frac{0{,}85}{\gamma_c}$.

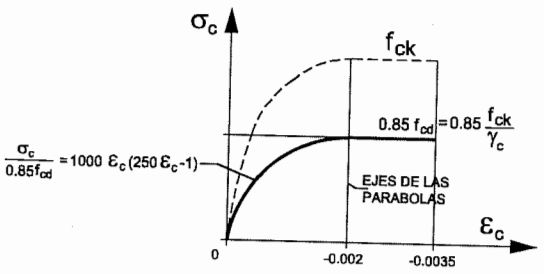


Figura 32-23

Se define como resistencia[1] de cálculo del acero el valor

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} \qquad [32.31]$$

donde f_{yk} es el límite elástico característico, tal como se define en 32.5.2.2 y γ_s, el *coeficiente de minoración* del acero, cuyos valores se indican más adelante[2].

Como diagrama de cálculo del acero se adoptan los indicados en la figura 32-11, obtenidos mediante una afinidad paralela a la recta de HOOKE de valor $\frac{1}{\gamma_s}$ aplicada al diagrama característico de las figuras 32-24 ó 32-25, respectivamente[3].

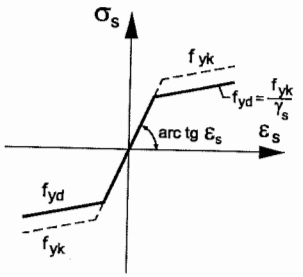


Figura 32-24

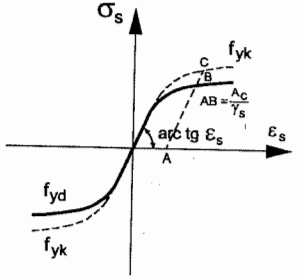


Figura 32-25

1 Estrictamente hablando, se trata del límite elástico de cálculo. El término *resistencia* se introduce por semejanza con el caso del hormigón, aunque puede prestarse a confusión.

2 Si se emplea el nivel de Control Reducido para las armaduras pasivas, debe tomarse $f_{yd} = \frac{0{,}75\, f_{yk}}{\gamma_s}$

3 Es evidente que el tomar la afinidad paralela a la recta de HOOKE, cuando el acero en el agotamiento presenta poca deformación, supone no disponer de coeficiente γ_s. El acuerdo se ha mantenido, por razones varias, desde los primeros trabajos del CEB.

La introducción de la seguridad se realiza *ponderando* las acciones, o sea multiplicándolas por los coeficientes de seguridad γ_f y minorando las resistencias.

La verificación de la seguridad se basa en la comprobación

$$S_d \leq R_d \qquad [32.32]$$

y la condición crítica de agotamiento se presenta cuando

$$S_d = R_d \qquad [32.33]$$

es decir, cuando, al alcanzar, simultáneamente, sus valores de cálculo, tanto las acciones como las resistencias de los materiales, se alcanza un estado límite[1].

a) Los valores de los coeficientes de seguridad γ_c, γ_s, γ_f, tal como se establecen en la Instrucción EHE, se indican a continuación.

Valor de γ_c. Se adopta $\gamma_c = 1{,}5$ en todos los casos, excepto en el de acciones accidentales para las que se adopta $\gamma_c = 1{,}30$.

Valor de γ_s. Se adopta $\gamma_s = 1{,}15$ en todos los casos, excepto en el de acciones accidentales para las que se adopta $\gamma_s = 1{,}0$

En relación con los coeficientes γ deben resaltarse los puntos siguientes:

- En primer lugar, la Instrucción EHE introduce un concepto de esencial importancia, como es el de relacionar los coeficientes de seguridad con los niveles de control.

  La razón es obvia, pues el no hacerlo así, es decir, el adoptar los mismos coeficientes de seguridad en todas las obras, con independencia del nivel de control de calidad que en ellas se realice, conduciría, en la práctica, a tener niveles de seguridad considerablemente diferentes en obras de características similares y de riesgos análogos[2].

  Debe señalarse, sin embargo, que la Instrucción sólo contempla los niveles de control de calidad de los materiales y la ejecución. Existe otro punto de gran importancia en cuanto al nivel de seguridad alcanzable y es el del control del proyecto. Las estadísticas de siniestros demuestran que, en todos los países investigados, la causa más frecuente es la de errores cometidos en la fase de proyecto. El interés sobre el tema ha crecido rápidamente en los últimos años. Las referencias (32.38), (32.39), (32.40), (32.41) y (32.42) contienen información importante, en especial sobre el tema de control de calidad de los aspectos relacionados con el cálculo.

  Como se verá, la Instrucción EHE adopta valores diferentes de γ_f, según los casos. El MODEL CODE CEB-FIP-90 y el EUROCÓDIGO EC-2 adoptan $\gamma_f = 1{,}35$ para cargas permanentes y $\gamma_f = 1{,}50$, en general, para sobrecargas. Estos valores son los mínimos admitidos por EHE y para ello se exige control

1 El tratamiento anterior tiene carácter general. Una excepción notable la constituye el estado límite de anclaje, para el que, como veremos en el Capítulo 37, se dan simplemente unas reglas que garantizan que se alcanza el agotamiento de las armaduras antes del fallo del anclaje.

2 Los valores correspondientes se establecieron por primera vez en la publicación "RESISTENCIA CARACTERÍSTICA Y CONTROL DE CALIDAD" (32.37).

de ejecución intenso, porque tanto el EUROCÓDIGO como el MODEL CODE, parten de que la estructura es siempre calculada y construida por personas muy expertas y construida bajo un control intenso. La diferenciación del valor de γ_f para cargas permanentes y sobrecargas tiene sin embargo una raíz lógica e intuitiva, tema sobre el que volveremos en el apartado 32.10.

Los valores de los coeficientes parciales de seguridad (γ_f) para las acciones se recogen en la tabla T-32.19.

TABLA T-32.19 [1]

VALORES DE γ_f

Tipo de acción	Situación persistente o transitoria		Situación accidental	
	Efecto favorable	Efecto desfavorable	Efecto favorable	Efecto desfavorable
Permanente	$\gamma_G = 1{,}00$	$\gamma_G = 1{,}35$	$\gamma_G = 1{,}00$	$\gamma_G = 1{,}00$
Pretensado	$\gamma_P = 1{,}00$	$\gamma_P = 1{,}00$	$\gamma_P = 1{,}00$	$\gamma_P = 1{,}00$
Permanente de valor no constante	$\gamma_{G^*} = 1{,}00$	$\gamma_{G^*} = 1{,}50$	$\gamma_{G^*} = 1{,}00$	$\gamma_{G^*} = 1{,}00$
Variable	$\gamma_Q = 0{,}00$	$\gamma_Q = 1{,}50$	$\gamma_Q = 0{,}00$	$\gamma_Q = 1{,}00$
Accidental	-	-	$\gamma_A = 1{,}00$	$\gamma_A = 1{,}00$

- Para acciones permanentes, su efecto se determinará aplicando el mismo coeficiente γ_f a todas las acciones del mismo origen.
- Cuando el tipo estructural, o la situación estructural hagan que la estructura sea muy sensible a las variaciones de las acciones permanentes de unas zonas a otras de la estructura, las partes favorables y desfavorables no se regirán por el párrafo anterior sino que se considerarán como acciones independientes. En particular esto se aplica al Estado Límite de Equilibrio, en el que a la parte favorable de la carga permanente se aplicará $\gamma_G = 0{,}9$ y a la desfavorable $\gamma_G = 1{,}1$, en situaciones de servicio y $\gamma_G = 0{,}95$ y $\gamma_G = 1{,}05$, en situaciones de construcción.

36 Los coeficientes de γ_f se escriben en lo que sigue con subíndices *G o Q*, mayúscula, de forma genérica. En el resto de la obra se emplean los subíndices con mayúsculas para cargas puntuales y con minúsculas para cargas uniformemente repartidas. Si no hay lugar a confusión, se suprime el subíndice *f*.

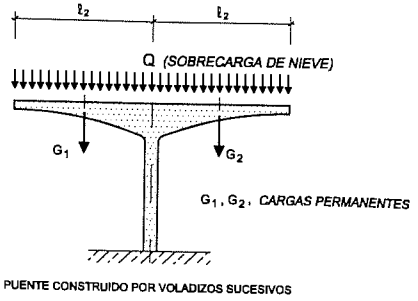


Figura 32-26

Un ejemplo de lo anteriormente dicho, es el de la figura 32-26. Como las cargas permanentes G_1, G_2, de peso propio de los voladizos son preponderantes frente a la sobrecarga total Q de nieve, la pila debería ser comprobada durante la etapa de la construcción para las hipótesis:

a) $0{,}95 \cdot G_1 + 1{,}05\ G_2$

b) $1{,}05 \cdot G_1 + 0{,}95\ G_2$

c) $0{,}95 \cdot G_1 + 1{,}05\ G_2 + \gamma_Q \cdot q$

d) $1{,}05 \cdot G_1 + 0{,}95\ G_2 + \gamma_Q \cdot q$

e) $\gamma_G \cdot G_1 + \gamma_G \cdot G_2 + \gamma_Q \cdot q$

- Los valores de la tabla T-32.20 se modificarán según los niveles de control de ejecución, adoptados en el proyecto, intenso, normal o reducido, tal como se definen en el Art. 95 de la Instrucción EHE, de acuerdo con lo indicado en la tabla T-32.20.

TABLA T-32.20

VALORES DE LOS COEFICIENTES DE MAYORACIÓN DE ACCIONES γ_f EN FUNCIÓN DEL NIVEL DE CONTROL DE EJECUCIÓN

TIPO DE ACCIÓN	NIVEL DE CONTROL DE EJECUCIÓN		
	INTENSO	NORMAL	REDUCIDO
Permanente	$\gamma_G = 1{,}35$	$\gamma_G = 1{,}50$	$\gamma_G = 1{,}60$
Pretensado	$\gamma_P = 1{,}00$	$\gamma_P = 1{,}00$	$\gamma_P = 1{,}00$
Permanente de valor no constante	$\gamma_{G^*} = 1{,}50$	$\gamma_{G^*} = 1{,}60$	$\gamma_{G^*} = 1{,}80$
Variable	$\gamma_Q = 1{,}50$	$\gamma_Q = 1{,}60$	$\gamma_Q = 1{,}80$
Accidental	-	-	-

Para los Estados Límite de Servicio se aplicarán los valores de γ_f indicados en la tabla T-32.21.

TABLA T-32.21

COEFICIENTES PARCIALES DE SEGURIDAD PARA LAS ACCIONES, APLICABLES PARA LA EVALUACIÓN DE LOS ESTADOS LÍMITE DE SERVICIO

TIPO DE ACCIÓN		Efecto favorable	Efecto desfavorable
Permanente		$\gamma_G = 1{,}00$	$\gamma_G = 1{,}00$
Pretensado	Armadura pretesa	$\gamma_P = 0{,}95$	$\gamma_P = 1{,}05$
	Armadura postesa	$\gamma_P = 0{,}90$	$\gamma_P = 1{,}10$
Permanente de valor no constante		$\gamma_{G^*} = 1{,}00$	$\gamma_{G^*} = 1{,}00$
Variable		$\gamma_Q = 0{,}00$	$\gamma_Q = 1{,}00$

32.7 COMBINACIÓN DE ACCIONES

En la combinación de acciones se introducen reducciones en los coeficientes parciales de seguridad de las acciones, γ_f , derivados de las tres consideraciones siguientes:

- La probabilidad de que actúen simultáneamente varias acciones.
- El hecho de que algunos tipos de acciones de carácter accidental o debidas a las aceleraciones sísmicas, no se pretende cubrirlas de forma que la estructura **no sufra daños** sino de que **no sufra daños graves**, en particular un colapso general.
- En los estados límite de servicio, ciertos tipos de acciones son de duración breve, o tales que en la mayor parte de la vida de la estructura alcanzan sólo una fracción reducida de su valor característico.

A estos efectos conviene distinguir entre las:

Acciones permanentes o transitorias, como por ejemplo las de actuación, del peso propio, las cargas muertas, las sobrecargas de uso, etc.

Acciones accidentales, correspondientes a la intervención de las acciones accidentales descritas en 32.4.1.b-4), junto a otras de diferente tipo.

Acciones sísmicas, correspondientes a la actuación de la aceleración sísmica, junto a otras de diferente tipo.

Con independencia de lo anterior, conviene distinguir entre las acciones de carácter:

- **Frecuentes**. Por valor frecuente suele entenderse, bien aquel que no será sobrepasado más del 5% del tiempo durante la vida útil de la estructura, bien el que se podrá alcanzar 10^5 veces durante dicha vida útil.

El valor frecuente es igual a ψ_1 veces el característico.

- **Cuasipermanente**. Por valor cuasipermanente suele entenderse el valor medio de la acción en el transcurso de la vida útil de la estructura.

  El valor cuasipermanente es igual a ψ_2 veces el característico.

TABLA T-32.22 [1]

COEFICIENTES ψ PARA EDIFICACIÓN

Acción	ψ_0	ψ_1	ψ_2
Cargas exteriores en edificios:			
Categoría A: domésticos y residenciales	0,7	0,5	0,3
Categoría B: oficinas	0,7	0,5	0,3
Categoría C: áreas de reunión	0,7	0,7	0,6
Categoría D: comercios	0,7	0,7	0,6
Categoría E: almacenes	1,0	0,9	0,8
Cargas de tráfico en edificios:			
Categoría F: peso de vehículo ≤ 30 kN	0,7	0,7	0,6
Categoría G:30 kN≤ peso de vehículo ≤160 kN	0,7	0,5	0,3
Categoría H: cubiertas	0	0	0
Cargas de nieve en edificios	0,6*	0,2*	0*
Cargas de viento en edificios	0,6*	0,5*	0*
Temperatura (no de fuego) en edificios	0,6*	0,5*	0*
* Se requiere una modificación dependiendo de la situación geográfica			

La tabla T-32.22 contiene valores de ψ_1 y ψ_2 recomendados por el EUROCÓDIGO EC-1 para diversos tipos de edificios. Para puentes de carretera véase la referencia (9.5).

Las combinaciones de acciones a considerar, de acuerdo con EHE, se indican a continuación.

- ESTADOS LÍMITE ÚLTIMOS

a) Situaciones permanentes o transitorias

Se establece la combinación

$$\sum_{j\geq 1} \gamma_{Gj}\, G_{K,j} + \sum_{j\geq 1} \gamma_{G^*}\, G^*_{K,j} + \gamma_p P_K + \gamma_{Q,1} Q_{K,1} + \sum_{i>1} \gamma_{Q,i} \cdot \psi_{o,i} \cdot Q_{K,i} \qquad [32.34]$$

1 La Instrucción EHE incluye como Anejo el Documento Nacional de Aplicación en España del Eurocódigo EC-2 y en particular un Anexo de Acciones cuyos coeficientes ψ coinciden básicamente con los indicados en la tabla.

Si en la combinación [32.34] no es evidente qué acción $Q_{K,1}$ será la determinante, se considerarán las diferentes posibilidades.

G_{Kj} Valor característico de las acciones permanentes

$G^*_{K,j}$ Valor característico de las acciones permanentes de valor no constante

P_K Valor característico de la acción del pretensado

$Q_{K,1}$ Valor característico de la acción variable determinante en la combinación

$\psi_{o,i}Q_{K,i}$ Valor representativo de combinación de las acciones variables concomitantes con la determinante. (Ver la Tabla T-32.22).

b) Situaciones accidentales

Se establece la combinación

$$\sum_{j\geq 1} \gamma_{Gi}\, G_{K,j} + \sum_{j\geq 1} \gamma_{G^*}\, G^*_{K,j} + \gamma_p P_K + \gamma_A A_K + \gamma_{Q,1}\psi_{1,1} Q_{K,1} + \sum_{i>1} \gamma_{Q,i}\psi_{2,i} Q_{K,i} \qquad [32.35]$$

donde a las notaciones expuestas en a) deben añadirse

A_k Valor característico de la acción accidental

$\psi_{1,1}Q_{K,1}$ Valor frecuente representativo de la acción determinante

$\psi_{2,i}Q_{K,i}$ Valores cuasipermanentes representativos de las acciones variables concomitantes con la acción variable determinante o con la acción accidental o con la acción sísmica.

c) Situaciones sísmicas

Se establece la combinación

$$\sum_{j\geq 1} \gamma_{G,j}\, G_{K,j} + \sum_{j\geq 1} \gamma_{G^*}\, G^*_{K,j} + \gamma_p P_K + \gamma_A A_{E,K} + \sum_{i>1} \gamma_{Q,i}\psi_{2,i} Q_{K,i} \qquad [32.36]$$

donde a las notaciones de a) y b) debe añadirse

$A_{E,K}$ Valor característico de la acción sísmica

d) Simplificaciones para estructuras de edificación[1]

d-1) Situaciones persistentes o transitorias

Situaciones con una sola acción variable $Q_{K,1}$. Se establece la combinación

1 Empleamos la terminología de EHE, que puede resultar ambigua. Debe sobreentenderse que se refiere a estructuras usuales de edificios de entramados para viviendas y oficinas, y casos similares. Una Fábrica de Papel o un Palacio de Deportes tienen estructura de edificación con acciones que pueden superar las de muchas obras públicas y a ellas no parece adecuado aplicarles la simplificación.

$$\sum_{j\geq l} \gamma_{G,j}\, G_{K,j} + \gamma_{Q,l}\, Q_{K,l} \qquad [32.37]$$

Situaciones con dos o más acciones variables. Se establece la combinación

$$\sum_{j\geq l} \gamma_{G,j}\, G_{K,j} + \sum_{i\geq l} 0{,}9\, \gamma_{Q,i}\, Q_{K,i} \qquad [32.38]$$

d-2) Situaciones sísmicas. Se establece la combinación

$$\sum_{j\geq l} \gamma_{G,j}\, G_{K,j} + \gamma_A\, A_{E,K} + \sum_{i\geq l} 0{,}8\gamma_{Q,i}\, Q_{K,i} \qquad [32.39]$$

e) El estado límite último de fatiga no se rige por estas combinaciones sino por otras específicas, tal como se expone en el Capítulo 46.

- ESTADOS LÍMITE DE SERVICIO

Para estos estados límite no se considera limitación alguna en los casos de situaciones accidentales o sísmicas, en las cuales se admite que estos estados límite puedan ser alcanzados.

Para las situaciones persistentes y transitorias se establecen las combinaciones siguientes.

a) Estructuras en general

Situación poco probable

$$\sum_{j\geq l} \gamma_{G,j}\, G_{K,j} + \sum_{j\geq l} \gamma_{G,j}^{*}\, G_{K,j}^{*} + \gamma_p P_K + \gamma_{Q,1} Q_{K,1} + \sum_{i>1} \psi_{0,i}\, \gamma_{Q,i} Q_{K,i} \qquad [32.40]$$

Situación frecuente

$$\sum_{j\geq l} \gamma_{G,j}\, G_{K,j} + \sum_{j\geq l} \gamma_{G,j}^{*}\, G_{K,j}^{*} + \gamma_p P_K + \psi_{1,1} \gamma_{Q,1} Q_{K,1} + \sum_{i>1} \psi_2\, \gamma_{Q,i} Q_{K,i} \qquad [32.41]$$

Situación cuasipermanente

$$\sum_{j\geq l} \gamma_{G,j}\, G_{K,j} + \sum_{j\geq l} \gamma_{G,j}^{*}\, G_{K,j}^{*} + \gamma_p P_K + \sum_{i>1} \psi_{2,i}\, \gamma_{Q,i} Q_{K,i} \qquad [32.42]$$

b) Estructuras de edificación[1]

Situación probable o poco frecuente

b-1) Situaciones de una sola acción variable $Q_{K,i}$

$$\sum_{j\geq l} \gamma_{G,j}\, G_{K,j} + \gamma_{Q,1} Q_{K,1} \qquad [32.43]$$

1 Hacemos aquí las mismas salvedades que hicimos en el caso de estados límite últimos.

b-2) Situaciones con dos o más acciones variables $Q_{K,j}$

$$\sum_{j\geq i} \gamma_{G,j}\, G_{K,j} + 0{,}9 \sum_{i\geq l} \gamma_{Q,i} Q_{K,i} \qquad [32.44]$$

Situación cuasipermanente

$$\sum_{j\geq i} \gamma_{G,j}\, G_{K,j} + 0{,}6 \sum_{i\geq l} \gamma_{Q,i} Q_{K,i} \qquad [32.45]$$

Obsérvese, que para el caso de la comprobación de las deformaciones, las instantáneas deben calcularse bajo la combinación [32.40] de valores característicos, mientras las deformaciones diferidas lógicamente deben calcularse bajo la combinación [32.42] de valores cuasipermanentes. Si las sobrecargas Q_K, por tratarse de algún caso particular pudieran producirse sin la reducción de valores que encierra el coeficiente ψ_0 ello debe considerarse si la deformación puede producir daños en elementos no estructurales pues estos se pueden dañar con una sola actuación de las acciones.

VALORES DE LOS COEFICIENTES ψ

La Instrucción EHE no indica valores de los coeficientes ψ_0, ψ_1 y ψ_2. Estos vienen fijados en el EUROCÓDIGO EC-1 (32.8) para el caso particular de las estructuras de edificación (con independencia del material con que estén construidas). Para acciones en Puentes de Carretera y de Ferrocarril, véase (9.5) y (9.7).

EJEMPLO 32.1

Dada una viga de una estructura de edificación (Fig. 32-27) sometida a una acción de peso propio $g_1 = 2{,}5$ kN/m, otra de cargas permanentes $g_2 = 27$ kN/m, y a una sobrecarga de uso, $q = 12$ kN/m, calcular las combinaciones de acciones, con $\gamma_G = 1{,}35$ y $\gamma_Q = 1{,}5$

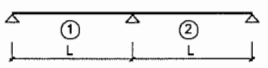


Figura 32-27

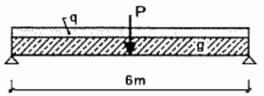


Figura 32-28

Para:

- Máximo momento flector negativo
- Máximo momento flector positivo en el centro del vano izquierdo
- Mínimo momento flector positivo (o máximo negativo) en el centro del vano izquierdo

Solución: Designamos con los subíndices 1 y 2 los valores de γ en los vanos correspondientes. Las acciones son permanentes o transitorias.

a) Máximo momento flector negativo. Aplicando [32.34]

$1,35 \cdot 2,5 + 1,35 \cdot 27 + 1,5 \cdot 12 = 57,8\ kN/m$

b) Máximo momento flector en el centro del vano 1

$\gamma_{G1,1} = \gamma_{G1,2} = \gamma_{G2,1} = \gamma_{G2,2} = 1,35$

puesto que son acciones del mismo origen. $\gamma_{Q,1} = 1,5$; $\gamma_{Q,2} = 0$

Vano 1: $1,35 \cdot 2,5 + 1,35 \cdot 27 + 1,5 \cdot 12 = 57,8\ kN/m$

Vano 2: $1,35 \cdot 2,5 + 1,35 \cdot 27 = 39,8\ kN/m$

c) Mínimo momento flector en el centro del vano 1

Vano 1: $1,35 \cdot 2,5 + 1,35 \cdot 27 = 39,8\ kN/m$

Vano 2: $1,35 \cdot 2,5 + 1,35 \cdot 27 + 1,5 \cdot 12 = 57,8\ kN/m$

Si aplicamos [32.37], en este caso particular los valores coinciden con los obtenidos.

EJEMPLO 32.2

Dada la viga de la figura 32-28, perteneciente a un edificio de oficinas, sometida a una carga permanente $g = 30\ kN/m$, otra de uso $q_1 = 15\ kN/m$ y una acción, también de uso, $P = 100\ kN$ con $\gamma_G = 1,35$ y $\gamma_{Q1} = \gamma_P = 1,5$, calcular la combinación de acciones más desfavorable para el momento flector máximo.

Solución. Aplicamos [32.34] y la tabla T-32.22.

a) **Carga uniformemente repartida**

$1,35 \cdot 30 + 1,5 \cdot 15 = 42,75\ kN/m$

Carga puntual ($\psi_0 = 0,7$)

$0,7 \cdot 1,5 \cdot 100 = 105\ kN$

$$M = \frac{1}{8} \cdot 36 \cdot 42,75 + \frac{1}{4} \cdot 6 \cdot 105 = 349,9\ kN/m$$

b) **Carga uniformemente repartida**

$1,35 \cdot 30 + 0,7 \cdot 1,5 \cdot 15 = 56,25\ kN/m$

Carga puntual

$1,5 \cdot 100 = 150\ kN$

$$M = \frac{1}{8} \cdot 6^2 \cdot 56,25 + \frac{1}{4} \cdot 6 \cdot 150 = 478,1\ kN/m$$

La combinación crítica es por tanto la b).

Si aplicamos la simplificación [32.37] se obtiene:

Carga uniformemente repartida

$1,35 \cdot 30 + 0,9 \cdot 1,5 \cdot 15 = 60,75\ kN/m$

Carga puntual

$0,9 \cdot 1,5 \cdot 100 = 135\ kN$

$$M = \frac{1}{8} \cdot 6^2 \cdot 60,75 + \frac{1}{4} \cdot 6 \cdot 135 = 475,9\ kN/m$$

EJEMPLO 32.3

Hallar las combinaciones de acciones para el cálculo de la flecha instantánea y diferida de un forjado de un edificio de viviendas sometido a una carga permanente de 4,5 kN/m² y una sobrecarga de uso de 2,0 kN/m².

Flecha instantánea. Se calcula bajo las acciones características.

$1,00 \cdot 4,5 + 1,00 \cdot 2 = 6,5\ kN/m^2$

Flechas diferidas. Se calcula bajo la combinación de acciones cuasipermanentes [32.42] y la tabla T-32.22 con $\psi_2 = 0,3$

$1,00 \cdot 4,5 + 0,3 \cdot 1,00 \cdot 2 = 5,1\ kN/m^2$

La simplificación de [32.45] es claramente conservadora.

EJEMPLO 32.4

Un pilar de una Estación de Autobuses está sometido a unas solicitaciones axiles de carga permanente $N_g = 1200\ kN$, de sobrecargas de uso $N_q = 700\ kN$ y a un momento flector debido a acciones accidentales de 500 mkN debido a choque de vehículos. Se calcula con $\gamma_g = 1,35$; $\gamma_q = 1,50$. Calcular la combinación pésima de acciones. Se aplica [32.35] y la tabla T-32.19.

Deben comprobarse los dos casos siguientes:

a) Situación persistente

$N_d = 1,35 \cdot 1200 + 1,5 \cdot 700 = 2670\ kN$

$M_d = 0$

b) Situación accidental 1

$N_d = 1,00 \cdot 1200 = 1200\ kN$

$M_d = 500\ m\ kN$

c) Situación accidental 2

$N_d = 1 \cdot 1200 + 0,7 \cdot 700 = 1690\ m\ kN$

$M_d = 500\ m\ kN$

32.8. ESTADO DE DEFORMACIONES EN UNA SECCIÓN ARMADA SOMETIDA A ESFUERZOS NORMALES

Se definen como esfuerzos normales, tal como se dijo en 32.3.3, aquellos que producen tensiones paralelas a la directriz de la pieza y son, por tanto, el esfuerzo axil y el momento flector.

De acuerdo con el C.E.B., la Instrucción EHE ha adoptado para los esfuerzos normales la distribución de deformaciones en el estado límite último que se indica a continuación.

Se supone que el agotamiento de la sección de hormigón ocurre por rotura del hormigón comprimido, excepto en secciones con baja cuantía de armadura, en las cuales el agotamiento se alcanza por deformación plástica excesiva de la armadura.

Se supone también que se cumplen las hipótesis siguientes:

a) Las secciones planas antes de la deformación permanecen planas después de la misma. Se desprecian, por tanto, las deformaciones debidas al esfuerzo cortante.

b) Las armaduras experimentan la misma deformación que el hormigón que las rodea. Esto equivale a suponer que no hay deslizamiento entre las armaduras y el hormigón.

c) Se desprecia la resistencia a tracción del hormigón.

Los diagramas de deformación de la sección se indican en la figura 32-29 y pasan por los puntos *A*, *B* y *C*. De acuerdo con las deformaciones del hormigón y del acero, pueden distinguirse cinco zonas.

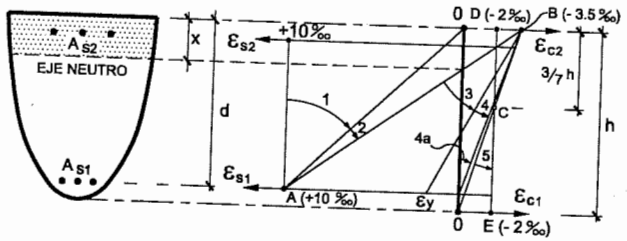


Figura 32-29

Dominios 1 y 2. En ellos la armadura de la cara de tracción o más traccionada, en el estado límite último presenta un alargamiento del 10‰. Las secciones giran alrededor del punto *A*.

Dominio 1: *Tracción simple o compuesta.* La profundidad del eje neutro varía desde $x = -\infty$ (tracción simple o centrada) hasta $x = 0$.

Dominio 2: *Flexión simple o compuesta.* El hormigón no alcanza su deformación de rotura por compresión en flexión ($\varepsilon_{cu} = 3{,}5‰$), y por tanto no se alcanza su rotura. La profundidad del eje neutro varía desde $x = 0$ hasta $x = 0{,}259\ d$.

Dominios 3 y 4. En estas zonas se alcanza la deformación de rotura del hormigón por compresión en flexión. La profundidad del eje neutro varía desde $x = 0{,}259\ d$ hasta $x = h$. Las secciones giran alrededor del punto *B*.

Dominio 3: *Flexión simple o compuesta.* La deformación del acero en tracción o más traccionado varía desde el 10‰ hasta ε_y, siendo ε_y la deformación correspondiente al límite elástico de cálculo[1].

Dominio 4: *Flexión simple o compuesta.* La deformación del acero en tracción o más traccionado varía de ε_y hasta *0* [2].

Dominio 4a: *Flexión compuesta.* Todas las armaduras están comprimidas aunque hay una pequeña zona de hormigón en tracción.

Dominio 5: *Compresión compuesta o simple.* La deformación del hormigón varía desde $\varepsilon_{cu} = 3{,}5‰$ hasta $\varepsilon_{cu} = 2‰$. Las secciones giran alrededor del punto *C*, tal que $DC = \frac{3}{7}h$. La profundidad del eje neutro varía de $x = h$ a $x = +\infty$.

El EUROCÓDIGO EC-2 adopta análogo tratamiento. El CEB, a partir del MODEL CODE 90, ha abandonado el estado de deformación plástica excesiva del acero ($\varepsilon_s = 10‰$), por su carácter artificial e innecesario.

32.9. ESTADO DE DEFORMACIONES EN UNA SECCIÓN SOMETIDA A LA ACCIÓN DEL PRETENSADO

Dada una sección transversal de una pieza tal como la indicada en la figura 32-30,

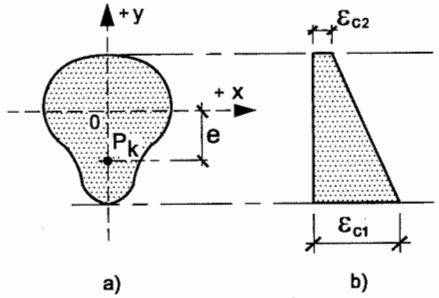


Figura 32-30

sometida a una fuerza de pretensado de valor P_k en el instante considerado, actuando con excentricidad *e* respecto al c.d.g de la sección, *o* (*e* es positiva en el sentido del eje + *y*), el diagrama de deformaciones del pretensado, corresponde a un plano.

Las deformaciones extremas, ε_{c1} y ε_{c2}, se calcularán, como veremos más adelante a partir del valor de P_k y del módulo de deformación E_c del hormigón, y de sus deformaciones de fluencia y retracción correspondientes al instante considerado. El tema será expuesto en los Capítulos 36 y 37.

---

1 Obsérvese que $\varepsilon_y = \frac{f_{yd}}{E_s}$ para aceros de dureza natural, pero esta expresión no es válida para aceros laminados en frío, en los que ε_y debe ser determinado en su diagrama de cálculo.

2 El límite entre los dominios 3 y 4 corresponde a una situación en la que simultáneamente se alcanza la rotura del hormigón y el límite elástico del acero. En la bibliografía anglosajona esta condición suele denominarse "balanced condition". Es difícil encontrar una traducción española que no induzca a error.

32.10 ESTADO DE DEFORMACIONES EN UNA SECCIÓN PRETENSADA SOMETIDA A ESFUERZOS NORMALES

El estado de deformaciones debe, en este caso, obtenerse por superposición de lo expuesto en 32.8 y 32.9.

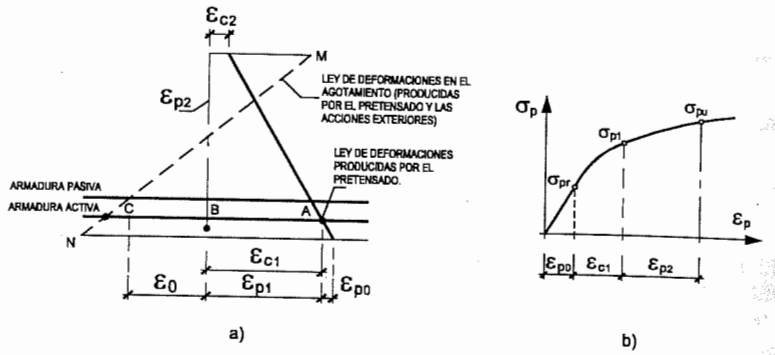


Figura 32-31

Los resultados se indican en la figura 32-31 a). La diferencia con el caso de la pieza armada, es que si bien para la armadura pasiva, su estado de deformación se cuenta a tensión nula y su alargamiento ε_o es producido íntegramente por las acciones exteriores, no ocurre así en la pretensada[1].

En efecto, bajo la acción del pretensado, la armadura se alarga y aunque como veremos este alargamiento se reduce en parte debido a las pérdidas de tensión, se conserva un alargamiento remanente de tesado ε_{po} (Fig. 32-31 b)). Cuando actúan las acciones exteriores, la sección se descomprime y la deformación de la armadura activa se incrementa en ε_c. En ese momento la fibra de hormigón a la misma altura que el c.d.g. de la armadura activa está a tensión nula y la tensión de la armadura activa ha pasado de σ_{pr} a σ_{pl} (Fig. 32-31 b)). Al continuar el incremento de las acciones exteriores, el hormigón a nivel de la armadura activa se alarga, y la ley de deformaciones de la sección en el agotamiento pasa a ser la *MN*, con un incremento de deformación de la armadura activa de ε_{C2}, que conduce al que corresponde la tensión última de la armadura activa, σ_{pu}.

El diagrama de deformaciones expuesto en 32.8 sigue siendo válido, pero considerando la influencia del pretensado en la deformación de la armadura activa.

32.11 OTRAS NORMAS DE CÁLCULO

Existen, como en parte hemos señalado ya, otras Normas de Cálculo, de las cuales indicamos las más importantes.

1 Como veremos en el Capítulo 36, si la pieza tiene armaduras pasiva y activa, la armadura pasiva sufre deformaciones debidas a la acción del pretensado.

a) MODEL CODE CEB-FIP 1990. Es el documento de base de la mayor parte de las normas de los países de Europa, entre ellas EHE, de algunos de América como Bolivia, Brasil y en parte Argentina y, especialmente del EUROCÓDIGO EC-2.

No está pensado como una norma de aplicación directa a la práctica profesional, sino más bien, como claramente indica su nombre, como un documento de referencia para los redactores de Normas. Su amplísima documentación lo transforma en una herramienta indispensable y en muchos aspectos posee una información y una precisión muy superior a las de las Normas de él derivadas.

b) EUROCÓDIGO EC-2. Está orientado básicamente en la línea del MODEL CODE. Sin embargo, por su época de redacción, en gran parte coincidente con la de dicho Código, está en parte basado en el MODEL CODE de 1978 y en parte en el de 1990.

De momento el EUROCÓDIGO EC-2 no es de aplicación obligatoria en la Unión Europea, pero su versión actual esta siendo utilizada en muchos países miembros de forma ya muy intensa y general. La legislación comunitaria, en la etapa actual permite que los distintos países miembros redacten un DNA (Documento Nacional de Aplicación) que completa y adapta, provisionalmente el EUROCÓDIGO EC-2 a cada país en el momento actual.

El DNA de España figura como Anejo 13 a la Instrucción EHE.

c) NORMA NORTEAMERICANA. Es una norma de gran calidad y prestigio, que viene publicándose desde 1912 con revisiones cada siete u ocho años. La última es la de 1995. "Building Code Requirements for Structural Concrete" (ACI 318-95). (32.43).

Esta norma es fundamentalmente coincidente con la de Canadá, gran parte de Centro y Sudamérica y de Asia.

Su tratamiento formal es distinto al del Código Modelo, pues parte de mayorar las solicitaciones, en general con 1,4 las permanentes y 1,7 las variables, lo cual conduce a la solicitación actuante S_u.

En cambio la capacidad resistente, S_u no se obtiene a partir de los valores de cálculo de las resistencias del hormigón y del acero, sino de sus valores característicos, es decir

$$R = \phi \cdot f(D, f_{ck} f_{yk})$$

donde R es la representación simbólica de las dimensiones de hormigón y armaduras y f_{ck} y f_{yk} los valores característicos de la resistencia del hormigón y del límite elástico del acero, respectivamente.

El coeficiente reductor ϕ es el de comportamiento de la sección frente a cada solicitación (flexión simple, torsión, etc.).

Para diagrama del hormigón adopta uno rectangular. Debe señalarse que fue la primera norma en el mundo en iniciar este camino.

La equiparación aproximada de las fórmulas del ACI 318-95 a los sistemas semiprobabilistas debe realizarse con cuidado, pues no son directamente comparables.

Dada una fórmula del ACI del tipo general

$$S_u \leq \phi R \qquad [32.46]$$

la equiparación aproximada puede realizarse mediante la fórmula

$$S_d \leq \frac{\phi R}{K} \qquad [32.47]$$

donde

ϕ = Coeficiente dependiente del tipo de solicitación, que toma los valores siguientes

$\phi = 0{,}90$ para flexión y tracción simple y compuesta.

$\phi = 0{,}70$ para compresión y flexión compuesta ($\phi = 0{,}75$ para piezas zunchadas).

$\phi = 0{,}85$ para esfuerzo cortante, punzonamiento, torsión y esfuerzo rasante.

TABLA T-32.23
VALORES DEL COEFICIENTE *K*

Relación g/q	NIVEL DE CONTROL DE CALIDAD DE LA EJECUCIÓN		
	INTENSO	NORMAL	REDUCIDO
0	1,13	1,06	0,94
0,5	1,10	1,02	0,92
1,0	1,09	1,00	0,91
2,0	1,07	0,98	0,90
5,0	1,05	0,96	0,89

Los valores de K se indican en la Tabla T-32.23 para los casos usuales en función de la relación g/q de carga permanente a sobrecarga de uso y del nivel de control de calidad de la ejecución.

32.12 UTILIZACIÓN DE NORMAS DIFERENTES A LA EHE

Al amparo de lo previsto en el Art. 1 de la Instrucción citada, en bastantes ocasiones expondremos, paralelamente a los métodos de EHE, otros tomados del

MODEL CODE 1990, del EUROCÓDIGO EC-2 y de la Norma ACI 318-95, cuando en esos aspectos concretos ofrezcan alternativas interesantes o completen las especificaciones de EHE.

Sin embargo en cada caso se justificarán las fórmulas adoptadas, pues es un peligro claro utilizar fórmulas o métodos aislados tomados de una norma sin contemplarla en su totalidad.

32.13 CONCEPTO DE SEGURIDAD GLOBAL DETERMINISTA

Aunque es claro que el camino para el tratamiento adecuado de la seguridad es hoy el de los métodos semiprobabilistas y será en el futuro el de los métodos probabilistas, algunos conceptos puramente deterministas siguen presentando interés práctico. Destacamos a continuación el concepto de *seguridad global determinista* y en el apartado siguiente introduciremos el de *seguridad a sobrecargas*[1].

En los apartados anteriores hemos supuesto que el estado límite último se alcanza cuando, simultáneamente, la resistencia del hormigón desciende hasta su valor de cálculo, $f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c}$, el límite elástico del acero se reduce al límite elástico de cálculo $f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s}$ y las acciones alcanzan sus valores, también de cálculo, iguales a los característicos multiplicados por los respectivos valores γ_f.

Supongamos ahora que la estructura se construye con materiales de resistencias iguales a las características, f_{ck}, f_{yk}, y que ello se conoce con seguridad absoluta. Supongamos también que el estado límite último se alcanza por la exclusiva variación del esfuerzo o esfuerzos aplicados a la sección, desde su valor característico S_k, hasta su valor de agotamiento S_R [2]. Definimos como *coeficiente de seguridad global determinista* el valor

$$C_{sg} = \frac{S_R}{S_k} \qquad [32.48]$$

Debe observarse que este concepto es diferente para el caso de solicitaciones constituidas por un solo esfuerzo o el caso en que actúan varios.

Si la sección está sometida solamente a un esfuerzo axil característico N_{kl} y su esfuerzo axil determinista de agotamiento es N_{Rl}, el coeficiente de seguridad global determinista será:

$$C_{sg} = \frac{N_{Rl}}{N_{kl}} \qquad [32.49]$$

1 Para valores concretos de coeficientes de seguridad, véase J. CALAVERA (32.44).

2 Empleamos el subíndice R para el agotamiento determinista, reservando el U para el semiprobabilista. La diferenciación entre ambos conceptos es esencial.

Si la sección está sometida sólo a un momento flector, cuyo valor característico es M_{kJ} y cuyo valor determinista de agotamiento es M_{RJ}, el coeficiente global determinista será

$$C_{sg} = \frac{M_{RJ}}{M_k} \qquad [32.50]$$

Supongamos que la sección esté sometida simultáneamente a un esfuerzo axil y a un momento flector característico de valores M_{kJ}, N_{kJ}. El agotamiento de la sección podrá producirse por infinitas combinaciones M_R, N_R de valores de agotamiento determinista. Todos estos valores definen una curva de interacción C, lugar geométrico de los puntos representativos del agotamiento. En particular la curva corta a los ejes en los puntos B' y B'' anteriormente definidos.

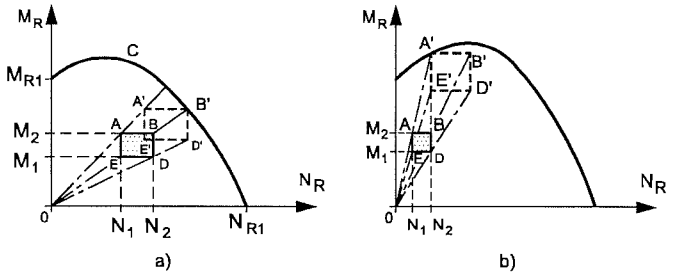


Figura 32-32

El esfuerzo axil oscilará entre un valor mínimo N_1 (generalmente el debido a las cargas permanentes) y otro máximo N_2 que incluye las sobrecargas. Análogamente ocurre con el momento flector, que variará entre M_1 y M_2 (Fig. 33-32 a)). El conjunto de puntos representativos de las solicitaciones M,N posibles es el rectángulo $ABDE$. Haciendo una ampliación homotética del rectángulo con centro en O, inscribimos en la curva C un rectángulo homotético $A'B'D'E'$. El punto de agotamiento es B' y por tanto

$$C_{sg} = \frac{OB'}{OB} \qquad [32.51]$$

Debe prestarse atención a que el vértice crítico puede no corresponder al conjunto de los dos valores máximos M,N. En la figura 32-32 b) puede apreciarse que el vértice crítico es el A', correspondiente al mínimo axil combinado con el máximo flector[1] y

$$C_{sg} = \frac{OA'}{OA} \qquad [32.52]$$

1 Recuérdese lo expuesto en 9.5.2.

32.14 CONCEPTO DE SEGURIDAD A SOBRECARGAS

Designemos por S_g, S_q las solicitaciones producidas por las cargas permanentes y las sobrecargas características en la sección considerada y por S_R la solicitación determinista de agotamiento.

Supongamos que la sección está sometida a un solo esfuerzo y alcanza su agotamiento *exclusivamente* por crecimiento de las sobrecargas. Para ello, éstas habrán de multiplicarse por un valor λ, tal que

$$S_g + \lambda S_q = S_R$$

El valor

$$C_{ss} = \lambda = \frac{S_R - S_g}{S_q} \qquad [32.53]$$

es definido como *coeficiente de seguridad a sobrecargas.*

Si consideramos, a título de ejemplo, el caso de un forjado de cubierta en zona donde habitualmente no se producen nevadas, con una carga permanente de 4 kN/m² y una sobrecarga de uso de 0,4 kN/m², con un coeficiente de seguridad global determinista de 2, su carga de agotamiento en flexión será $2\ (0{,}4 + 4) = 8{,}8\ kN/m^2$. Como existe proporcionalidad entre momentos y cargas, la aplicación de [32.53] conduce a

$$C_{ss} = \frac{8{,}8 - 4}{0{,}4} = 12$$

Si en cambio consideramos un forjado de piso de pequeña luz en una nave industrial, con carga permanente de 3 kN/m² y sobrecarga de uso de 30 kN/m², con coeficiente de seguridad global determinista también igual a 2, se obtiene

$$C_{ss} = \frac{66 - 3}{30} = 2{,}1$$

Es evidente que, en principio, es más fácil concebir el agotamiento por crecimiento de las sobrecargas en el segundo caso que en el primero.

El concepto de seguridad a sobrecargas es de gran utilidad, pero debe ser manejado con cuidado, pues es claro que el agotamiento de una sección puede alcanzarse por muchas causas distintas del crecimiento de la sobrecarga, tales como errores de proyecto, bajas de resistencias en los materiales, errores en las dimensiones de la sección, en la cantidad y/o posición de las armaduras, en los detalles constructivos, etc.

BIBLIOGRAFÍA

(32.1) "CEB-FIP MODEL CODE 1990" Mars. 1990 (Bulletins CEB 195-196).

(32.2) EUROCÓDIGO EC-2 "Proyecto de estructuras de hormigón. Parte 1-1: Reglas generales y reglas para edificación".

(32.3) PUGSLEY, A. "The safety of structures". Edward Arnold Ltd. London 1966.

(32.4) MOSLEY, H. "The mechanical principles of engineering and architecture". Longman. Green. London 1843.

(32.5) PAEZ A.; TORROJA, E. "La determinación del coeficiente de seguridad en las distintas obras". Instituto Técnico de la Construcción y del Cemento. Madrid.

(32.6) FERRY BORGES, J.; CASTANHETA, M. "Structural safety". Laboratorio Nacional de Engenharia Civil. 2ª Edición. Lisboa 1971.

(32.7) "Instrucción para el Proyecto y la Ejecución de Obras de Hormigón Estructural". EHE. Ministerio de Fomento. Madrid 1998.

(32.8) UNE-ENV 1991-1 EUROCÓDIGO EC-1 "Bases de proyecto y acciones en estructuras. Parte 1: Bases de proyecto". AENOR. Octubre 1997.

(32.9) NORMA NBE-AE-88 "Acciones en la edificación". MOPU. Madrid 1989.

(32.10) UNE 24003 "Sobrecargas mínimas para el cálculo de estructuras de edificios y de sus piezas". IRANOR. Madrid. (Actualmente cancelada).

(32.11) HART, G.C. "Uncertainty analysis, loads and safety in structural engineering". Prentice-Hall. New Jersey 1982.

(32.12) MACDONALD, A.J. "Wind loading on buildings". Applied Science Publishers Ltd. Londres 1975.

(32.13) HOUGHTON, E.L.; CARRUTHERS, N.B. "Wind forces on buildings and structures". Edward Arnold Publishers. Londres 1976.

(32.14) BERANEK, W.J.: "Wind environment around single buildings of rectangular shape". Heron. Vol. 29. nº. 1. 1984.

(32.15) ARROYO, R.; BENITO, J.R.; ALVAREZ, R.: "Análisis de la acción del viento en los edificios". Cuaderno INTEMAC Nº 28. Madrid, 1997.

(32.16) "Régles définissant les effects de la neige et du vent sur les constructions et anexes". Eyrolles. Paris. 1997.

(32.17) "Norma Sismo-resistente N.C.S.-94. Ministerio de Obras Públicas, Transportes y Comunicaciones. Madrid. 1994.

(32.18) Norma UNE 83313/90 "Determinación de un índice de consistencia de los hormigones frescos, por el método del cono de Abrams". AENOR. Madrid 1990.

(32.19) MORAGUES, J.J.: "Diseño óptimo de estructuras aporticadas de hormigón armado". Tesis Doctoral en la Escuela T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Valencia. 1980.

(32.20) MORAGUES, J.J.: "Diseño óptimo de piezas prismáticas flectadas de hormigón armado". Boletín de Estructuras. Escuela T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Valencia. 1981.

(32.21) MORAGUES, J.J.: "Diseño óptimo de soportes rectangulares de hormigón armado". Boletín de Estructuras. Escuela T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Valencia. 1981.

(32.22) GÓMEZ HERMOSO, J.: "Análisis técnico-económico de la influencia que presenta el empleo de diferentes materiales y tipologías estructurales en el proyecto de estructuras de edificios". Tesis Doctoral en la Escuela T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Madrid bajo la dirección de J. Fernández Gómez. 1998.

(32.23) Norma UNE 36-068-94 "Barras corrugadas de acero soldable para armaduras de hormigón armado". AENOR. Madrid. 1996.

(32.24) Norma UNE 36740:98 "Determinación de la adherencia de las barras y alambres de acero para armaduras de hormigón armado. Ensayo de la viga". AENOR. Madrid. 1998.

(32.25) Norma UNE 36-092: 96 "Mallas electrosoldadas de acero para armaduras de hormigón armado". AENOR. Madrid. 1996.

(32.26) Norma UNE 36-462-80 "Método de ensayo de despegue de las barras de nudo en mallas electrosoldadas". AENOR. Madrid 1980.

(32.27) CALAVERA, J.: "Consideraciones sobre Normalización de Armaduras para Hormigón". ATEP. "Jornadas sobre Técnicas del Hormigón Armado y Pretensado en Centrales Nucleares". 1983.

(32.28) Norma PNE 36065 EX "Barras corrugadas de acero soldable con características especiales de ductilidad para armaduras de hormigón armado".

(32.29) ORTEGA VALENCIA, H.: "Estudio experimental de la influencia del tipo de acero en la capacidad de redistribución en losas de hormigón armado". Tesis Doctoral en la Escuela de Ingenieros de Caminos de Madrid, bajo la dirección de J. CALAVERA. Madrid. 1998.

(32.30) Norma UNE 36094:97 "Alambres y cordones de acero para armaduras de hormigón pretensado". AENOR. 1997.

(32.31) Norma UNE 36422:85 "Ensayo de relajación isotérmica de armaduras de acero para pretensar". AENOR. 1985.

(32.32) HOLMBERG, A.; LINDGREN, S.: "Anchorage and prestress transmission". Document DI: 1970. National Swedish Building Research.

(32.33) PRESTRESSED CONCRETE INSTITUTE "Design Handbook". "Precast prestressed concrete". 2ª Edición. Chicago. 1978.

(32.34) F.I.P. Report on Prestressing Steel: nº 3 "Losses of prestress in tendons due to steam curing of concrete".

(32.35) CLARKE, J.L.: "Alternative Materials for the reinforcement and prestressing of concrete". Blackie Academic & Profesional. London. 1993.

(32.36) DOLAN, Ch. W.: "Developements in non-metallic prestressing tendons". Journal of P.C.I. September-October 1990.

(32.37) "Resistencia Característica y Control de Calidad". MOPU. Madrid. 1973.

(32.38) "Examen de la qualité des projets de construction de logements d'immeubles collectifs et d'habitations individuelles". Cahiers C.S.T.B. nº 185. Déc. 1977.

(32.39) "Recommadations pour la vérification des études d'execution des ouvrages d'art". S.E.T.R.A. Paris. 1977.

(31.40) "Quality Assurance within the Builgind Process". IABSE Workshop. Rigi. 1983.

(32.41) "Quality Control and Quality Assurance for Concrete Structures". Comité Euro-International du Beton. Bulletin 157. Marzo 1983.

(32.42) CALAVERA, J.: "Patología de Estructuras de Hormigón Armado y Pretensado". 2 Tomos. INTEMAC. Madrid. 1996.

(32.43) ACI 318-95 "Building code requirements for structural concrete". American Concrete Institute. Detroit. 1995.

(32.44) CALAVERA, J.: "Los coeficientes de seguridad en teoría clásica y en teoría de estados límites". Hormigón y Acero. Nº 110. 1974.

CAPÍTULO 33

REGIONES DE DISCONTINUIDAD. BIELAS Y TIRANTES

33.1. ZONAS DE CONTINUIDAD Y DISCONTINUIDAD EN LAS ESTRUCTURAS DE HORMIGÓN

Si consideramos la pieza indicada en la figura 33-1a) sometida a cargas uniformemente repartidas, con su red de isostáticas, se aprecia que si bien la red tensional es uniforme en la mayor parte de la luz, la zona próxima a los apoyos está perturbada por la discontinuidad que representan las reacciones concentradas de los mismos.

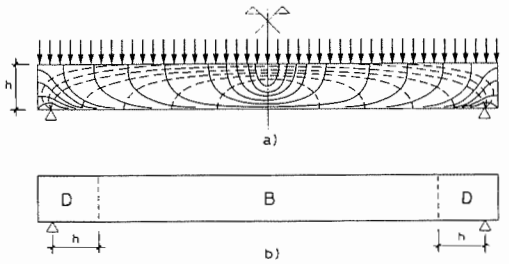


Figura 33-1

Partiendo de la Hipótesis de Saint-Venant, podemos aceptar (Fig. 33-1b)) que, en zonas de una extensión máxima aproximadamente igual a un canto a partir de los apoyos, se apreciará la perturbación causada por las reacciones. En dichas zonas no se

cumplirá naturalmente la Ley de Bernouilli referente a la deformación plana. A estas zonas, por su discontinuidad, las llamaremos zonas *D*[1].

En el resto de la pieza la Ley de Bernouilli será aplicable y esa zona la designaremos como *B*. En las zonas *D* los conceptos clásicos de momento flector, esfuerzo cortante, etc. no pueden aplicarse y la pieza puede ser asimilada a dos cordones paralelos que recogen los esfuerzos de compresión y tracción y una celosía constituida por la armadura de corte y las bielas comprimidas.

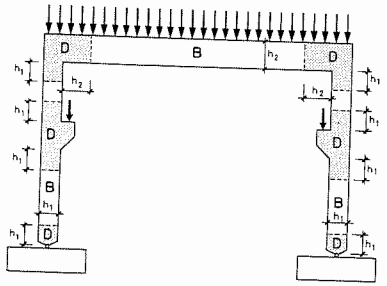


Figura 33-2

La figura 33-2 indica las zonas *B* y *D* en una estructura algo más compleja.

Las discontinuidades en una estructura pueden venir originadas por su geometría (Discontinuidad geométrica) o por las acciones aplicadas (Discontinuidad mecánica).

La figura 33-3 presenta varios casos de discontinuidades geométricas.

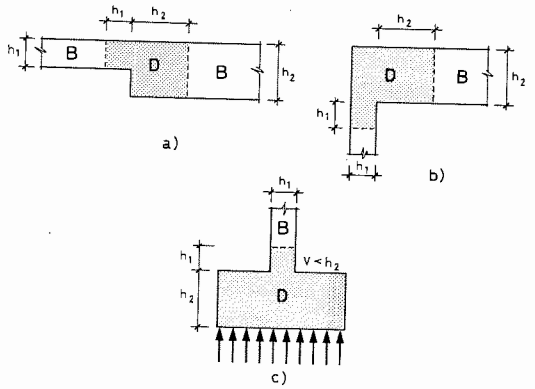


Figura 33-3

1 EHE emplea la designación, muy frecuente y general, de "regiones de discontinuidad". Otra tendencia existente es designarlas como "regiones o zonas perturbadas". El término "discontinuidad" puede interpretarse en el sentido de que en esas zonas no continúa siendo válida la Ley de Bernouilli.

En la figura 33-4 se indican varios casos de discontinuidades mecánicas.

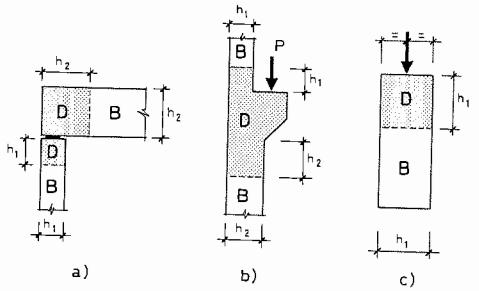


Figura 33-4

33.2 MÉTODOS DE CÁLCULO DE LAS ZONAS DE DISCONTINUIDAD

Es claro que al no ser aplicable en ellas la Ley de Bernouilli, estas zonas no pueden ser calculadas con los procedimientos generales derivados de los esfuerzos (momento flector, esfuerzo axil, esfuerzo cortante, esfuerzo rasante, momento torsor, etc.).

El primer método utilizado para calcularlas fue probablemente el derivado de los métodos fotoelásticos. Un segundo fue el de los ensayos en modelo reducido, pero construido con hormigón y armaduras. Un tercero, de permanente aplicación en prefabricación, es el de los ensayos a escala real. En los últimos años el perfeccionamiento de las aplicaciones informáticas a los elementos finitos, sobre todo con la aceptable precisión de formulación de los fenómenos de adherencia y formación de fisuras, ha reducido mucho el interés de los métodos fotoelásticos y de los ensayos en modelo reducido.

Sin embargo, la aplicación de todos estos métodos es costosa y requiere bastante tiempo. Una solución clásica ha sido el desarrollo de fórmulas aproximadas, generalmente derivadas de ensayos en laboratorio. Tres ejemplos frecuentes de desarrollo de tales fórmulas aproximadas son los casos de la figura 33-3c) y 33-4b) y c).

En los últimos años se ha puesto a punto el llamado "Método de las bielas y tirantes", adoptado por el Model Code 90 y también por EHE. No lo trata en cambio el Eurocódigo EC-2.

Esencialmente expuesto de forma preliminar, el método se indica en la figura 33-5 para el caso de una viga de gran canto.

La figura 33-5a) indica la red de isostáticas para el caso de carga uniformemente repartida. Si sustituimos dicha carga por dos puntuales aplicadas en los cuartos de la luz, con valor total equivalente, el flujo de tensiones puede simplificarse de acuerdo con la figura 33-5b). El esquema de la figura 33-5c) es la asimilación del funcionamiento de la pieza a un conjunto de bielas y tirantes.

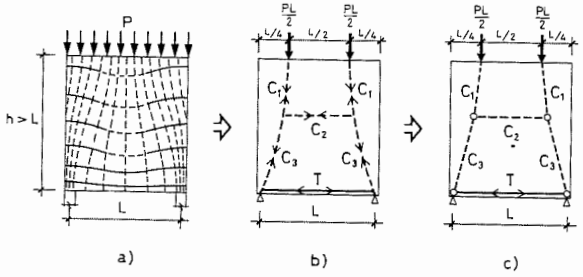


Figura 33-5

En el esquema figuran los tres elementos básicos del método.

- Las bielas comprimidas C_1, C_2, C_3, representadas siempre en lo que sigue por líneas rectas de trazos.
- Los tirantes en tracción, en este caso uno solo, T.
- Los nudos de coincidencia de bielas entre sí, de tirantes entre sí o de bielas y tirantes, representados por pequeños círculos.

Más adelante entraremos en los problemas, tales como el de qué sección transversal podemos considerar en las bielas, dónde se sitúan bielas de las diversas posiciones posibles, como la C_2 de la figura 33-5c), cómo se anclan las armaduras de los tirantes en los nudos, qué resistencia podemos aceptar para el hormigón en los diferentes tipos de bielas y nudos, etc.

El método tiene naturalmente su antecedente más remoto en las teorías de MÖRSCH (33.1) y RITTER (33.2) de principios del siglo XX, si bien no debe olvidarse que ambos la aplicaron casi exclusivamente en lo que ahora llamamos "*zonas B*". Realmente el método comenzó a plantearse de nuevo por ingenieros alemanes y suizos, entre los cuales debe destacarse a LEONHARDT (33.3), RÜSCH (33.4) y KUPFER (33.5) en Alemania y a THÜRLIMANN (33.6) y MUELLER (33.7) en Suiza. Ha habido aportaciones también de gran importancia de Estados Unidos de MARTI (33.8) y de Canadá de COLLINS y MITCHELL (33.9).

Sin embargo el gran desarrollo, fundamentación y definición del método se debe a SCHLAICH (33.10) en Alemania. El trabajo "Toward a Consistent Design of Structural Concrete" (33.11), publicado con sus colaboradores SCHÄFER y JENNEWEIN, constituye un documento excepcionalmente importante.

33.3 PLANTEAMIENTO DEL MÉTODO DE LAS BIELAS Y TIRANTES

Una recomendación general de orden previo es que la estructura en general debe ser calculada de acuerdo con los procedimientos generales, pero ello debe hacerse con una clara identificación de las zonas D.

Este planteamiento es no sólo conveniente sino también necesario, pues es la única forma de calcular los esfuerzos en los límites de las zonas D, es decir, de las fuerzas aplicadas por las zonas B sobre las D contiguas, es decir sus fuerzas de contorno.

Cualquier información de que se disponga sobre la distribución real de tensiones en las regiones D, procedente de cualquier otro método correcto de cálculo, es siempre una gran ayuda y una excelente información para establecer el esquema de bielas y tirantes.

Un orden recomendable en la aplicación del método es el que sigue:

1. Establecer el esquema de bielas y tirantes para la pieza y las acciones aplicadas sobre ella.

   De acuerdo con la secuencia indicada en la figura 33-5, el esquema de bielas y tirantes reemplaza al campo de tensiones reflejado por la ley de isostáticas, mediante **bielas y tirantes rectos** y las **curvaturas del campo de tensiones se concentran puntualmente en los nudos.**

2. **Calcular las fuerzas de compresión** C en las bielas y **las fuerzas de tracción** T en los nudos, **mediante la aplicación de las condiciones de equilibrio**.

3. Comprobar que las tensiones de compresión en las bielas son admisibles de acuerdo con la resistencia del hormigón utilizado y dimensionar la sección de los tirantes de acuerdo con las fuerzas T de tracción y las características del acero empleado.

4. Como lo expuesto en 2 y 3 constituye en definitiva una aplicación a un campo plástico de tensiones del Teorema de Estado Límite Inferior (ver Capítulos 17 y 21), no garantiza por tanto ni la compatibilidad de deformaciones ni la limitación adecuada de la fisuración. Adicionalmente, tampoco queda garantizada la limitación de las rotaciones plásticas. Más adelante veremos que estos aspectos pueden ser adecuadamente considerados.

5. Normalmente existen diversos esquemas de bielas y tirantes que cumplen las condiciones de equilibrio. El ejemplo siguiente indica la forma de selección del esquema preferible. Volviendo al caso de la figura 33-5, en la 33-6 se presentan tres variantes:

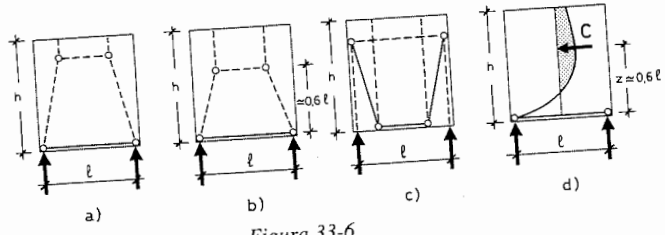


Figura 33-6

- La variante a) es técnicamente posible, pero discrepa notablemente del hecho conocido que se indica en d), de que el valor de z debe ser aproximadamente $z \cong 0{,}6\ l$.

- La variante b) es correcta.
- La variante c) cumple las leyes del equilibrio pero presenta dos inconvenientes:
  - La longitud de tirantes y por lo tanto de armadura de tracción es mayor que en la solución b). (Ello conducirá además a mayores deformaciones).
  - Exige armadura resistente (no de carácter secundario como las de retracción y temperatura, etc.) en ambas direcciones.

  Como la variante b) no presenta estos inconvenientes, es por tanto la preferible.

6. El paso final es la comprobación de los nudos, tanto en los estados de tensión del hormigón como en las condiciones de anclaje de las armaduras.

33.4 COMPROBACIÓN DE LOS CAMPOS DE TENSIONES EN EL HORMIGÓN DE LAS BIELAS

33.4.1. TENSIONES DE COMPRESIÓN DEL HORMIGÓN EN BIELAS NO CONFINADAS

Los campos de tensiones que aparecen en el método de bielas y tirantes se indican en la figura 33-7a) y b).

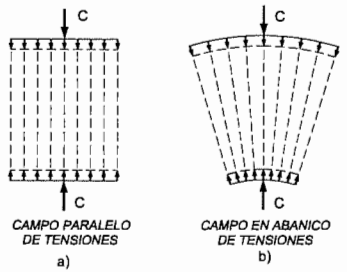


Figura 33-7

Estos campos de tensiones son por supuesto simplificaciones de casos reales más complejos. Tal como se indica en la figura 33-8, los campos de tensiones a) y b) corresponden a casos reales de las simplificaciones de la figura 33-7a) y b).

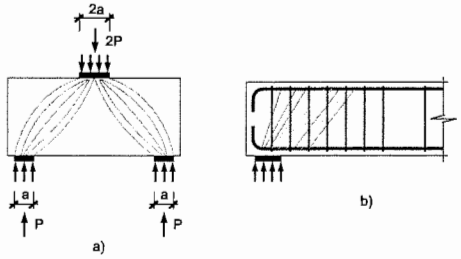


Figura 33-8

La resistencia a compresión de las bielas no depende sólo de la resistencia intrínseca del hormigón, sino de la existencia de otras tensiones no paralelas al eje de la biela y de la posible armadura transversal a la biela.

De acuerdo con EHE, los valores máximos de cálculo de las tensiones de compresión en las bielas son los siguientes:

Caso a) **Bielas de hormigón con fisuras potenciales paralelas a las bielas y armadura transversal de cosido.**

Es, por ejemplo, el caso de la figura 33-9.

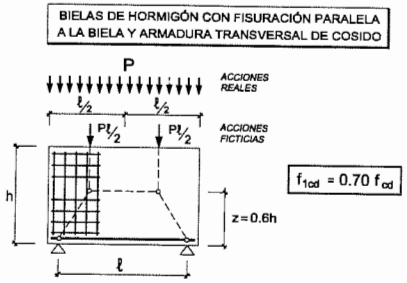


Figura 33-9

La resistencia a considerar en estos casos es

$$f_{1cd} = 0{,}70\, f_{cd} \qquad [33.1]$$

donde $f_{cd} = \dfrac{f_{ck}}{1{,}5}$ de acuerdo con lo expuesto en el Capítulo 32. Se sobreentiende que la armadura está anclada a partir de los labios de cualquier fisura potencial.

Caso b) **Bielas de hormigón que transmiten compresiones a través de fisuras de abertura controlada por armadura transversal** (Efecto de engranamiento que se analizará en el Capítulo 39).

Es, por ejemplo, el caso de la figura 33-10.

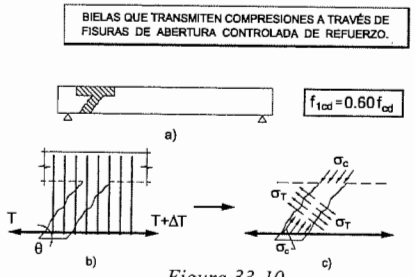


Figura 33-10

La resistencia a considerar en estos casos es

$$f_{1cd} = 0{,}60\, f_{cd} \qquad [33.2]$$

Caso c) **Bielas comprimidas que transmiten compresiones a través de fisuras de abertura no controlada con suficiente armadura transversal** (Efecto de engranamiento despreciable).

Es el caso, por ejemplo, del cortante en las uniones de alas traccionadas al alma en secciones I, (fig. 33-11).

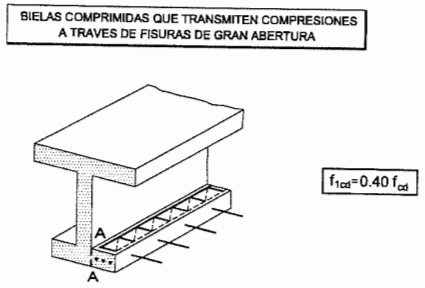


Figura 33-11

La resistencia a considerar en estos casos es

$$f_{1cd} = 0{,}40\, f_{cd} \qquad [33.3]$$

EHE indica valores para muchos casos concretos para $f_{1cd,}$ de acuerdo con lo siguiente:

- Compresión oblicua del alma debida al esfuerzo cortante $0{,}60\, f_{cd}$
- Alas de secciones I, cajón, etc.
  - Alas comprimidas $0{,}60\, f_{cd}$
  - Alas traccionadas $0{,}40\, f_{cd}$
- Compresión oblicua de bielas debida al momento torsor $0{,}30\, f_{cd}$
- Compresión oblicua de bielas debida al punzonamiento $0{,}30\, f_{cd}$
- Casos de compresión uniaxial y cargas concentradas sobre macizos $0{,}85\left(1 - \dfrac{f_{ck}}{250}\right) f_{cd}$
- Comprobación de nudos y bielas en vigas-pared $0{,}70\, f_{cd}$
- Comprobación de nudos y bielas en ménsulas cortas $0{,}70\, f_{cd}$

SCHLAICH, en el trabajo de la referencia (33.11) adopta valores algo diferentes de EHE y también el MODEL CODE 90 adoptó a su vez otros valores.

La Tabla T-33.1 resume estas especificaciones.

TABLA T-33.1

VALORES k DE LA RESISTENCIA A COMPRESIÓN DEL HORMIGÓN EN BIELAS, $f_{1cd} = k\, f_{cd}$

CASO	EHE	MC-90	SCHLAICH
a)	0,70	0,77 / 0,68	0,68
b)	0,60	0,54 / 0,48	0,51
c)	0,40		0,34

Los dos valores indicados para el MC-90, en cada caso corresponden a hormigones H-25 y H-50 respectivamente.

Un punto de interés es el ancho de biela a considerar en el cálculo, cuando existen anchos importantes ocupados por vainas o barras.

- Si la suma de los diámetros de las vainas o barras no supera $\frac{1}{6}$ del ancho de la biela o la suma de sus áreas no supera el 4% del área de la biela, no es necesario realizar ninguna reducción del ancho.
- En caso contrario, se tomará para la biela un ancho reducido

$$b_{red} = b - \eta \Sigma \phi \qquad [33.4]$$

donde

$\eta = 0{,}5$ para armaduras adheridas y tendones inyectados

$\eta = 1{,}2$ para armaduras activas o pasivas no adheridas

b es el ancho mínimo en las diferentes secciones de la biela

La especificación anterior corresponde al MODEL CODE 90. EHE adopta una versión simplificada, eliminando el caso de barras y la limitación del 4%.

33.4.2. TENSIONES DE COMPRESIÓN EN EL HORMIGÓN EN BIELAS CON ARMADURAS COMPRIMIDAS Y/O ARMADURAS DE CONFINAMIENTO

Valen las fórmulas expuestas en el Capítulo 35, tanto para piezas simplemente armadas (Apartado 35.2.1) como para piezas confinadas (Apartado 35.2.3).

En ambos casos, si se pueden establecer las condiciones de compatibilidad, la tensión de cálculo del acero será la resultante de ello, pudiendo alcanzar el valor f_{yd}. En caso contrario la tensión última del acero debe limitarse a 400 N/mm^2.

33.5 COMPROBACIÓN DE LOS CAMPOS DE TENSIONES EN LOS TIRANTES

Su dimensionamiento es inmediato, bajo las reglas siguientes:

a) El baricentro plástico de las armaduras pasivas y activas debe coincidir con el del tirante.

b) La sección $A_s + A_p$ de armaduras pasivas y activas se calcula en estado límite último de acuerdo con lo que se expone para tirantes en el Capítulo 34.

c) No es necesaria la comprobación de fisuración que se hará de acuerdo con 33.7.

d) Es esencial el estudio cuidadoso de las condiciones de anclaje de los tirantes. Este tema lo veremos a continuación al tratar el tema de los nudos.

33.6 DIMENSIONAMIENTO DE LOS NUDOS

La comprobación de los nudos depende esencialmente de su carácter bi o tridimensional y de su estado tensional.

Se entiende como nudo aquella parte de la zona de discontinuidad cuyo volumen es común a las distintas bielas comprimidas convergentes, a los tirantes convergentes en él y a las cargas o reacciones aplicadas sobre esa parte.

El valor máximo de la tensión de compresión de cálculo σ_{cd} en el caso de nudos en los que convergen sólo bielas comprimidas y eventualmente fuerzas de compresión de reacciones o cargas aplicadas, no debe ser superior a $\sigma_{cd} \leq f_{2cd}$ ó $\sigma_{cd} \leq f_{3cd}$ de acuerdo con lo siguiente

$$f_{2cd} = f_{cd}$$

en estados biaxiales de compresión

$$f_{3cd} = 3{,}30\, f_{cd}$$

en estados triaxiales de compresión.

a) **Nudos CCC** (Nudos en que concurren solamente bielas comprimidas).

Los nudos correspondientes a cargas o reacciones se rigen por lo indicado en la figura 33-12 y 33-13.

NUDOS MULTICOMPRIMIDOS (CCC)

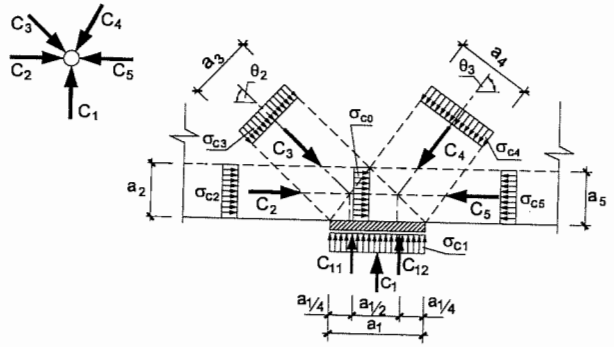


Figura 33-12

NUDOS MULTICOMPRIMIDOS (CC)

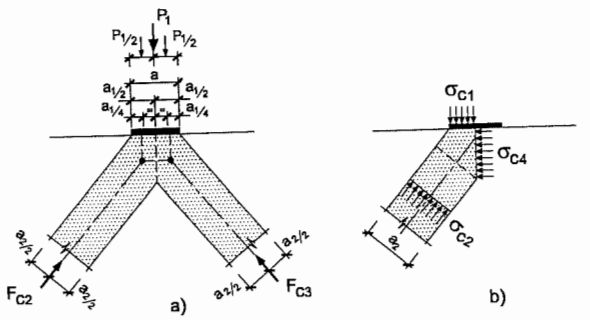


Figura 33-13

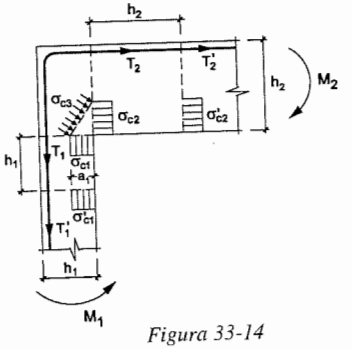


Figura 33-14

b) **Nudos CTT**. La figura 33-14 indica el caso de esquina de pórtico con momentos de cierre. El caso más general y frecuente es el indicado en la figura 33-15, correspondiente a la curva de una barra, con centro en O.

Conocidas las fuerzas de tracción T_1 y T_2 de la barra en las dos direcciones (tema que veremos más adelante), basta (Fig. 33-15) componerlas para tener la resultante R y su dirección, lo cual permite situar el eje $O'A$ de la biela.

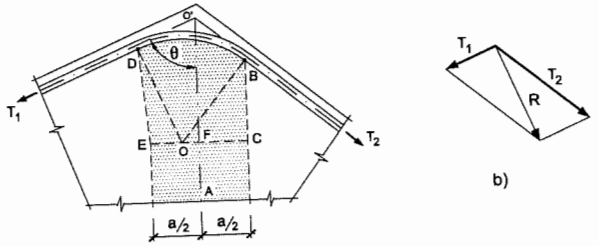


Figura 33-15

Aceptando que las presiones entre hormigón y barra se producen en la generatriz interior de ésta, la paralela a $O'A$ por B determina el semiancho $\frac{a}{2}$ de la biela.

Una construcción aproximada es trazar por O la perpendicular a $O'A$ y con ello se tiene $EF = FC = \frac{a}{2}$ y definida la biela.

c) **Nudos CCT**. Un caso típico es el de las cargas en punta de voladizo o ménsula, tal como se indica en la figura 33-16. El trazado de la biela, la determinación del ancho mínimo y el valor de la compresión son inmediatos, a partir del bloque de compresiones $C_2 = T_2$ (Para la determinación de y_2 y σ_{c2} véanse los Capítulos 36 y 37 y el ejemplo 33.1.)

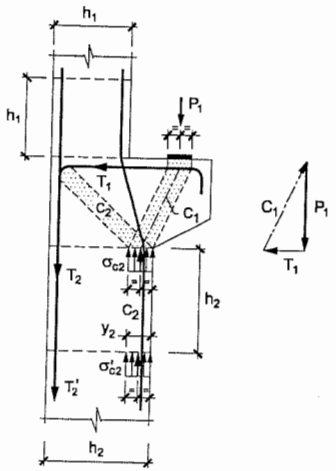


Figura 33-16

33.7 DIMENSIONAMIENTO DE LAS BIELAS

Con lo visto en 33.5 y 33.6 se definen los anchos de la biela en sus extremos y el valor de la compresión, así como el criterio de comprobación de ésta.

Como ejemplo, en la figura 33-17 se indica la definición y comprobación de un nudo de pórtico sometido a carga vertical uniforme sobre el dintel.

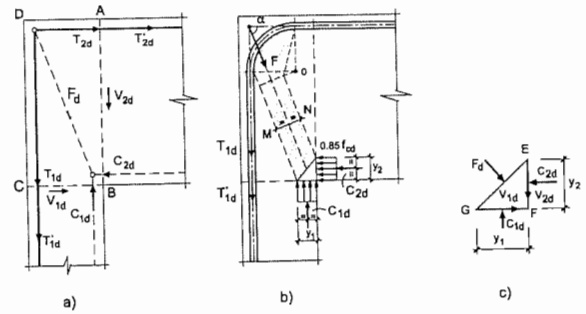


Figura 33-17

El esquema de bielas y tirantes en el nudo se indica en la figura 33-17a). Proyectando las acciones sobre el nudo $ABCD$ sobre directriz del dintel y del pilar, se obtiene

$$T_{2d} - C_{2d} + V_{1d} = 0$$

y con $C_{2d} = T'_{2d}$

$$T_{2d} = T'_{2d} - V_{1d}$$

$$-T_{1d} + C_{1d} - V_{2d} = 0$$

y con $C_{1d} = T'_{1d}$

$$T_{1d} = C_{1d} - V_{2d}$$

$$tg\ \alpha = \frac{T_{1d}}{T_{2d}} = \frac{C_{1d} - V_{2d}}{C_{2d} - V_{1d}}$$

$$F_d = \frac{T_{2d}}{\cos \alpha}$$

(T'_{1d} y T'_{2d} se obtienen directamente a partir del momento actuante en la sección de arranque del dintel),

El nudo CCC está materializado por la cuña EFG (Fig. 33-17c)) y el eje de la biela pasa por el punto medio de EG.

Aplicando el método expuesto en 33.6.b) siendo 0 el centro del arco de curva de la barra, el ancho de biela en esa zona es MN. Definida la biela, las comprobaciones deben realizarse con el ancho mínimo en sentido ortogonal a la biela, que en el caso de la figura es m.

La tensión en la biela resulta por tanto

$$\sigma_{cd} = \frac{F_d}{mb}$$

y de acuerdo con 33.6 $\quad \sigma_{cd} \leq f_{cd}$

Obsérvese que, en general, es obligada la comprobación de la biela en ambos extremos pues el nudo *D* es un nudo *CTT* y el *B* un nudo *CCC*, por lo que los valores límites de sus tensiones de compresión son diferentes.

33.8 COMPROBACIÓN DEL ANCLAJE DE LOS TIRANTES EN LOS NUDOS

Es un punto crítico en el dimensionamiento del nudo, y en general del método de bielas y tirantes.

a) **Caso en que el anclaje puede ser desarrollado por adherencia.** La solución general se indica en las figuras 33-18 y 33-19.

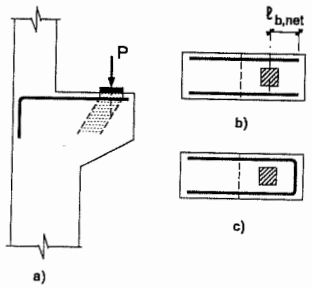


Figura 33-18

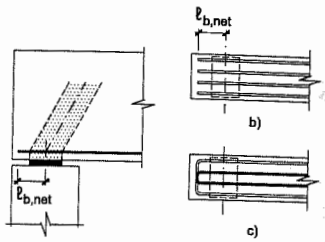


Figura 33-19

Si la longitud $l_{b,net}$ puede conseguirse por prolongación recta, valen las soluciones tipo b). En otro caso, los anclajes tipo c) son necesarios.

Si la armadura presenta problemas de anclaje, una solución es distribuirla en varias capas de redondos finos (Fig. 33-20).

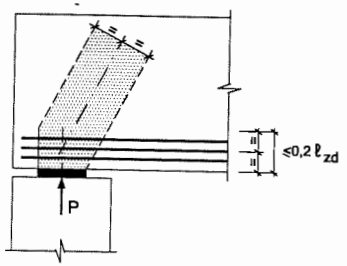


Figura 33-20

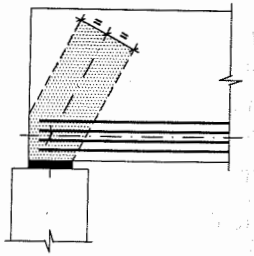


Figura 33-21

En la figura se indica, de acuerdo con lo visto anteriormente, la determinación del ancho de biela. El canto del tirante virtual no debe superar el 20% de la longitud l_{zd} de la zona de discontinuidad, determinada de acuerdo con el principio de Saint-Venant.

Son de aplicación también a este caso las variantes b) o c) de las figuras 33-18 y 33-19, correspondientes a anclaje por prolongación recta o con vuelta.

Un caso siempre estricto es el indicado en la figura 33-21 con armadura distribuida en varias capas pero con muy escaso espacio para desarrollar el anclaje.

Este caso, y los anteriores si es necesario, admiten diversas soluciones tal como se indica en la figura 33-22. (Obsérvese que la solución A, de anclaje con placa soldada ejerce una beneficiosa compresión sobre el nudo). Este caso es análogo al de un anclaje de tendón postesado.

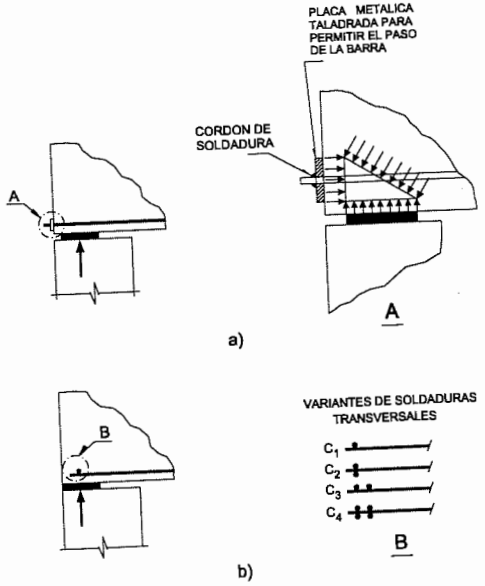


Figura 33-22

En todos los casos anteriores, se ha considerado que las acciones o reacciones concentradas en la zona de los nudos de anclaje eran normales a la pieza y a la dirección del tirante.

Si la carga o reacción es oblicua, como por ejemplo en el caso de apoyos con coacción al movimiento paralelo del apoyo (Fig. 33-23 a)), la resultante de las reacciones sobre el nudo formará un ángulo α con la dirección del tirante, lo cual modifica ligeramente la posición de la biela (Fig. 33-23 c)).

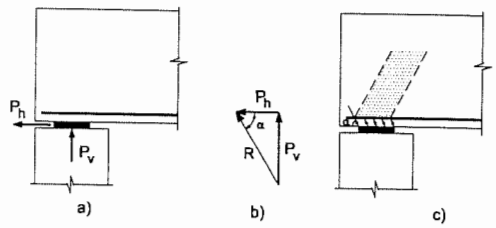


Figura 33-23

Un trabajo importante reciente sobre este tipo de nudos es el de SUNG-GUL HONG y PETER MUELLER (33.12).

Notas importantes:

1. Siempre que exista compresión transversal al anclaje, conviene calcular $l_{b,net}$ con el método del MODEL CODE 90, ya que EHE no cubre este caso (Capítulo 44).
2. El método expuesto en el Capítulo 44 para calcular **simultáneamente** el efecto de anclaje de barras transversales soldadas y de compresiones transversales es de especial interés en estos casos.

33.9 ESQUEMAS BÁSICOS

En la tabla T-33.2 se indican los casos básicos. Para cada caso se incluye el esquema de armado, la red de isostáticas si es conocida y el esquema de bielas y tirantes.

TABLA T-33.2

ESQUEMAS DE BIELAS Y TIRANTES PARA DIVERSOS ELEMENTOS

ESQUEMA DE CARGAS	FLUJO DE TENSIONES	ESQUEMA DE BIELAS, NUDOS Y TIRANTES
① CARGA LOCALIZADA CENTRADA		
② CARGA LOCALIZADA DESCENTRADA		
③ ANCLAJE DE TENDON POSTESADO		

TABLA T-33.2

ESQUEMAS DE BIELAS Y TIRANTES PARA DIVERSOS ELEMENTOS

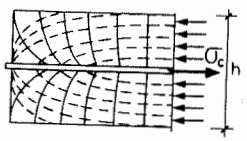
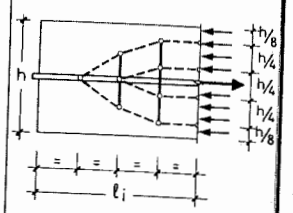
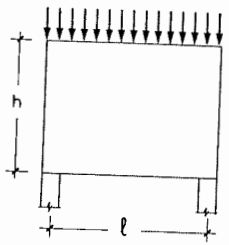
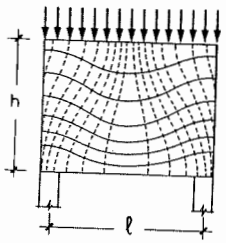
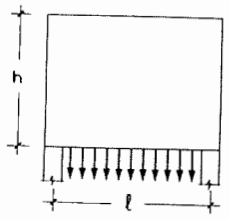
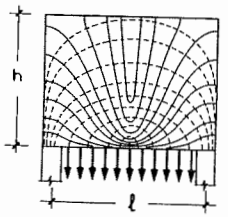
ESQUEMA DE CARGAS	FLUJO DE TENSIONES	ESQUEMA DE BIELAS, NUDOS Y TIRANTES
(4) ANCLAJES		
(5)		
(6)		

TABLA T-33.2

ESQUEMAS DE BIELAS Y TIRANTES PARA DIVERSOS ELEMENTOS

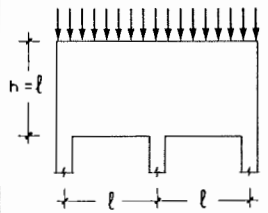
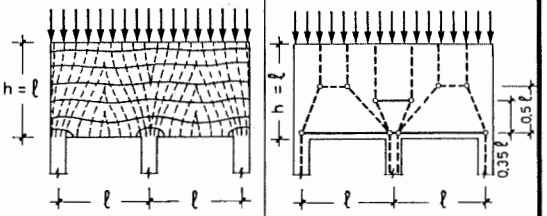
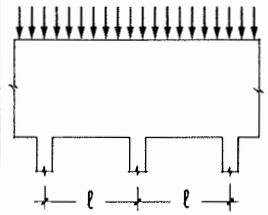
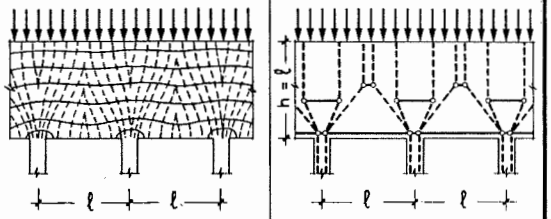
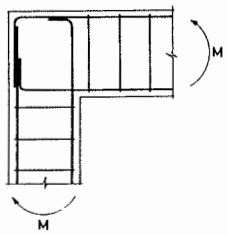
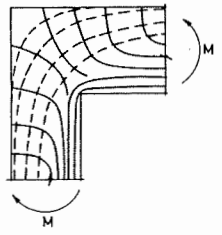
ESQUEMA DE CARGAS	FLUJO DE TENSIONES	ESQUEMA DE BIELAS, NUDOS Y TIRANTES
(7)		
(8)		
(9)		

TABLA T-33.2

ESQUEMAS DE BIELAS Y TIRANTES PARA DIVERSOS ELEMENTOS

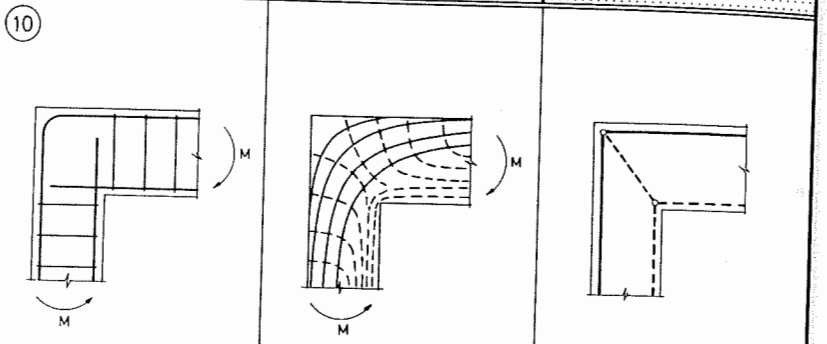
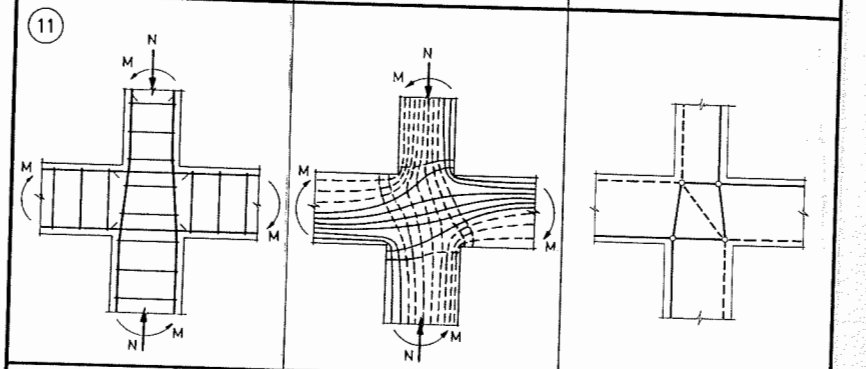
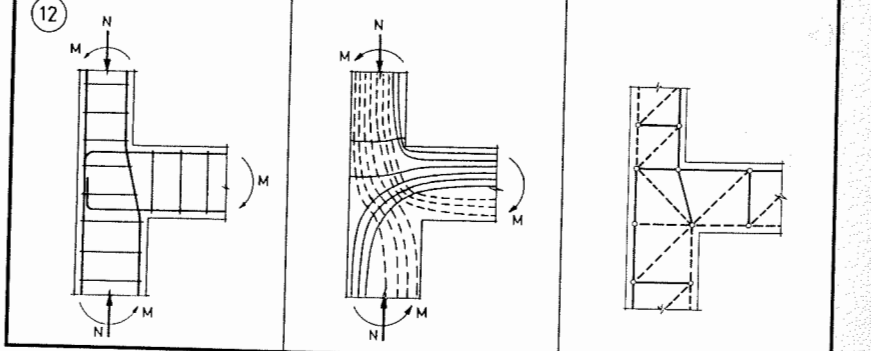
ESQUEMA DE CARGAS	FLUJO DE TENSIONES	ESQUEMA DE BIELAS, NUDOS Y TIRANTES
(10) 		
(11) 		
(12) 		

TABLA T-33.2

ESQUEMAS DE BIELAS Y TIRANTES PARA DIVERSOS ELEMENTOS

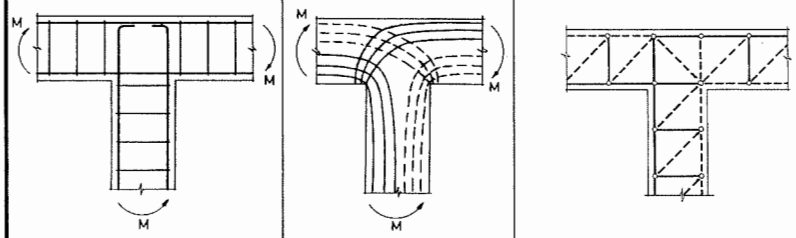
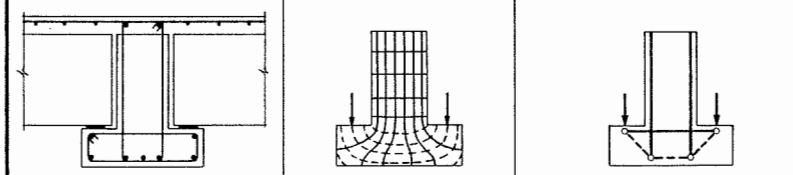
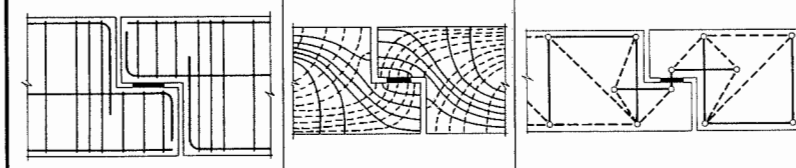
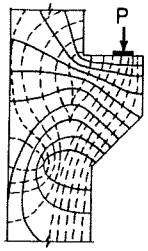
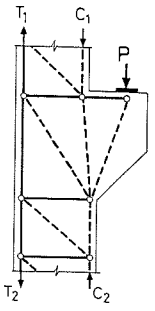
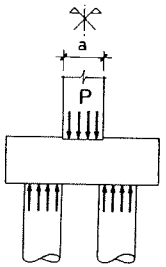
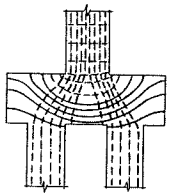
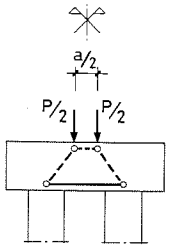
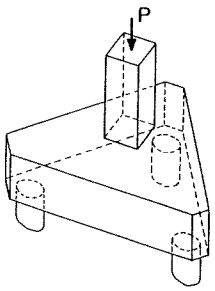
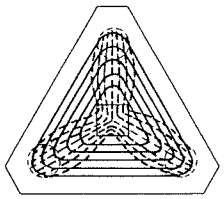
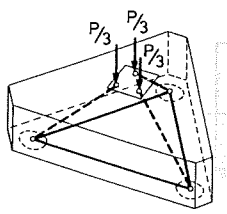
ESQUEMA DE CARGAS	FLUJO DE TENSIONES	ESQUEMA DE BIELAS, NUDOS Y TIRANTES
(13) 		
(14) VIGA T INVERTIDA 		
(15) APOYO A MEDIA MADERA 		

TABLA T-33.2

ESQUEMAS DE BIELAS Y TIRANTES PARA DIVERSOS ELEMENTOS

ESQUEMA DE CARGAS	FLUJO DE TENSIONES	ESQUEMA DE BIELAS, NUDOS Y TIRANTES
(16) CARGA PUNTUAL EN MÉNSULA CORTA			
(17) ENCEPADO DE DOS PILOTES			
(18) ENCEPADO DE TRES PILOTES			

EJEMPLO 33.1. Sea la ménsula de la figura destinada a soportar las acciones de cálculo $F_{vd} = 1000\ kN$ y $F_{hd} = 100\ kN$ (Fig. 33-24) procedentes de las reacciones de un puente grúa. Se emplea hormigón H-35 y acero B 400 S. Se desea dimensionar la armadura y comprobar la ménsula por el método de bielas y tirantes.

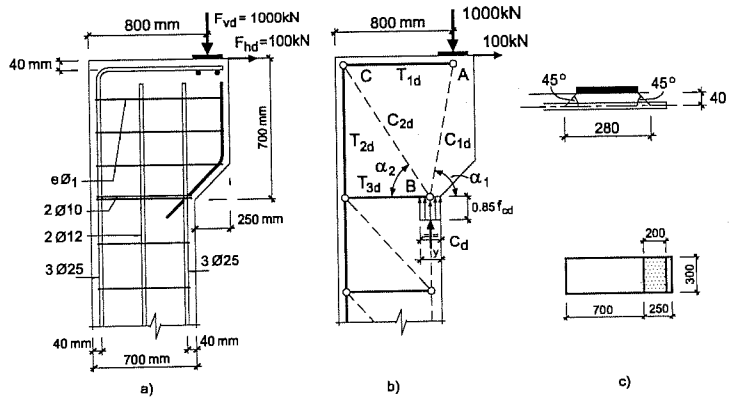


Figura 33-24

SOLUCIÓN. El esquema de armado se indica en la figura 33-24a). El esquema de bielas y tirantes en la 33-24b).

Dimensionando en primer lugar el pilar, inmediatamente por debajo de la ménsula, la sección de 700 · 300 mm se encuentra sometida a unos esfuerzos

$$M_d = -1000 \cdot 0{,}45 - 100 \cdot 0{,}70 = -520\ mkN$$

$$N_d = 1000\ kN$$

El dimensionamiento en flexión compuesta conduce a una armadura simétrica de 3 ϕ 25 en cada cara más 2 ϕ 12 de montaje. La profundidad del bloque rectangular es $y = 168$ mm.

Con las notaciones de la figura 33-24b), es inmediato obtener

$$\text{tg}\,\alpha_1 = \frac{660}{100 + \frac{168}{2}} = 3{,}59 \qquad \alpha_1 = 74{,}4°$$

$$\text{tg}\,\alpha_2 = \frac{660}{700 - 40 - \frac{168}{2}} = 1.146 \qquad \alpha_2 = 48{,}9°$$

Estableciendo el equilibrio en el nudo A

$$C_{1d} \cdot sen\ \alpha_1 = 1000 \qquad C_{1d} = 1038\ kN$$
$$100 + C_{1d}\ cos\ \alpha_1 = T_{1d} \qquad T_{1d} = 379\ kN$$
$$C_{2d}\ cos\ \alpha_2 = T_{1d} \qquad C_{2d} = 577\ kN$$
$$C_{2d}\ sen\ \alpha_2 = T_{2d} \qquad T_{2d} = 435\ kN$$

La proyección horizontal de fuerzas en el nudo B conduce a

$$T_{3d} = C_{2d}\ cos\ \alpha_2 - C_{1d}\ cos\ \alpha_1 = 100\ kN$$

Disponemos 2 estribos ϕ 10 de dos ramas.

Con $T_{2d} = 435.000$ N $A_s = \dfrac{435.000}{400/1{,}15} = 1.251\ mm^2 \approx 3\phi\ 25$ que se mantienen hasta el extremo de la ménsula.

(El tirante AC requiere menos armadura).

El anclaje del tirante AC, como no se puede desarrollar por adherencia por falta de espacio, se resuelve con dos travesaños soldados ϕ 25 que anclan la capacidad mecánica total. (Véase el Capítulo 44).

Comprobación de bielas

- Compresión bajo la placa de acero

$$\sigma_{cd} = \frac{1000000}{200 \cdot 300} = 16{,}7\ N/mm^2$$

Sobradamente admisible (Véase el Capítulo 60).

- Compresión en la biela AB

En el extremo A:

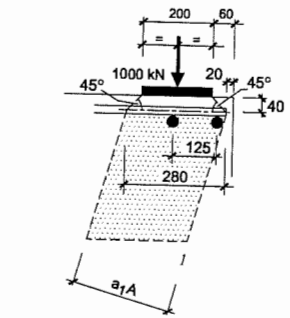


Figura 33-25

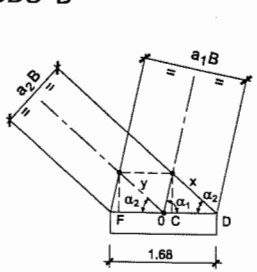


Figura 33-26

$$a_{1A} = 280 \cdot sen\ 74{,}4° = 270\ mm$$

$$\sigma_{cd,1A} = \frac{1038000}{270 \cdot 300} = 12{,}8\ N/mm^2$$

Como es un nudo CCT $\sigma_{cd} \le 0{,}70 \cdot f_{cd} = 16{,}3\ N/mm^2$, luego es válida la comprobación.

En el extremo B: De acuerdo con la figura 33-26

$$a_{1B} = 168\ sen\ \alpha_1 = 162\ mm$$

$$\sigma_{cd,1B} = \frac{1038000}{162 \cdot 300} = 21{,}4\ N/mm^2$$

Como es un nudo CCC, $\sigma_{cd} \le f_{cd} = 23{,}3\ N/mm^2$ que se cumple.

- Compresión en la biela *BC*

En el extremo C el nudo se indica en la figura 33-27. El radio de la armadura es el mínimo permitido, de 10 ϕ. De acuerdo con la construcción indicada en 33.6.b), es inmediato deducir (Fig. 33-27) que $PQ = 171\ mm$ y por tanto el ancho de la biela es $2\ PQ = 342\ mm$.

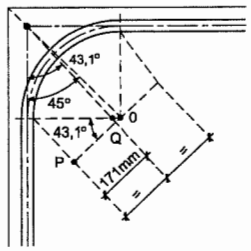


Figura 33-27

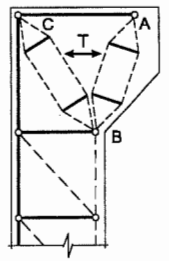


Figura 33-28

$$\sigma_{cd} = \frac{408000}{342 \cdot 300} = 4\ N/mm^2$$

Como es nudo CCT $\sigma_{cd} \le 0{,}70\ f_{cd}$, lo que se cumple sobradamente.

En el extremo B, volviendo a la figura 33-26,

$$a_{2B} = 168\ sen\ \alpha_2 = 123\ mm$$

$$\sigma_{cd} = \frac{408000}{123 \cdot 300} = 11\ N/mm^2$$

lo que resulta sobradamente admisible.

Si se observa con detenimiento el flujo real de tensiones en el modelo de bielas y tirantes, la situación sería la indicada en la figura 33-28. Las bielas *AB* y *BC* presentan tracciones ortogonales a su directriz, que en definitiva anuncian la existencia de tracciones *T* sensiblemente paralelas al borde superior de la ménsula, que deberán ser resistidas con una armadura horizontal no proporcionada por el valor T_{1d} del tirante *AC* y que además debe repartirse en una cierta fracción del canto de la ménsula. (Estribos ϕ_1 en la Fig. 33-24a)). Volveremos sobre ello en el Capítulo 60.

Hemos elegido este caso como ejemplo, porque indica claramente las ventajas del Método de Bielas y Tirantes, pero también la necesidad de una detenida reflexión en su aplicación.

BIBLIOGRAFÍA

(33.1) MÖRSCH, E. "Der eisenbeton. Seine theorie und auwendung". Wittwer. Sttutgart. 1908. (Hay traducción española de INTEMAC, 1995).

(33.2) RITTER, W. "Constructions techniques de Hennebique". Schweizerische Bauzeitung. Zurich. Feb. 1899.

(33.3) LEONHARDT, F. "Reducing the Shear Reinforcement in Reinforced Concrete Beams and Slabs". Magazine of Concrete Research, V. 17, Nº 53. Diciembre 1965.

(33.4) RÜSCH, H. "Über die Grenzen der Anwendbarkeit der Fachwerkanalogie bei der Berechnung der Schubfestigkeit von Stahlbetonbalken" (On the Limitations of Applicability of the Truss Analogy for the Shear Design of Reinforced Concrete Beams). Festschrift F. Campus "Amici et Alumni", Universidad de Lieja. 1964.

(33.5) KUPFER, H. "Erweiterung der Mörsch'-schen Fachwerkanalogie mit Hilfe des Prinzips vom Minimum der Formänderungsarbeit" (Expansion of Mörsch's Truss Analogy by Application of the Principle of Minimum Strain Energy). CEB Bulletin 40. París. 1964.

(33.6) THÜRLIMANN, B.; MARTI, P.; PRALONG, J.; RITZ, P. y ZIMMERLI, B. "Vorlesung zum Fortbildungskurs für Bauingenieure" (Advanced Lecture for Civil Engineers). Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH. Zurich. 1983.

(33.7) MUELLER, P. "Plastische Berechnung von Stahlbetonscheiben und Balken" (Plastic Analysis of Reinforced Concrete Deep Beams and Beams). Bericht n° 83. Institutut für Baustatik und Konstruktion, ETH. Zurich. Julio 1978.

(33.8) MARTI, P. "Basic Tools of Reinforced Concrete Beam Design". ACI Journal, V.82, Nº 1. Enero-Febrero 1985.

(33.9) COLLINS, M.P. y MITCHELL, D. "Shear and Torsion Design of Prestressed and Nonprestressed Concrete Beams". PCI Journal, V. 25, Nº 5. Septiembre-Octubre 1980.

(33.10) SCHLAICH, J. y WEISCHEDE, D. "Ein praktisches Verfahren zum methodischen Bemessen und Konstruieren im Stahlbetonbau" (A Practical Method for the Design and Detailing of Structural Concrete). Bulletin d'Information Nº 150, Comité Euro-International du Béton. París. Marzo 1982.

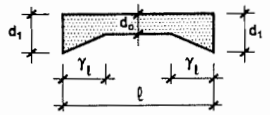
(33.11) SCHLAICH, J.; SCHÄFER, K. y JENNEWEIN, M. "Toward a Consistent Design of Structural Concrete". PCI Journal. Mayo-Junio 1987.

(33.12) SUNG GUL HONG; MUELLER, P. "Truss Model and Failure Mechanism for Bar Development in C-C-T Nodes". ACI Structural Journal. Sept-Oct. 1996.

GRÁFICOS Y TABLAS GT

GT-1. RIGIDECES EN PIEZAS DE SELECCIÓN

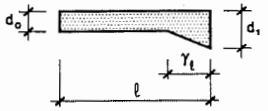
PIEZA CON CARTELAS SIMÉTRICAS Y ANCHO CONSTANTE



$$\frac{I_0}{I_1} = \frac{d_0^3}{d_1^3} \qquad K = \alpha \frac{EI}{L}$$

γ	VALOR DEL COEFICIENTE α SIENDO I_0/I_1											
	1,00	0,80	0,60	0,40	0,30	0,20	0,10	0,08	0,06	0,04	0,03	0,02
0,05	4,00	4,10	4,22	4,37	4,47	4,58	4,74	4,78	4,83	4,89	4,93	4,97
0,10	4,00	4,20	4,44	4,76	4,98	5,26	5,66	5,78	5,91	6,08	6,19	6,32
0,15	4,00	4,28	4,65	5,17	5,53	6,04	6,81	7,06	7,34	7,67	7,95	8,27
0,20	4,00	4,36	4,85	5,58	6,12	6,90	8,25	8,66	9,20	9,91	10,4	11,0
0,25	4,00	4,43	5,03	5,97	6,74	7,83	10,0	10,6	11,7	12,9	13,9	15,0
0,30	4,00	4,49	5,20	6,35	7,30	8,81	11,9	13,0	15,0	17,0	18,7	21,2
0,35	4,00	4,54	5,35	6,70	7,76	9,79	14,1	15,7	18,5	22,0	25,0	29,6
0,40	4,00	4,59	5,48	7,02	8,22	10,7	16,3	18,7	22,1	28,0	33,1	41,7
0,45	4,00	4,63	5,59	7,30	8,70	11,5	18,1	21,5	25,9	34,2	42,4	55,3
0,50	4,00	4,67	5,69	7,56	9,25	12,3	20,4	24,0	29,7	40,3	50,0	68,3

PIEZA CON UNA CARTELA Y ANCHO CONSTANTE

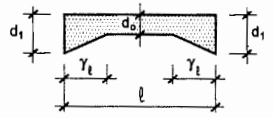


$$K = \alpha \frac{EI}{L}$$

	γ	VALOR DEL COEFICIENTE α SIENDO I_0/I_1											
		1,00	0,80	0,60	0,40	0,30	0,20	0,10	0,08	0,06	0,04	0,03	0,02
FRONTAL (K_f)	0,05	4,00	4,08	4,18	4,29	4,36	4,45	4,57	4,60	4,63	4,68	4,70	4,73
	0,10	4,00	4,16	4,35	4,59	4,75	4,93	5,22	5,29	5,38	5,48	5,55	5,63
	0,15	4,00	4,23	4,51	4,90	5,15	5,47	5,96	6,09	6,27	6,44	6,58	6,73
	0,20	4,00	4,29	4,67	5,20	5,56	6,05	6,80	7,01	7,31	7,60	7,81	8,07
	0,25	4,00	4,35	4,82	5,49	5,97	6,65	7,74	8,06	8,47	8,93	9,29	9,71
	0,30	4,00	4,41	4,95	5,78	6,63	7,27	8,77	9,23	9,80	10,6	11,1	11,7
	0,40	4,00	4,49	5,19	6,31	7,19	8,54	11,1	11,9	13,1	14,6	15,7	17,2
	0,50	4,00	4,56	5,39	6,76	7,90	9,76	13,6	15,0	17,0	19,8	22,0	25,1
	0,75	4,00	4,67	5,69	7,52	9,16	12,1	19,3	22,4	27,1	35,2	42,3	54,5
	1,00	4,00	4,73	5,87	7,99	9,94	13,6	23,2	27,5	34,3	47,1	59,1	81,8
DORSAL (K_d)	0,05	4,00	4,02	4,04	4,07	4,09	4,11	4,13	4,14	4,15	4,16	4,16	4,17
	0,10	4,00	4,04	4,08	4,13	4,17	4,21	4,27	4,28	4,30	4,32	4,34	4,35
	0,15	4,00	4,05	4,11	4,19	4,24	4,31	4,40	4,43	4,46	4,50	4,52	4,56
	0,20	4,00	4,06	4,13	4,24	4,31	4,40	4,53	4,57	4,64	4,68	4,71	4,75
	0,25	4,00	4,07	4,15	4,28	4,36	4,48	4,66	4,71	4,80	4,86	4,91	4,97
	0,30	4,00	4,07	4,17	4,31	4,41	4,55	4,78	4,84	4,93	5,04	5,11	5,20
	0,40	4,00	4,08	4,19	4,36	4,48	4,66	4,98	5,08	5,21	5,38	5,50	5,66
	0,50	4,00	4,09	4,20	4,38	4,52	4,73	5,12	5,26	5,43	5,68	5,86	6,10
	0,75	4,00	4,12	4,27	4,50	4,67	4,93	5,42	5,58	5,81	6,17	6,44	6,87
	1,00	4,00	4,23	4,55	5,05	5,44	6,06	7,28	7,74	8,37	9,36	10,1	11,4

GT-2 CÁLCULO DE FACTORES DE TRANSMISIÓN EN PIEZAS ACARTELADAS

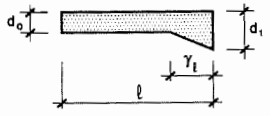
PIEZA CON CARTELAS SIMÉTRICAS Y ANCHO CONSTANTE



$$\frac{I_0}{I_1} = \frac{d_0^3}{d_1^3}$$

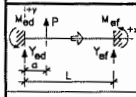
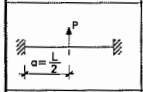
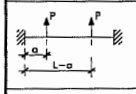
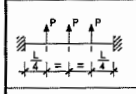
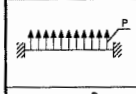
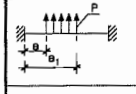
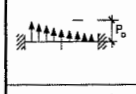
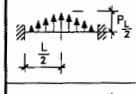
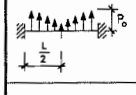
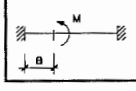
γ	VALOR DEL FACTOR DE TANSMISIÓN SIENDO I_0/I_1											
	1,00	0,80	0,60	0,40	0,30	0,20	0,10	0,08	0,06	0,04	0,03	0,02
0,05	0,50	0,51	0,52	0,53	0,53	0,54	0,55	0,55	0,55	0,56	0,56	0,56
0,10	0,50	0,51	0,53	0,55	0,56	0,57	0,59	0,60	0,61	0,61	0,61	0,62
0,15	0,50	0,51	0,54	0,57	0,58	0,60	0,63	0,64	0,65	0,66	0,67	0,68
0,20	0,50	0,52	0,55	0,58	0,60	0,63	0,67	0,68	0,69	0,71	0,72	0,73
0,25	0,50	0,52	0,55	0,59	0,62	0,65	0,70	0,71	0,73	0,75	0,76	0,77
0,30	0,50	0,52	0,56	0,60	0,63	0,67	0,72	0,74	0,76	0,78	0,80	0,81
0,35	0,50	0,52	0,56	0,60	0,63	0,68	0,74	0,75	0,77	0,80	0,82	0,84
0,40	0,50	0,52	0,56	0,60	0,63	0,67	0,74	0,76	0,78	0,81	0,83	0,86
0,45	0,50	0,52	0,,55	0,59	0,62	0,66	0,73	0,75	0,77	0,80	0,82	0,85
0,50	0,50	0,52	0,55	0,58	0,61	0,65	0,71	0,73	0,75	0,78	0,81	0,83

PIEZA CON UNA CARTELA Y ANCHO CONSTANTE

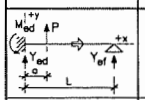
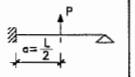
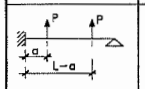
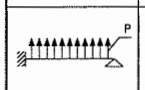
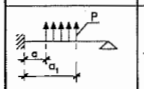
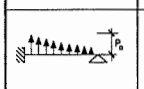
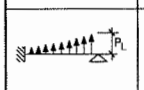
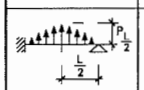
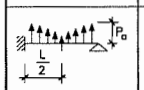
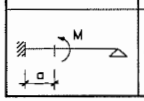


	γ	VALOR DEL FACTOR DE TRANSMISIÓN SIENDO I_0/I_1											
		1,00	0,80	0,60	0,40	0,30	0,20	0,10	0,08	0,06	0,04	0,03	0,02
IZQUIERDO	0,05	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50
	0,10	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,49	0,49	0,49	0,49	0,49	0,49	0,49
	0,15	0,50	0,50	0,50	0,50	0,49	0,49	0,48	0,48	0,48	0,48	0,48	0,48
	0,20	0,50	0,50	0,49	0,49	0,48	0,48	0,47	0,47	0,47	0,47	0,47	0,46
	0,25	0,50	0,49	0,49	0,48	0,48	0,47	0,46	0,46	0,46	0,45	0,45	0,45
	0,30	0,50	0,49	0,48	0,47	0,47	0,46	0,45	0,44	0,44	0,43	0,43	0,43
	0,40	0,50	0,49	0,47	0,46	0,45	0,43	0,41	0,41	0,40	0,39	0,39	0,38
	0,50	0,50	0,48	0,46	0,44	0,42	0,40	0,38	0,37	0,36	0,35	0,34	0,34
	0,75	0,50	0,47	0,44	0,40	0,38	0,34	0,30	0,28	0,27	0,25	0,24	0,22
	1,00	0,50	0,47	0,44	0,40	0,37	0,33	0,28	0,26	0,24	0,22	0,20	0,18
DERECHO	0,05	0,50	0,51	0,52	0,53	0,53	0,54	0,55	0,55	0,56	0,56	0,56	0,56
	0,10	0,50	0,51	0,53	0,55	0,56	0,58	0,60	0,61	0,62	0,62	0,63	0,63
	0,15	0,50	0,52	0,54	0,57	0,59	0,62	0,65	0,66	0,68	0,69	0,70	0,71
	0,20	0,50	0,53	0,56	0,60	0,62	0,66	0,71	0,72	0,74	0,76	0,77	0,79
	0,25	0,50	0,53	0,57	0,61	0,65	0,69	0,76	0,78	0,80	0,83	0,85	0,87
	0,30	0,50	0,53	0,58	0,63	0,68	0,73	0,82	0,84	0,87	0,91	0,93	0,96
	0,40	0,50	0,54	0,59	0,66	0,72	0,79	0,92	0,96	1,00	1,07	1,15	1,16
	0,50	0,50	0,54	0,60	0,68	0,74	0,83	1,00	1,06	1,13	1,22	1,30	1,38
	0,75	0,50	0,54	0,59	0,67	0,73	0,84	1,06	1,14	1,25	1,42	0,56	1,77
	1,00	0,50	0,53	0,57	0,63	0,67	0,75	0,88	0,93	1,00	1,10	1,18	1,30

GT-3 PIEZA RECTA RÍGIDAMENTE EMPOTRADA EN SUS EXTREMOS DE SECCIÓN (EI) CONSTANTE. REACCIONES

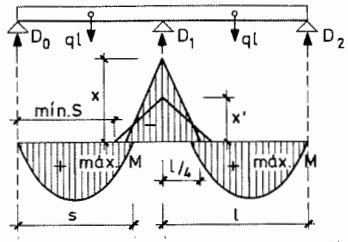
TIPO DE CARGA	M_{ed}	M_{ef}	Y_{ed}	Y_{ef}
	$-P_o\left(1-\frac{P}{12}^2\right)$	$P\frac{a^2}{L}\left(1-\frac{a}{L}\right)$	$-P\left[1-\frac{a^2}{L^2}\left(3-2\frac{a}{L}\right)\right]$	$-P\frac{a^2}{L^2}\left(3-2\frac{a}{L}\right)$
	$-P\frac{L}{8}$	$P\frac{L}{8}$	$-\frac{P}{2}$	$-\frac{P}{2}$
	$-P\left(1-\frac{a}{L}\right)a$	$P\left(1-\frac{a}{L}\right)a$	$-P$	$-P$
	$-P\frac{5L}{16}$	$P\frac{5L}{16}$	$-P\frac{3}{2}$	$-P\frac{3}{2}$
	$-P\frac{L^2}{12}$	$P\frac{L^2}{12}$	$-P\frac{L}{2}$	$-P\frac{L}{2}$
	$\frac{P}{12}\left[3(a_1^2-a^2)(2+\frac{a_1^2+a^2}{L^2})-8\frac{a_1^3+a^3}{L}\right]$	$\frac{P}{12}\left(4\frac{a_1^3-a^3}{L}-3\frac{a_1^4-a^4}{L^2}\right)$	$-\frac{P}{2L^2}\left[2(a_1-a)L^2+\frac{a_1^4-a^4}{L}-2(a_1^3-a^3)\right]$	$-\frac{P}{2L^2}\left[2(a_1^3-a^3)-\frac{a_1^4-a^4}{L}\right]$
	$-P_o\frac{L^2}{20}$	$P_o\frac{L^2}{30}$	$-P_o\frac{7L}{20}$	$-P_o\frac{3L}{20}$
	$-P_{\frac{L}{2}}\frac{5L^2}{96}$	$P_{\frac{L}{2}}\frac{5L^2}{96}$	$-P_{\frac{L}{2}}\frac{L}{4}$	$-P_{\frac{L}{2}}\frac{L}{4}$
	$-P_o\frac{L^2}{32}$	$P_o\frac{L^2}{32}$	$-P_o\frac{L}{4}$	$-P_o\frac{L}{4}$
	$-M\left(1-\frac{a}{L}\left(4-3\frac{a}{L}\right)\right)$	$M\frac{a}{L}\left(2-3\frac{a}{L}\right)$	$M\frac{6_a}{L^2}\left(1-\frac{a}{L}\right)$	$-M\frac{6_a}{L^2}\left(1-\frac{a}{L}\right)$

GT-4 PIEZA RECTA RÍGIDAMENTE EMPOTRADA EN UN EXTREMO Y ARTICULADA EN EL OTRO, SECCIÓN (EI) CONSTANTE. REACCIONES

TIPO DE CARGA	M_{ed}	Y_{ed}	Y_{ef}
	$-P\frac{a}{2}\left[2-\frac{a}{L}\left(3-\frac{a}{L}\right)\right]$	$-P\left[1-\frac{a^2}{2L^2}\left(3-\frac{a}{L}\right)\right]$	$-P\frac{a^2}{2L^2}\left(3-\frac{a}{L}\right)$
	$-P\frac{3L}{16}$	$-P\frac{11}{16}$	$-P\frac{5}{16}$
	$-P\frac{3a}{2}\left(1-\frac{a}{L}\right)$	$-\frac{P}{2}\left[2+3\frac{a}{L}\left(1-\frac{a}{L}\right)\right]$	$-\frac{P}{2}\left[2-3\frac{a}{L}\left(1-\frac{a}{L}\right)\right]$
	$-P\frac{L^2}{8}$	$-P\frac{5L}{8}$	$-P\frac{3L}{8}$
	$-\frac{P}{8}\left[4(a_1^2-a^2)-4\frac{a_1^3-a^3}{L}+\frac{a_1^4-a^4}{L^2}\right]$	$-\frac{P}{8}\left[8(a_1-a)-4\frac{a_1^3-a^3}{L^2}+\frac{a_1^4-a^4}{L^3}\right]$	$-\frac{P}{8}\left(4\frac{a_1^3-a^3}{L^2}+\frac{a_1^4-a^4}{L^3}\right)$
	$P_o\frac{L^2}{15}$	$-P_o\frac{2L}{5}$	$-P_o\frac{L}{10}$
	$-P_L\frac{7L^2}{120}$	$-P_L\frac{9L}{40}$	$-P_L\frac{11L}{40}$
	$-P_{\frac{L}{2}}\frac{5L^2}{64}$	$P_{\frac{L}{2}}\frac{21L}{64}$	$-P_{\frac{L}{2}}\frac{11L}{64}$
	$-P_o\frac{3L^2}{64}$	$-P_o\frac{19L}{64}$	$-P_o\frac{13L}{64}$
	$-\frac{M}{2}\left[2-3\frac{a}{L}\left(2-\frac{a}{L}\right)\right]$	$M\frac{3a}{2L^2}\left(2-\frac{a}{L}\right)$	$-M\frac{3a}{2L^2}\left(2-\frac{a}{L}\right)$

GT-5 FORJADO CONTINUO DE DOS TRAMOS CON CARGA UNIFORME qℓ

Luces ℓ y momentos de inercia J iguales para los dos tramos; g = carga permanente; p = carga variable; $q = g + p$; $\lambda = g/q$



$$X = -\frac{1}{8} q\ell^2 \qquad \text{máx } M = +\frac{q\ell^2}{m}$$

Para carga total de ambos tramos: $D_0 = 0{,}375\ q\ell$; $D_1 = 1{,}25\ q\ell$

$\lambda = g/q$	s	m	mín s para el apoyo tipo	
			a	b
1	2	3	4	5
0,00	0,87 ℓ	10,45	0,00 ℓ	0,00 ℓ
0,10	0,86 ℓ	10,75	0,00 ℓ	0,19 ℓ
0,20	0,85 ℓ	11,07	0,25 ℓ	0,50 ℓ
0,30	0,84 ℓ	11,40	0,46 ℓ	0,60 ℓ
0,40	0,82 ℓ	11,75	0,56 ℓ	0,66 ℓ
0,50	0,81 ℓ	12,12	0,62 ℓ	0,69 ℓ
0,60	0,80 ℓ	12,50	0,67 ℓ	0,71 ℓ
0,70	0,79 ℓ	12,90	0,70 ℓ	0,72 ℓ
0,80	0,77 ℓ	13,32	0,72 ℓ	0,73 ℓ
0,90	0,76 ℓ	13,76	0,74 ℓ	0,74 ℓ
1,00	0,75 ℓ	14,22	0,75 ℓ	0,75 ℓ

Para los momentos mínimos:

Tipo de apoyo *a*: Forjados apoyados sobre mampostería:

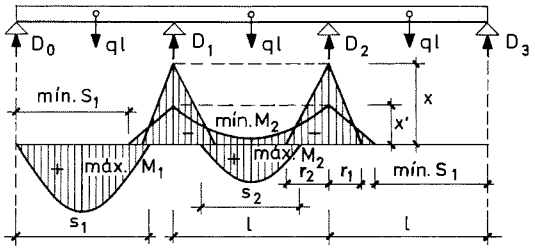
$$X' = -\frac{1}{16}\ell^2\ (2\ g + p)$$

Tipo de apoyo *b*: Forjados rígidamente unidos a vigas de hormigón armado:

$$X' = -\frac{1}{16}\ell^2\ (2\ g + \frac{1}{2}\ p)$$

GT-6 FORJADO CONTINUO DE TRES TRAMOS CON CARGAS IGUALES qℓ

Luces ℓ iguales; momentos de inercia J iguales para todos los tramos; g = carga permanente; p = carga variable; $q = g + p$; $\lambda = g/q$



$$X = \frac{q\ell^2}{m_x} \qquad \text{máx } M_1 = \frac{q\ell^2}{m_1} \qquad \text{máx } M_2 = \frac{q\ell^2}{m_2}$$

Para carga total de todos los tramos: $D_0 = 0{,}4\ q\ell$; $D_1 = 1{,}1\ q\ell$

$\lambda = g/q$	s_1	m_1	m_x	s_2	m_2	mín s_1 para el apoyo tipo a	mín s_1 para el apoyo tipo b
1	2	3	4	5	6	7	8
0,00	0,90 ℓ	9,88	8,57	0,77 ℓ	13,33	0,00 ℓ	0,00 ℓ
0,10	0,89 ℓ	10,19	8,70	0,74 ℓ	14,28	0,00 ℓ	0,35 ℓ
0,20	0,88 ℓ	10,33	8,82	0,72 ℓ	15,38	0,40 ℓ	0,60 ℓ
0,30	0,87 ℓ	10,57	8,95	0,69 ℓ	16,67	0,57 ℓ	0,68 ℓ
0,40	0,86 ℓ	10,82	9,09	0,66 ℓ	18,18	0,65 ℓ	0,72 ℓ
0,50	0,85 ℓ	11,07	9,23	0,63 ℓ	20,00	0,70 ℓ	0,75 ℓ
0,60	0,84 ℓ	11,34	9,37	0,60 ℓ	22,22	0,73 ℓ	0,77 ℓ
0,70	0,83 ℓ	11,61	9,52	0,58 ℓ	24,00	0,76 ℓ	0,78 ℓ
0,80	0,82 ℓ	11,90	9,68	0,58 ℓ	24,00	0,77 ℓ	0,79 ℓ
0,90	0,81 ℓ	12,19	9,84	0,58 ℓ	24,00	0,79 ℓ	0,79 ℓ
1,00	0,80 ℓ	12,50	10,00	0,58 ℓ	24,00	0,80 ℓ	0,80 ℓ

Para los momentos mínimos: $r_1 = 0{,}220\ \ell$; $r_2 = 0{,}265\ \ell$

Tipo de apoyo *a*: Forjados sobre mampostería:

$$X' = -\frac{1}{20}\,\ell^2\,(2\,g + p)$$

Tipo de apoyo *b*: Forjados rígidamente unidos a vigas de hormigón armado:

$$X' = \frac{-1}{20}\,\ell^2\left(2\,g + \frac{1}{2}\,p\right)$$

Para los tres tipos de apoyo :

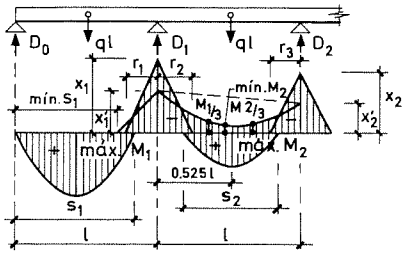
$$\text{mín}\quad M_2 = \frac{1}{8}\,g\ell^2 + X' \quad .$$

En los tercios del segundo tramo:

$$M_2 = \frac{1}{9}\,g\ell^2 + X'$$

GT-7 FORJADO CONTINUO DE CUATRO TRAMOS CON CARGAS IGUALES qℓ

Luces ℓ iguales; momentos de inercia iguales para todos los tramos; g = carga permanente; p = carga variable; $q = g + p$; $\lambda = g/q$



$$X_1 = \frac{q\ell^2}{m_{1x}} \qquad X_2 = \frac{q\ell^2}{m_{2x}} \qquad \text{máx } M_1 = \frac{q\ell^2}{m_1} \qquad \text{máx } M_2 = \frac{q\ell^2}{m_2}$$

Para carga total de todos los tramos: $D_0 = 0{,}393\ q\ell$; $D_1 = 1{,}143\ q\ell$; $D_2 = 0{,}928\ q\ell$

$\lambda = g/q$	s_1	m_1	m_{1x}	m_2	m_{2x}	s_2	mín s_1 para el apoyo tipo a	mín s_1 para el apoyo tipo b
1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,00	0,89 ℓ	10,04	8,30	12,40	9,33	0,80 ℓ	0,00 ℓ	0,00 ℓ
0,10	0,88 ℓ	10,28	8,39	13,14	9,65	0,78 ℓ	0,00 ℓ	0,30 ℓ
0,20	0,87 ℓ	10,53	8,48	13,96	10,00	0,76 ℓ	0,36 ℓ	0,57 ℓ
0,30	0,86 ℓ	10,80	8,58	14,87	10,37	0,73 ℓ	0,53 ℓ	0,66 ℓ
0,40	0,85 ℓ	11,07	8,68	15,92	10,76	0,71 ℓ	0,62 ℓ	0,70 ℓ
0,50	0,84 ℓ	11,36	8,78	17,12	11,20	0,68 ℓ	0,68 ℓ	0,73 ℓ
0,60	0,83 ℓ	11,65	8,89	18,52	11,66	0,66 ℓ	0,71 ℓ	0,75 ℓ
0,70	0,82 ℓ	11,96	8,99	20,17	12,17	0,63 ℓ	0,74 ℓ	0,76 ℓ
0,80	0,81 ℓ	12,28	9,10	22,14	12,73	0,60 ℓ	0,76 ℓ	0,77 ℓ
0,90	0,80 ℓ	12,61	9,22	24,00	13,33	0,58 ℓ	0,77 ℓ	0,78 ℓ
1,00	0,79 ℓ	12,96	9,33	24,00	14,00	0,58 ℓ	0,79 ℓ	0,79 ℓ

Para los momentos mínimos: $r_1 = 0{,}229\ \ell$; $r_2 = 0{,}253\ \ell$; $r_3 = 0{,}216\ \ell$

Tipo de apoyo *a*: Forjados sobre mampostería:

$$X_1' = -\frac{3}{56}\,\ell^2\,(2\,g + p)$$

GT-7 FORJADO CONTINUO DE CUATRO TRAMOS CON CARGAS IGUALES qℓ (Continuación)

Tipo de apoyo *b*: Forjados rígidamente unidos a vigas de hormigón armado:

$$X_1' = -\frac{3}{56}\ell^2\left(2\,g + \frac{1}{2}p\right)$$

Para los tres tipos de apoyo :

$$X'_2 = \frac{2}{3}\,X_1' \qquad \text{mín}\ M_2 = \frac{1}{8}g\ell^2 + \frac{5}{6}X_1'$$

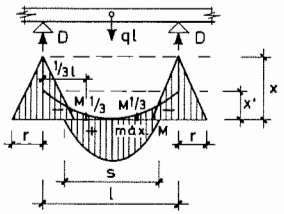
En los tercios del segundo tramo:

$$M_{1/3} = -\frac{1}{9}\,g\ell^2 + \frac{8}{9}X_1' \quad \Big| \quad M_{2/3} = \frac{1}{9}g\ell^2 + \frac{7}{9}X_1'$$

GT-8 FORJADO CONTINUO CON UN NÚMERO INFINITO DE TRAMOS: CARGA UNIFORME qℓ

Luces ℓ iguales; momentos de inercia iguales en todos los tramos; g = carga permanente; p = carga variable; $q = g + p$; $\lambda = g/q$

$$\text{máx}\ M = \frac{q\ell^2}{m} \qquad X = -\frac{q\ell^2}{m_2}$$



$\lambda = g/q$	s	m	m_2
1	2	3	4
0,00	0,82 ℓ	12,00	8,78
0,10	0,80 ℓ	12,63	9,03
0,20	0,77 ℓ	13,33	9,28
0,30	0,75 ℓ	14,12	9,55
0,40	0,73 ℓ	15,00	9,84
0,50	0,71 ℓ	16,00	10,14
0,60	0,68 ℓ	17,14	10,46
0,70	0,66 ℓ	18,46	10,81
0,80	0,63 ℓ	20,00	11,18
0,90	0,60 ℓ	21,82	11,57
1,00	0,58 ℓ	24,00	12,00

Para los momentos mínimos: $r = 0{,}226\ \ell$

Tipo de apoyo *a*: Forjados sobre mampostería:

$$X' = \frac{\ell^2}{24}(2\,g + p)$$

Tipo de apoyo *b*: Forjados unidos a vigas de hormigón armado:

$$X' = -\frac{\ell^2}{24}(2\,g + \frac{1}{2}p)$$

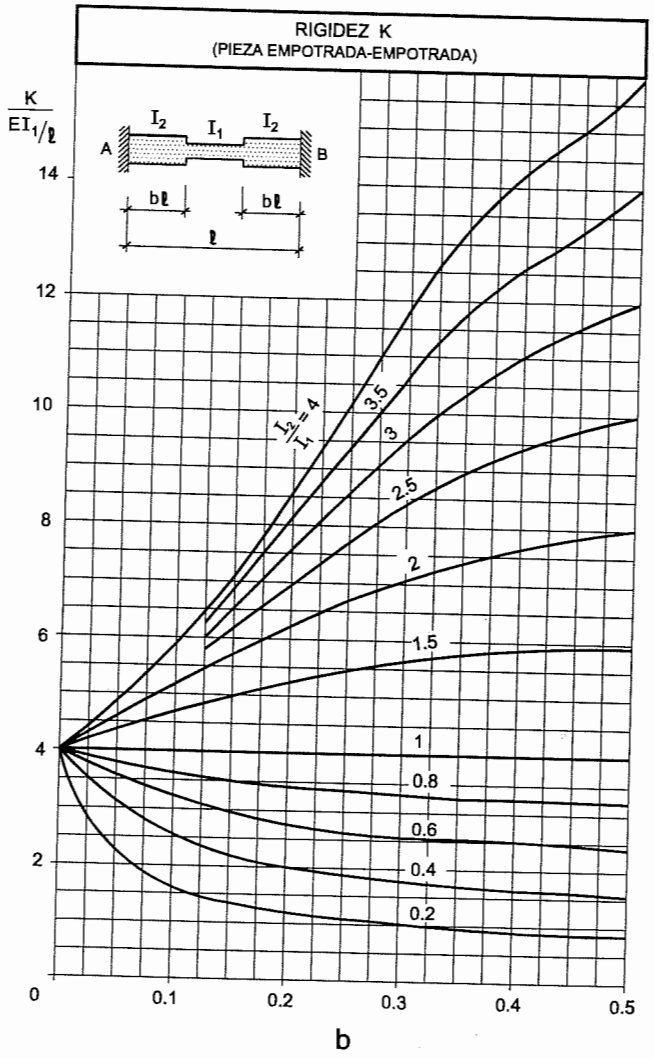
Para los tres tipos de apoyo:

$$\text{mín}\ M = \frac{1}{8}\,g\ell^2 + X'$$

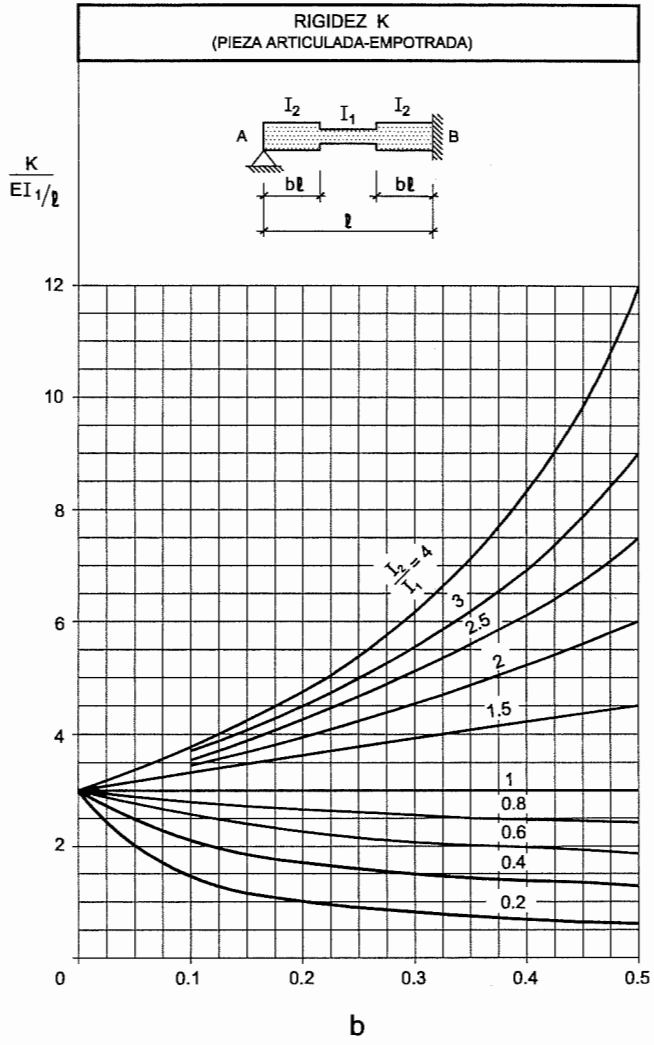
Momento en los tercios de la luz:

$$M_{1/2} = \frac{1}{9}\,g\ell^2 + X'$$

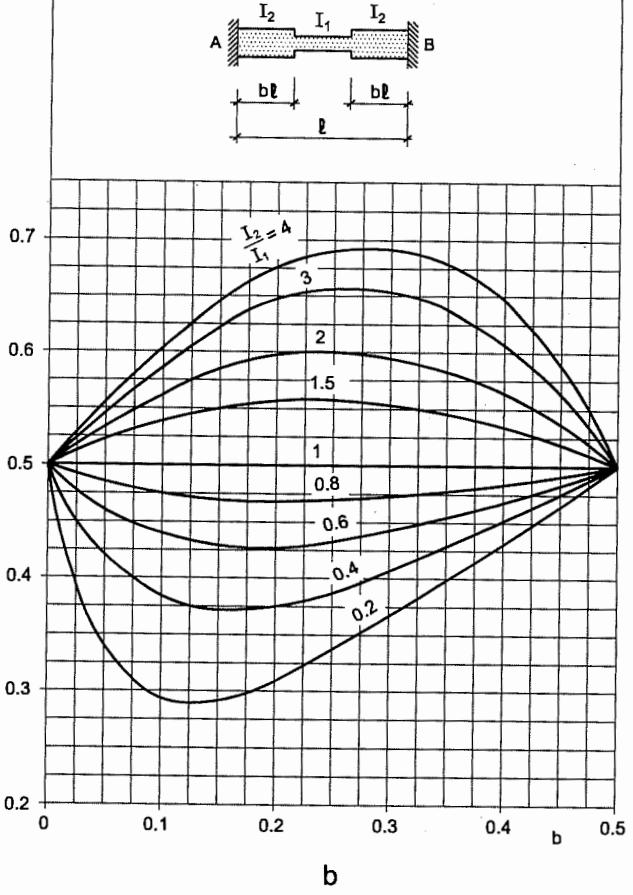
GT-9


RIGIDEZ K
(PIEZA EMPOTRADA-EMPOTRADA)
K / EI1/ℓ
I2 I1 I2
A
B
bℓ
bℓ
ℓ
14
12
10
8
6
4
2
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
b
I2/I1 = 4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.8
0.6
0.4
0.2

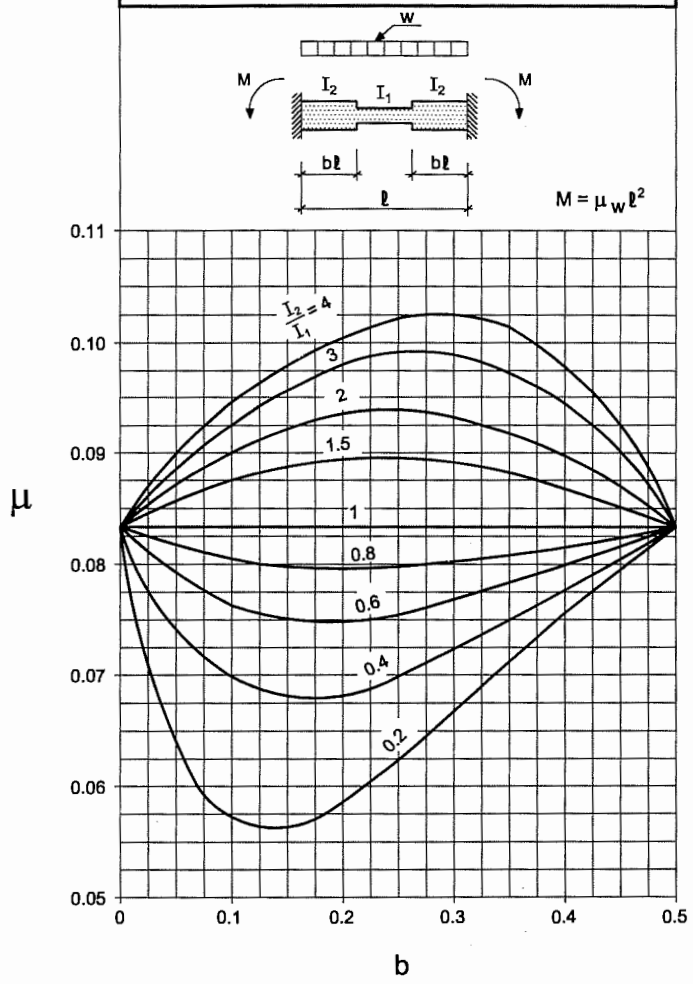
GT-10


RIGIDEZ K
(PIEZA ARTICULADA-EMPOTRADA)
K / EI1/ℓ
I2 I1 I2
A
B
bℓ
bℓ
ℓ
12
10
8
6
4
2
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
b
I2/I1 = 4
3
2.5
2
1.5
1
0.8
0.6
0.4
0.2

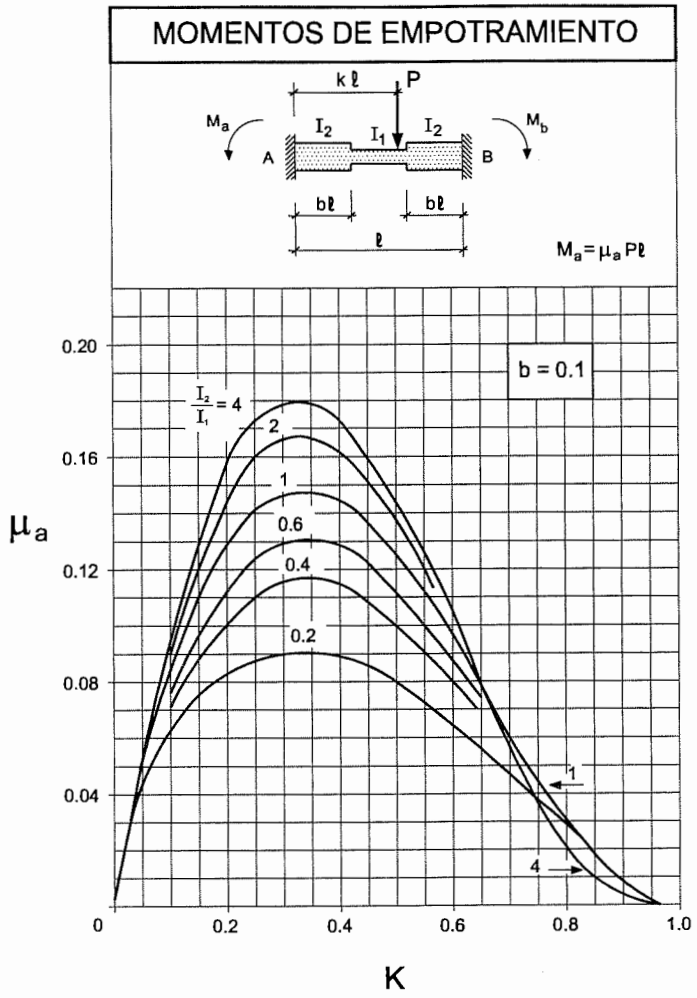
FACTOR DE TRANSMISIÓN β



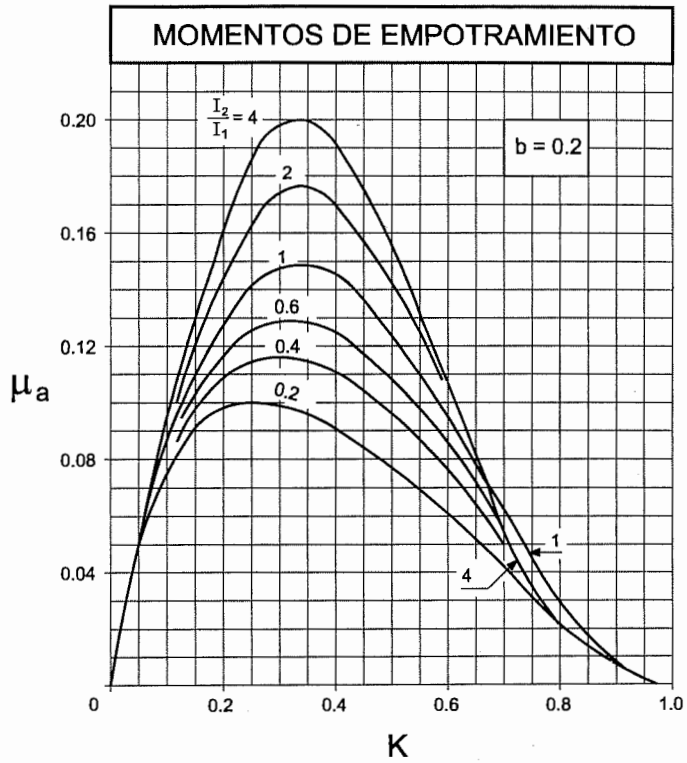
MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO

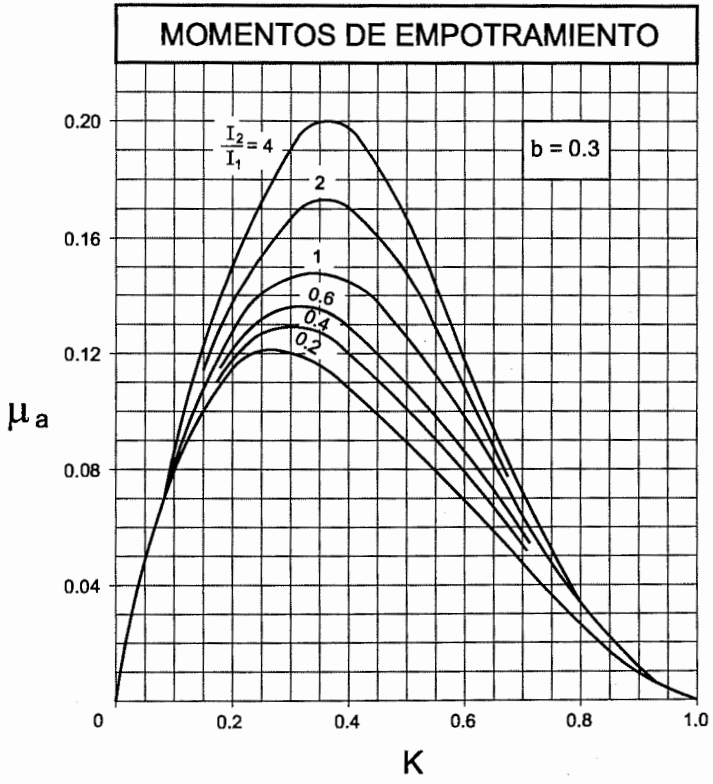


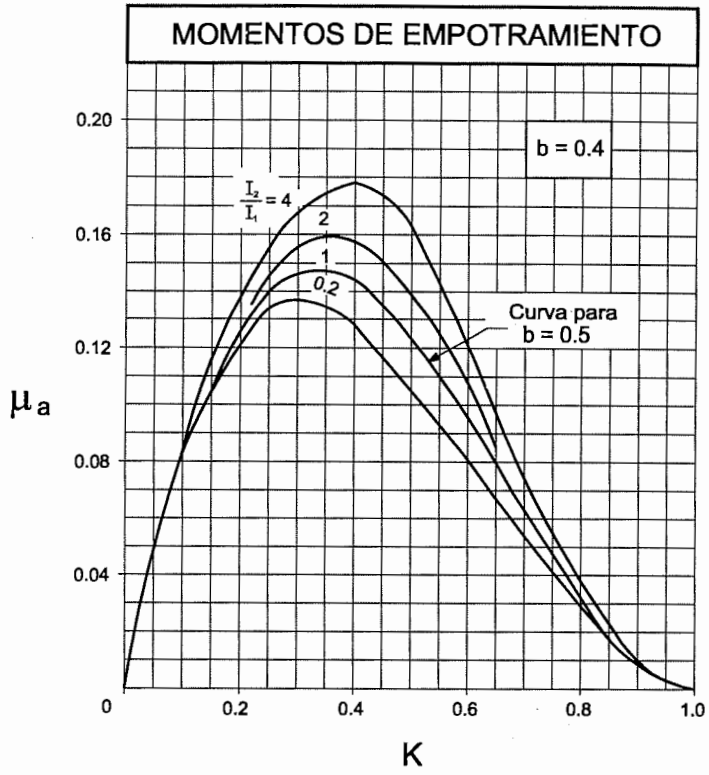
NOTA.- Para cargas w descendentes en el sentido de la figura, el momento de empotramiento dorsal (acción del nudo sobre el extremo de la pieza) tiene el sentido de la figura y es por tanto positivo y el momento de empotramiento frontal negativo.



NOTA.- Para cargas P descendentes en el sentido de la figura, el momento de empotramiento dorsal (acción del nudo sobre el extremo de la pieza) tiene el sentido de la figura y es por tanto positivo y el momento de empotramiento frontal negativo.




MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO
b = 0.3
$\frac{I_2}{I_1} = 4$
2
1
0.6
0.4
0.2
μ_a
0.20
0.16
0.12
0.08
0.04
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
K


MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO
b = 0.4
$\frac{I_2}{I_1} = 4$
2
1
0.2
Curva para
b = 0.5
μ_a
0.20
0.16
0.12
0.08
0.04
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
K

O DE MOMENTOS EN FORJADOS

B A E L - 83

$\alpha \leq 1/6$

Kad	Kv	Kaf
-0,20	0,70 0,68 0,65 0,63	-0,50 -0,55 -0,60 -0,65
-0,25	0,68 0,65 0,63	-0,50 -0,55 -0,60
-0,30	0,65 0,63	-0,50 -0,55
-0,35	0,63	-0,50
-0,40	0,65 0,63 0,60 0,58 0,55 0,53	-0,40 -0,45 -0,50 -0,55 -0,60 -0,65
-0,45	0,63 0,60 0,58 0,55 0,53	-0,40 -0,45 -0,50 -0,55 -0,60
-0,50	0,60 0,58 0,55 0,53	-0,40 -0,45 -0,50 -0;55

Kad	Kv	Kaf
-0,55	0,58 0,55 0,53	-0,40 -0,45 -0,50
-0,60	0,55 0,53	-0,40 -0,45
-0,65	0,53	-0,40

CÁLCULO DE MOMENTOS EN FORJADOS

M É T O D O B A E L - 83

$\alpha = 0.25$

Kad	Kv	Kaf
0,00	0,83 0,80 0,78 0,75 0,73 0,70 0,68 0,65 0,64	-0,50 -0,55 -0,60 -0,65 -0,70 -0,75 -0,80 -0,85 -0,88
-0,05	0,80 0,78 0,75 0,73 0,70 0,68 0,65 0,64	-0,50 -0,55 -0,60 -0,65 -0,70 -0,75 -0,80 -0,83
-0,10	0,78 0,75 0,73 0,70 0,68 0,65 0,64	-0,50 -0,55 -0,60 -0,65 -0,70 -0,75 -0,78
-0,15	0,75 0,73 0,70 0,68 0,65 0,64	-0,50 -0,55 -0,60 -0,65 -0,70 -0,73

Kad	Kv	Kaf
-0,20 -0,20 -0,20	0,73 0,70 0,68 0,65 0,64	-0,50 -0,55 -0,60 -0,65 -0,68
-0,25	0,70 0,68 0,65 0,64	-0,50 -0,55 -0,60 -0,63
	0,68 0,65 0,64	-0,50 -0,55 -0,58
-0,35	0,65 0,64	-0,50 -0,53
-0,40	0,68 0,65 0,63 0,60 0,58 0,55 0,54	-0,40 -0,45 -0,50 -0,55 -0,60 -0,65 -0,68
-0,45	0,65 0,63 0,60 0,58 0,55 0,54	-0,40 -0,45 -0,50 -0,55 -0,60 -0,63

Kad	Kv	Kaf
-0,50	0,63 0,60 0,58 0,55 0,54	-0,40 -0,45 -0,50 -0,55 -0,58
-0,55	0,60 0,58 0,55 0,54	-0,40 -0,45 -0,50 -0,53
0,60	0,58 0,55 0,54	-0,40 -0,45 -0,48
-0,65	0,55 0,54	-0,40 -0,43

MÉTODO BAEL-83

$\alpha = 0.50$

Kad	Kv	Kaf
0,00	0,90	-0,50
	0,88	-0,55
	0,85	-0,60
	0,83	-0,65
	0,80	-0,70
	0,78	-0,75
	0,75	-0,80
	0,73	-0,85
	0,70	-0,90
	0,68	-0,95
-0,05	0,88	-0,50
	0,85	-0,55
	0,83	-0,60
	0,80	-0,65
	0,78	-0,70
	0,75	-0,75
	0,73	-0,80
	0,70	-0,85
	0,68	-0,90
-0,10	0,85	-0,50
	0,83	-0,55
	0,80	-0,60
	0,78	-0,65
	0,75	-0,70
	0,73	-0,75
	0,70	-0,80
	0,68	-0,85
-0,15	0,83	-0,50
	0,80	-0,55
	0,78	-0,60
	0,75	-0,65
	0,73	-0,70
	0,70	-0,75
	0,68	-0,80

Kad	Kv	Kaf
-0,20	0,80	-0,50
	0,78	-0,55
	0,75	-0,60
	0,73	-0,65
	0,70	-0,70
	0,68	-0,75
-0,25	0,78	-0,50
	0,75	-0,55
	0,73	-0,60
	0,70	-0,65
	0,68	-0,70
-0,30	0,75	-0,50
	0,73	-0,55
	0,70	-0,60
	0,68	-0,65
	0,73	-0,50
	0,70	-0,55
	0,68	-0,60
-0,40	0,75	-0,40
	0,73	-0,45
	0,70	-0,50
	0,68	-0,55
	0,65	-0,60
	0,63	-0,65
	0,60	-0,70
	0,58	-0,75
-0,45	0,73	-0,40
	0,70	-0,45
	0,68	-0,50
	0,65	-0,55
	0,63	-0,60
	0,60	-0,65
	0,58	-0,70

Kad	Kv	Kaf
-0,50	0,70	-0,40
	0,68	-0,45
	0,65	-0,50
	0,63	-0,55
	0,60	-0,60
	0,58	-0,65
-0,55	0,68	-0,40
	0,65	-0,45
	0,63	-0,50
	0,60	-0,55
	0,58	-0,60
-0,60	0,65	-0,40
	0,63	-0,45
	0,60	-0,50
	0,58	-0,55
-0,65	0,63	-0,40
	0,60	-0,45
	0,58	-0,50
-0,70	0,60	-0,40
	0,58	-0,45
-0,75	0,58	-0,40

MÉTODO BAEL-83

$\alpha = 0.75$

Kad	Kv	Kaf
0,00	0,98	-0,50
	0,95	-0,55
	0,93	-0,60
	0,90	-0,65
	0,88	-0,70
	0,85	-0,75
	0,83	-0,80
	0,80	-0,85
	0,78	-0,90
	0,75	-0,95
	0,73	-1,00
	0,71	-1,03
-0,05	0,95	-0,50
	0,93	-0,55
	0,90	-0,60
	0,88	-0,65
	0,85	-0,70
	0,83	-0,75
	0,80	-0,80
	0,78	-0,85
	0,75	-0,90
	0,73	-0,95
	0,71	-0,98

Kad	Kv	Kaf
-0,10	0,93	-0,50
	0,90	-0,55
	0,88	-0,60
	0,85	-0,65
	0,83	-0,70
	0,80	-0,75
	0,78	-0,80
	0,75	-0,85
	0,73	-0,90
	0,71	-0,93
-0,15	0,90	-0,50
	0,88	-0,55
	0,85	-0,60
	0,83	-0,65
	0,80	-0,70
	0,78	-0,75
	0,75	-0,80
	0,73	-0,85
	0,71	-0,88
-0,20	0,88	-0,50
	0,85	-0,55
	0,83	-0,60
	0,80	-0,65
	0,78	-0,70
	0,75	-0,75
	0,73	-0,80
	0,71	-0,83

MÉTODO BAEL-83

$\alpha = 0.75$

Kad	Kv	Kaf
-0,25	0,85	-0,50
	0,83	-0,55
	0,80	-0,60
	0,78	-0,65
	0,75	-0,70
	0,73	-0,75
	0,71	-0,78
-0,30	0,83	-0,50
	0,80	-0,55
	0,78	-0,60
	0,75	-0,65
	0,73	-0,70
	0,71	-0,73
-0,35	0,80	-0,50
	0,78	-0,55
	0,75	-0,60
	0,73	-0,65
	0,71	-0,68
-0,40	0,83	-0,40
	0,80	-0,45
	0,78	-0,50
	0,75	-0,55
	0,73	-0,60
	0,70	-0,65
	0,68	-0,70
	0,65	-0,75
	0,63	-0,80
	0,61	-0,83

Kad	Kv	Kaf
-0,45	0,80	-0,40
	0,78	-0,45
	0,75	-0,50
	0,73	-0,55
	0,70	-0,60
	0,68	-0,65
	0,65	-0,70
	0,63	-0,75
	0,61	-0,78
-0,50	0,78	-0,40
	0,75	-0,45
	0,73	-0,50
	0,70	-0,55
	0,68	-0,60
	0,65	-0,65
	0,63	-0,70
	0,61	-0,73

MÉTODO BAEL-83

$\alpha = 0.75$

Kad	Kv	Kaf
-0,55	0,75	-0,40
	0,73	-0,45
	0,70	-0,50
	0,68	-0,55
	0,65	-0,60
	0,63	-0,65
	0,61	-0,68
-0,60	0,73	-0,40
	0,70	-0,45
	0,68	-0,50
	0,65	-0,55
	0,63	-0,60
	0,61	-0,63
-0,65	0,70	-0,40
	0,68	-0,45
	0,65	-0,50
	0,63	-0,55
	0,61	-0,58
-0,70	0,68	-0,40
	0,65	-0,45
	0,63	-0,50
	0,61	-0,53
-0,75	0,65	-0,40
	0,63	-0,45
	0,61	-0,48
-0,80	0,63	-0,40
	0,61	-0,43

GT-18
CÁLCULO DE MOMENTOS EN FORJADOS

MÉTODO BAEL - 83 $\alpha = 1.00$

Kad	Kv	Kaf
0,00	1,05	-0,50
	1,03	-0,55
	1,00	-0,60
	0,98	-0,65
	0,95	-0,70
	0,93	-0,75
	0,90	-0,80
	0,88	-0,85
	0,85	-0,90
	0,83	-0,95
	0,80	-1,00
	0,78	-1,05
	0,75	-1,10
-0,05	1,03	-0,50
	1,00	-0,55
	0,98	-0,60
	0,95	-0,65
	0,93	-0,70
	0,90	-0,75
	0,88	-0,80
	0,85	-0,85
	0,83	-0,90
	0,80	-0,95
	0,78	-1,00
	0,75	-1,05

Kad	Kv	Kaf
-0,10	1,00	-0,50
	0,98	-0,55
	0,95	-0,60
	0,93	-0,65
	0,90	-0,70
	0,88	-0,75
	0,85	-0,80
	0,83	-0,85
	0,80	-0,90
	0,78	-0,95
	0,75	-1,00
-0,15	0,98	-0,50
	0,95	-0,55
	0,93	-0,60
	0,90	-0,65
	0,88	-0,70
	0,85	-0,75
	0,83	-0,80
	0,80	-0,85
	0,78	-0,90
	0,75	-0,95

GT-18
CÁLCULO DE MOMENTOS EN FORJADOS (Continuación)

MÉTODO BAEL - 83 $\alpha = 1.00$

Kad	Kv	Kaf
-0,20	0,95	-0,50
	0,93	-0,55
	0,90	-0,60
	0,88	-0,65
	0,85	-0,70
	0,83	-0,75
	0,80	-0,80
	0,78	-0,85
	0,75	-0,90
-0,25	0,93	-0,50
	0,90	-0,55
	0,88	-0,60
	0,85	-0,65
	0,83	-0,70
	0,80	-0,75
	0,78	-0,80
	0,75	-0,85
-0,30	0,90	-0,50
	0,88	-0,55
	0,85	-0,60
	0,83	-0,65
	0,80	-0,70
	0,78	-0,75
	0,75	-0,80

Kad	Kv	Kaf
-0,35	0,88	-0,50
	0,85	-0,55
	0,83	-0,60
	0,80	-0,65
	0,78	-0,70
	0,75	-0,75
-0,40	0,90	-0,40
	0,88	-0,45
	0,85	-0,50
	0,83	-0,55
	0,80	-0,60
	0,78	-0,65
	0,75	-0,70
	0,73	-0,75
	0,70	-0,80
	0,68	-0,85
	0,65	-0,90
-0,45	0,88	-0,40
	0,85	-0,45
	0,83	-0,50
	0,80	-0,55
	0,78	-0,60
	0,75	-0,65
	0,73	-0,70
	0,70	-0,75
	0,68	-0,80
	0,65	-0,85

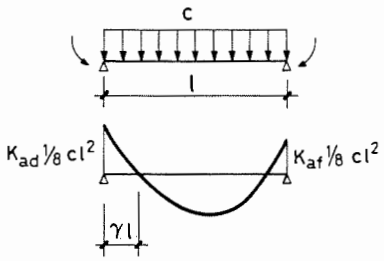
GT-18
CÁLCULO DE MOMENTOS EN FORJADOS (Continuación)

MÉTODO BAEL - 83 | $\alpha = 1.00$

Kad	Kv	Kaf
-0,50	0,85	-0,40
	0,83	-0,45
	0,80	-0,50
	0,78	-0,55
	0,75	-0,60
	0,73	-0,65
	0,70	-0,70
	0,68	-0,75
	0,65	-0,80
-0,55	0,83	-0,40
	0,80	-0,45
	0,78	-0,50
	0,75	-0,55
	0,73	-0,60
	0,70	-0,65
	0,68	-0,70
	0,65	-0,75
-0,60	0,80	-0,40
	0,78	-0,45
	0,75	-0,50
	0,73	-0,55
	0,70	-0,60
	0,68	-0,65
	0,65	-0,70

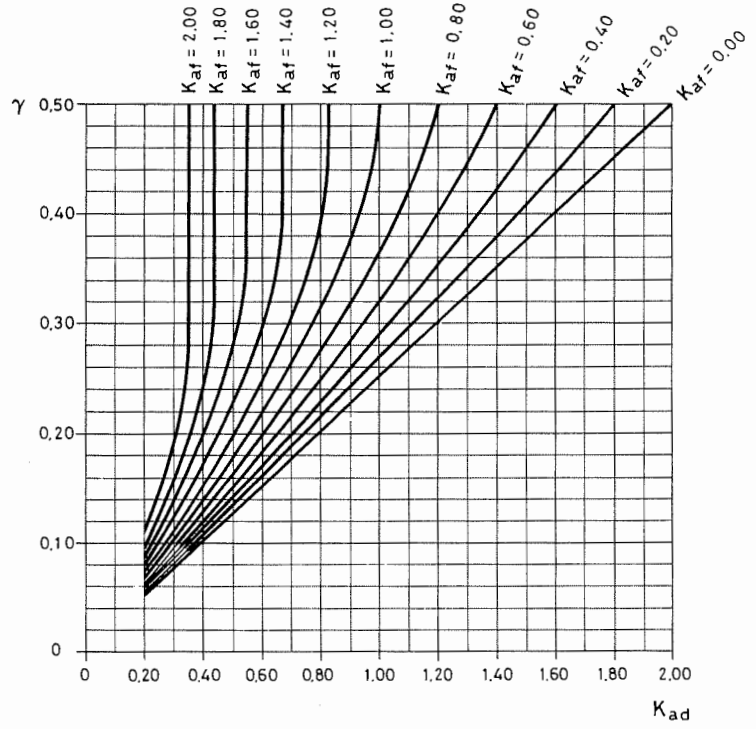
Kad	Kv	Kaf
-0,65	0,78	-0,40
	0,75	-0,45
	0,73	-0,50
	0,70	-0,55
	0,68	-0,60
	0,65	-0,65
-0,70	0,75	-0,40
	0,73	-0,45
	0,70	-0,50
	0,68	-0,55
	0,65	-0,60
-0,75	0,73	-0,40
	0,70	-0,45
	0,68	-0,50
	0,65	-0,55
-0,80	0,70	-0,40
	0,68	-0,45
	0,65	-0,50
-0,85	0,68	-0,40
	0,65	-0,45
-0,90	0,65	-0,40

GT-19 ÁBACO DE DETERMINACIÓN DE LAS SECCIONES DE MOMENTO NULO



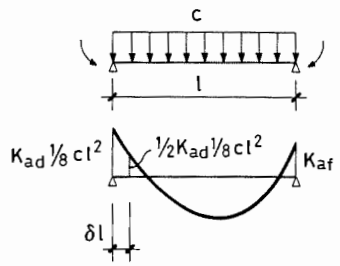
ESQUEMA DE CARGAS

ESQUEMA DE MOMENTOS



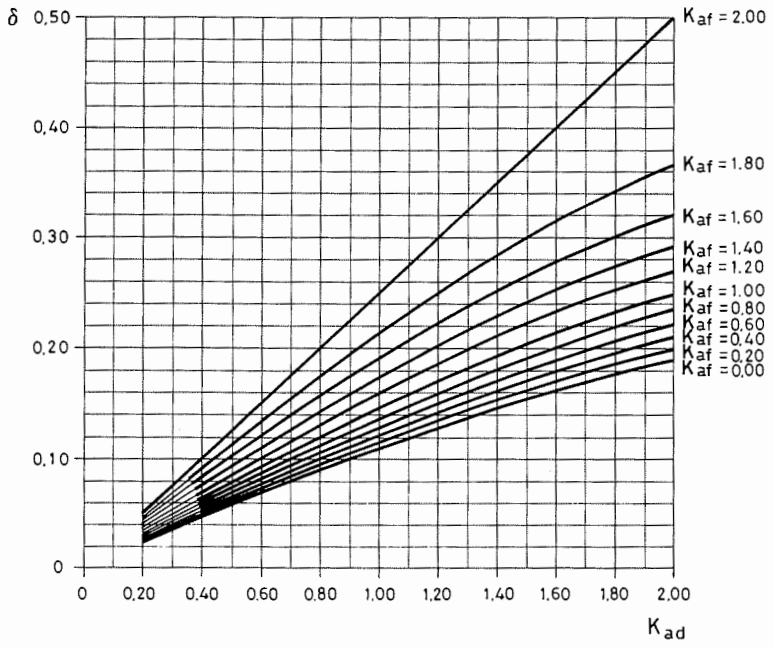
NOTA.- En este gráfico por comodidad, se ha suprimido el signo - a los valores K_{ad}, K_{af}.

GT-20 ÁBACO DE DETERMINACIÓN DE LAS SECCIONES CON MOMENTO DE APOYO IGUAL A LA MITAD DEL MOMENTO MÁXIMO DE APOYO



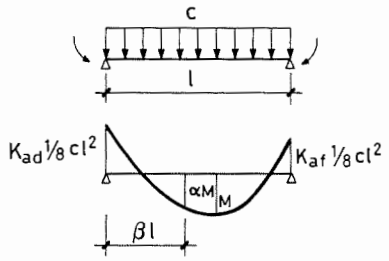
ESQUEMA DE CARGAS

ESQUEMA DE MOMENTOS



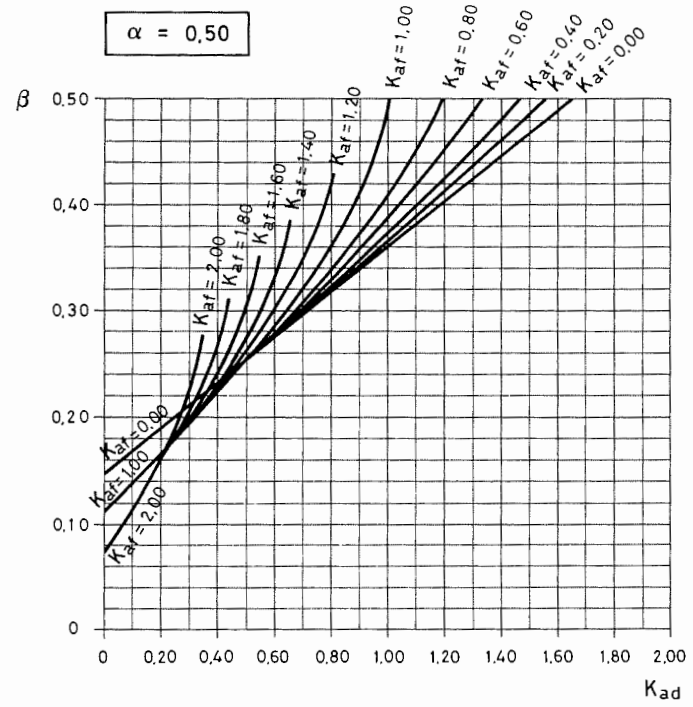
NOTA.- En este gráfico por comodidad, se ha suprimido el signo - a los valores K_{ad}, K_{af}.

GT-21 SECCIÓN CON MOMENTO DE VANO αM, SIENDO M EL MOMENTO MÁXIMO DE VANO



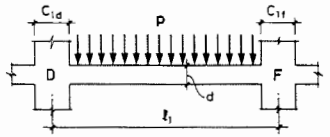
ESQUEMA DE CARGAS

ESQUEMA DE MOMENTOS



NOTA.- En este gráfico por comodidad, se ha suprimido el signo - a los valores K_{ad}, K_{af}.

GT-22 COEFICIENTES PARA LA DISTRIBUCIÓN DE MOMENTOS EN PLACAS MACIZAS SIN ÁBACOS

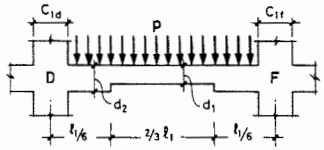


DIMENSIÓN DEL SOPORTE		CARGA UNIFORME Momento de Empot. = $\mu p \ell_2 \ell_1^2$		RIGIDEZ		FACTOR DE TRANSMISIÓN	
$\frac{C_{1d}}{\ell_1}$	$\frac{C_{1f}}{\ell_1}$	μ_d	μ_f	k'_d	k'_f	β_{df}	β_{fd}
	0.00	0.083	0.083	4.00	4.00	0.500	0.500
	0.05	0.083	0.084	4.01	4.04	0.504	0.500
	0.10	0.082	0.086	4.03	4.15	0.513	0.499
0.00	0.15	0.081	0.089	4.07	4.32	0.528	0.498
	0.20	0.079	0.093	4.12	4.56	0.548	0.495
	0.25	0.077	0.097	4.18	4.88	0.573	0.491
	0.30	0.075	0.102	4.25	5.28	0.603	0.485
	0.35	0.073	0.107	4.33	5.78	0.638	0.478
	0.05	0.084	0.084	4.05	4.05	0.503	0.503
	0.10	0.083	0.086	4.07	4.15	0.513	0.503
	0.15	0.081	0.089	4.11	4.33	0.528	0.501
0.05	0.20	0.080	0.092	4.16	4.58	0.548	0.499
	0.25	0.078	0.096	4.22	4.89	0.573	0.494
	0.30	0.076	0.101	4.29	5.30	0.603	0.489
	0.35	0.074	0.107	4.37	5.80	0.638	0.481
	0.10	0.085	0.085	4.18	4.18	0.513	0.513
	0.15	0.083	0.088	4.22	4.36	0.528	0.511
0.10	0.20	0.082	0.091	4.27	4.61	0.548	0.508
	0.25	0.080	0.095	4.34	4.93	0.573	0.504
	0.30	0.078	0.100	4.41	5.34	0.602	0.498
	0.35	0.075	0.105	4.50	5.85	0.637	0.491
	0.15	0.086	0.086	4.40	4.40	0.526	0.526
	0.20	0.084	0.090	4.46	4.65	0.546	0.523
0.15	0.25	0.083	0.094	4.53	4.98	0.571	0.519
	0.30	0.080	0.099	4.61	5.40	0.601	0.513
	0.35	0.078	0.104	4.70	5.92	0.635	0.505
	0.20	0.088	0.088	4.72	4.72	0.543	0.543
0.20	0.25	0.086	0.092	4.79	5.05	0.568	0.539
	0.30	0.083	0.097	4.88	5.48	0.597	0.532
	0.35	0.081	0.102	4.99	6.01	0.632	0.524
	0.25	0.090	0.090	5.14	5.14	0.563	0.563
0.25	0.30	0.088	0.095	5.24	5.58	0.592	0.556
	0.35	0.085	0.100	5.36	6.12	0.626	0.548
0.30	0.30	0.092	0.092	5.69	5.69	0.585	0.585
	0.35	0.090	0.097	5.83	6.26	0.619	0.576
0.35	0.35	0.095	0.095	6.42	6.42	0.609	0.609

(1) $M_d = \mu_d p \ell_2 \ell_1^2$; $M_f = \mu_f p \ell_2 \ell_1^2$

(2) Rigideces $K_d = K'_d \frac{E_c \ell_2 d^3}{12 \ell_1}$; $K_f = K'_f \frac{E_c \ell_2 d^3}{12 \ell_1}$

GT-23 COEFICIENTES PARA LA DISTRIBUCIÓN DE MOMENTOS DE BANDAS DE LOSA MACIZA CON ÁBACOS Y DE LOSA ALIGERADA CON MACIZADO



DIMENSIÓN DEL SOPORTE		CARGA UNIFORME Momento de Empot. = $\mu p \ell_2 \ell_1^2$		RIGIDEZ		FACTOR DE TRANSMISIÓN	
$\frac{C_{1d}}{\ell_1}$	$\frac{C_{1f}}{\ell_1}$	μ_d	μ_f	k'_d	k'_f	β_{df}	β_{fd}
	0.00	0.086	0.068	4.78	4.78	0.541	0.541
	0.05	0.087	0.089	4.80	4.82	0.545	0.541
	0.10	0.087	0.090	4.83	4.94	0.553	0.541
0.00	0.15	0.085	0.093	4.87	5.12	0.567	0.540
	0.20	0.084	0.096	4.93	5.36	0.585	0.537
	0.25	0.082	0.100	5.00	5.68	0.606	0.534
	0.30	0.080	0.105	5.09	6.07	0.631	0.529
	0.05	0.088	0.088	4.84	4.84	0.545	0.545
	0.10	0.087	0.090	4.87	4.95	0.553	0.544
	0.15	0.085	0.093	4.91	5.13	0.567	0.543
0.05	0.20	0.084	0.096	4.97	5.38	0.584	0.541
	0.25	0.082	0.100	5.05	5.70	0.606	0.537
	0.30	0.080	0.104	5.13	6.09	0.632	0.532
	0.10	0.089	0.089	4.98	4.98	0.553	0.553
	0.15	0.088	0.092	5.03	5.16	0.566	0.551
0.10	0.20	0.086	0.094	5.09	5.42	0.584	0.549
	0.25	0.084	0.099	5.17	5.74	0.606	0.546
	0.30	0.082	0.103	5.26	6.13	0.631	0.541
	0.15	0.090	0.090	5.22	5.22	0.565	0.565
0.15	0.20	0.089	0.094	5.28	5.47	0.583	0.563
	0.25	0.087	0.097	5.37	5.80	0.604	0.559
	0.30	0.085	0.102	5.46	6.21	0.630	0.554
	0.20	0.092	0.092	5.55	5.55	0.580	0.580
0.20	0.25	0.090	0.096	5.64	5.88	0.602	0.577
	0.30	0.088	0.100	5.74	6.30	0.627	0.571
0.25	0.25	0.094	0.094	5.96	5.96	0.596	0.596
	0.30	0.091	0.098	6.10	6.41	0.622	0.593
0.30	0.30	0.095	0.095	6.54	6.54	0.617	0.617

(1) $M_d = \mu_d p \ell_2 \ell_1^2$; $M_f = \mu_f p \ell_2 \ell_1^2$

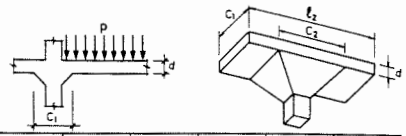
(2) Rigideces $K_d = K'_d \frac{E_c \ell_2 d^3}{12 \ell_1}$; $K_f = K'_f \frac{E_c \ell_2 d^3}{12 \ell_1}$

GT-24 COEFICIENTES PARA LA DISTRIBUCIÓN DE MOMENTOS EN LOSAS MACIZAS CON CAPITELES

Momento de empotramiento = $\mu_d\, p\, \ell_2\, \ell_1$

Rigidez = $K\, E\, \ell_2 d^3/12\ell_1$

Factor de transmisión = β



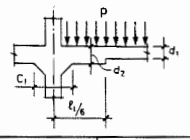
C_1/ℓ_1	C_2/ℓ_2	μ	k	β	C_1/ℓ_1	C_2/ℓ_2	μ	k	β
	0.00	0.083	4.000	0.500		0.30	0.091	5.401	0.576
	0.05	0.083	4.000	0.500		0.35	0.093	5.672	0.588
	0.10	0.083	4.000	0.500	0.25	0.40	0.094	5.952	0.600
	0.15	0.083	4.000	0.500		0.45	0.095	6.238	0.812
	0.20	0.083	4.000	0.500		0.50	0.098	8.527	0.823
0.00	0.25	0.083	4.000	0.500					
	0.30	0.083	4.000	0.500		0.00	0.083	4.000	0.500
	0.35	0.083	4.000	0.500		0.05	0.085	4.235	0.514
	0.40	0.083	4.000	0.500		0.10	0.088	4.468	0.527
	0.45	0.083	4.000	0.500		0.15	0.088	4.780	0.542
	0.50	0.083	4.000	0.500		0.20	0.089	5.050	0.558
					0.30	0.25	0.091	5.361	0.571
	0.00	0.083	4.000	0.500		0.30	0.092	5.692	0.585
	0.05	0.084	4.047	0.503		0.35	0.094	6.044	0.600
	0.10	0.084	4.093	0.507		0.40	0.095	6.414	0.614
	0.15	0.084	4.138	0.510		0.45	0.096	6.802	0.628
	0.20	0.085	4.181	0.513		0.50	0.098	7.205	0.642
0.05	0.25	0.085	4.222	0.518					
	0.30	0.085	4.261	0.518		0.00	0.083	4.000	0.500
	0.35	0.086	4.299	0.521		0.05	0.085	4.264	0.514
	0.40	0.088	4.334	0.523		0.10	0.087	4.551	0.529
	0.45	0.088	4.368	0.526		0.15	0.088	4.864	0.545
	0.50	0.088	4.398	0.528		0.20	0.090	5.204	0.560
					0.35	0.25	0.091	5.575	0.578
	0.00	0.083	4.000	0.500		0.30	0.093	5.979	0.593
	0.05	0.084	4.091	0.506		0.35	0.095	6.416	0.609
	0.10	0.085	4.182	0.513		0.40	0.096	6.888	0.828
	0.15	0.085	4.272	0.519		0.45	0.098	7.395	0.842
	0.20	0.086	4.362	0.524		0.50	0.099	7.935	0.858
0.10	0.25	0.087	4.449	0.530					
	0.30	0.087	4.535	0.535		0.00	0.083	4.000	0.500
	0.35	0.088	4.618	0.540		0.05	0.085	4.289	0.515
	0.40	0.088	4.698	0.545		0.10	0.087	4.607	0.530
	0.45	0.089	4.774	0.550		0.15	0.088	4.959	0.546
	0.50	0.089	4.846	0.554		0.20	0.090	5.348	0.563
					0.40	0.25	0.092	5.778	0.580
	0.00	0.083	4.000	0.500		0.30	0.094	6.255	0.598
	0.05	0.084	4.132	0.509		0.35	0.095	6.782	0.617
	0.10	0.085	4.287	0.517		0.40	0.097	7.365	0.835
	0.15	0.086	4.403	0.526		0.45	0.099	8.007	0.854
	0.20	0.087	4.541	0.534		0.50	0.100	8.710	0.872
0.15	0.25	0.088	4.680	0.543					
	0.30	0.089	4.818	0.550		0.00	0.083	4.000	0.500
	0.35	0.090	4.955	0.558		0.05	0.085	4.311	0.515
	0.40	0.090	5.090	0.565		0.10	0.087	4.658	0.530
	0.45	0.091	5.222	0.572		0.15	0.088	5.046	0.547
	0.50	0.092	5.349	0.579		0.20	0.090	5.480	0.564
					0.45	0.25	0.092	5.967	0.583
	0.00	0.083	4.000	0.500		0.30	0.094	6.517	0.602
	0.05	0.085	4.170	0.511		0.35	0.096	7.136	0.621
	0.10	0.086	4.346	0.522		0.40	0.098	7.836	0.642
	0.15	0.087	4.529	0.532		0.45	0.100	8.625	0.862
	0.20	0.088	4.717	0.543		0.50	0.101	9.514	0.883
0.20	0.25	0.089	4.910	0.554					
	0.30	0.090	5.108	0.564					
	0.35	0.091	5.306	0.574		0.00	0.083	4.000	0.500
	0.40	0.092	5.509	0.584		0.05	0.085	4.331	0.515
	0.45	0.093	5.710	0.593		0.10	0.087	4.703	0.530
	0.50	0.094	5.908	0.602		0.15	0.088	5.123	0.547
						0.20	0.090	5.599	0.564
	0.00	0.083	4.000	0.500	0.50	0.25	0.092	6.141	0.583
	0.05	0.085	4.204	0.512		0.30	0.094	6.760	0.803
0.25	0.10	0.086	4.420	0.525		0.35	0.096	7.470	0.824
	0.15	0.087	4.648	0.538		0.40	0.098	8.289	0.845
	0.20	0.089	4.887	0.550		0.45	0.100	9.234	0.667
	0.25	0.090	5.138	0.563		0.50	0.102	10.329	0.690

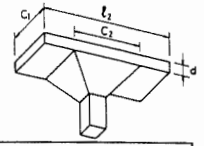
GT-25 COEFICIENTES PARA LA DISTRIBUCIÓN DE MOMENTOS EN LOSA MACIZA CON ÁBACOS O LOSA ALIGERADA CON MACIZADO Y SOPORTE CON CAPITELES

Momento de empotramiento = $\mu_d\, p\, \ell_2\, \ell_1^2$

Rigidez = $K\, E\, \ell_2 d^3/12\ell_1$

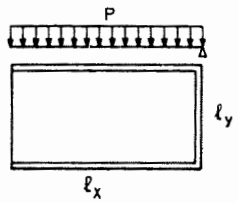
Factor de transmisión = β





C_1/ℓ_1	C_2/ℓ_2	Constantes para $d_2 = 1.25\, d_1$			Constantes para $d_2 = 1.5\, d_2$		
		μ	k	β	μ	k	β
	0.00	0.088	4.795	0.542	0.093	5.837	0.589
	0.05	0.088	4.795	0.542	0.093	5.837	0.589
	0.10	0.088	4.795	0.542	0.093	5.837	0.589
0.00	0.15	0.088	4.795	0.542	0.093	5.837	0.589
	0.20	0.088	4.795	0.542	0.093	5.837	0.589
	0.25	0.088	4.795	0.542	0.093	5.837	0.589
	0.30	0.088	4.797	0.542	0.093	5.837	0.589
	0.00	0.088	4.795	0.542	0.093	5.837	0.589
	0.05	0.088	4.846	0.545	0.093	5.890	0.591
	0.10	0.089	4.696	0.548	0.093	5.942	0.594
0.05	0.15	0.089	4.944	0.551	0.093	5.993	0.596
	0.20	0.089	4.990	0.553	0.094	8.041	0.598
	0.25	0.089	5.035	0.558	0.094	6.087	0.600
	0.30	0.090	5.077	0.558	0.094	8.131	0.602
	0.00	0.088	4.795	0.542	0.093	5.837	0.589
	0.05	0.088	4.894	0.548	0.093	5.940	0.593
	0.10	0.089	4.992	0.553	0.094	6.042	0.598
0.10	0.15	0.090	5.039	0.559	0.094	6.142	0.602
	0.20	0.090	5.184	0.564	0.094	6.240	0.607
	0.25	0.091	5.278	0.569	0.095	6.335	0.611
	0.30	0.091	5.368	0.573	0.095	6.427	0.615
	0.00	0.088	4.795	0.542	0.093	5.837	0.589
	0.05	0.089	4.938	0.550	0.093	5.988	0.595
	0.10	0.090	5.082	0.558	0.094	6.135	0.602
0.15	0.15	0.090	5.228	0.585	0.095	8.264	0.608
	0.20	0.091	5.374	0.573	0.095	6.432	0.614
	0.25	0.092	5.520	0.580	0.096	6.579	0.620
	0.30	0.092	5.565	0.587	0.096	6.723	0.626
	0.00	0.088	4.795	0.542	0.093	5.837	0.589
	0.05	0.089	4.978	0.552	0.093	6.027	0.597
	0.10	0.090	5.167	0.562	0.094	6.221	0.605
0.20	0.15	0.091	5.361	0.571	0.095	6.418	0.613
	0.20	0.092	5.558	0.581	0.096	6.818	0.621
	0.25	0.093	5.760	0.590	0.095	6.818	0.628
	0.30	0.094	5.962	0.590	0.097	7.015	0.635
	0.00	0.088	4.795	0.542	0.093	5.837	0.589
	0.05	0.089	5.015	0.553	0.094	6.065	0.598
	0.10	0.090	5.245	0.565	0.094	6.300	0.608
0.25	0.15	0.091	5.485	0.576	0.095	6.543	0.617
	0.20	0.092	5.735	0.587	0.096	6.790	0.628
	0.25	0.094	5.994	0.598	0.097	7.043	0.635
	0.30	0.095	6.261	0.600	0.098	7.298	0.644
	0.00	0.088	4.795	0.542	0.093	5.837	0.589
	0.05	0.089	5.048	0.554	0.094	6.099	0.599
	0.10	0.090	5.317	0.587	0.095	6.372	0.810
0.30	0.15	0.092	5.601	0.580	0.096	6.657	0.620
	0.20	0.093	5.902	0.593	0.097	8.953	0.631
	0.25	0.094	6.219	0.805	0.098	7.258	0.641
	0.30	0.095	6.550	0.618	0.099	7.571	0.651

GT-26. PLACA RECTANGULAR, SIMPLEMENTE APOYADA EN TRES BORDES Y EL OTRO LIBRE, CON CARGA UNIFORME



ℓ_x/ℓ_y	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
$M_{x,o}$	0,077	0,06	0,047	0,036	0,028	0,022	0,017	0,013	0,010	0,0082	0,0066	0,0053	0,0042	0,0034	0,0027	0,0022
M_{yo}	0,12	0,11	0,10	0,091	0,082	0,073	0,066	0,059	0,053	0,048	0,046	0,039	0,036	0,033	0,030	0,028
$M_{y\ell}$	0,20	0,18	0,16	0,14	0,12	0,10	0,089	0,078	0,068	0,06	0,053	0,047	0,042	0,038	0,034	0,031
W_o	0,052	0,033	0,022	0,015	0,011	0,0078	0,0057	0,0043	0,0033	0,0026	0,0020	0,0016	0,0013	0,0011	0,00087	0,00072
W_ℓ	0,088	0,054	0,034	0,023	0,015	0,011	0,0077	0,0056	0,0042	0,0032	0,0025	0,0019	0,0015	0,0012	0,00098	0,00080

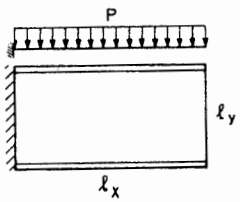
Los coeficientes de las tablas deben multiplicarse por los siguientes factores:

Momentos: $p\,l_x^2$

Flechas: $\dfrac{p\,l_x^4}{D}$

siendo $D = \dfrac{E\,h^3}{12\,(1-\nu^2)}$ E = módulo de deformación
ν = módulo de Poisson

GT-27. PLACA RECTANGULAR, SIMPLEMENTE APOYADA EN DOS BORDES OPUESTOS, EMPOTRADA EN UNO Y LIBRE EN EL OTRO, BAJO CARGA UNIFORME



ℓ_x/ℓ_y	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
M_{xo}	0	0,012	0,018	0,019	0,018	0,017	0,015	0,013	0,011	0,0091	0,0076	0,0064	0,0053	0,0044	0,0036	0,003
M_{yo}	0,042	0,048	0,052	0,054	0,053	0,051	0,048	0,045	0,042	0,039	0,037	0,034	0,032	0,029	0,027	0,025
M_{xa}	-0,29	-0,24	-0,20	-0,17	-0,14	-0,12	-0,099	-0,085	-0,073	-0,063	-0,055	-0,049	-0,043	-0,039	-0,035	-0,031
$M_{y\ell}$	0,10	0,11	0,11	0,11	0,1	0,088	0,079	0,071	0,063	0,057	0,051	0,046	0,041	0,037	0,034	0,031
W_o	0,025	0,016	0,012	0,0092	0,0071	0,0055	0,0043	0'0034	0,0027	0,0022	0,0018	0,0014	0,0012	0,00095	0,00079	0,0007
W_ℓ	0,047	0,034	0,024	0,018	0,013	0,0093	0,0069	0,0052	0,0039	0,003	0,0024	0,0019	0,0015	0,0012	0,00097	0,0008

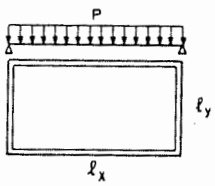
Los coeficientes de las tablas deben multiplicarse por los siguientes factores:

Momentos: $p\,l_x^2$

Flechas: $\dfrac{p\,l_x^4}{D}$

siendo $D = \dfrac{E\,h^3}{12\,(1-\nu^2)}$ E = módulo de deformación
ν = módulo de Poisson

GT-28. PLACA RECTANGULAR, SIMPLEMENTE APOYADA EN SU CONTORNO, BAJO CARGA UNIFORME



ℓ_x/ℓ_y	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
$M_{x,o}$	0,096	0,082	0,068	0,056	0,046	0,037	0,030	0,024	0,019	0,015	0,013	0,010	0,0081	0,0066	0,0053	0,0044
$M_{y,o}$	0,017	0,024	0,030	0,033	0,036	0,037	0,037	0,036	0,035	0,034	0,032	0,031	0,029	0,027	0,026	0,024
M_e	±0,066	±0,063	±0,06	±0,056	±0,051	±0,046	±0,042	±0,038	±0,034	±0,030	±0,027	±0,024	±0,022	±0,020	±0,018	±0,017
W_o	0,010	0,0087	0,0073	0,0060	0,0050	0,0041	0,0033	0,0027	0,0022	0,0018	0,0015	0,0013	0,0011	0,00089	0,00075	0,00063

Los coeficientes de las tablas deben multiplicarse por los siguientes factores:

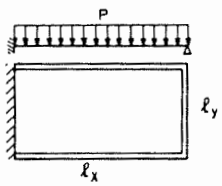
Momentos: $p\,l_x^2$

Flechas: $\dfrac{p\,l_x^4}{D}$

siendo $D = \dfrac{E h^3}{12\,(1 - \nu^2)}$

E = módulo de deformación
ν = módulo de Poisson

GT-29. PLACA RECTANGULAR, SIMPLEMENTE APOYADA EN TRES LADOS Y EMPOTRADA EN EL OTRO, CON CARGA UNIFORME



ℓ_x/ℓ_y	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
$M_{x,o}$	0,058	0,054	0,049	0,043	0,037	0,032	0,027	0,023	0,019	0,016	0,013	0,011	0,0091	0,0075	0,0062	0,0051
$M_{y,o}$	0,006	0,011	0,015	0,019	0,022	0,024	0,026	0,027	0,027	0,027	0,027	0,026	0,025	0,024	0,023	0,022
M_{xa}	-0,12	-0,12	-0,11	-0,10	-0,092	-0,084	-0,076	-0,068	-0,061	-0,055	-0,050	-0,045	-0,041	-0,037	-0,033	-0,030
M_e	±0,045	±0,044	±0,043	±0,042	±0,041	±0,038	±0,036	±0,033	±0,030	±0,028	±0,025	±0,023	±0,021	±0,019	±0,018	±0,016
W_o	0,0049	0,0045	0,0041	0,0037	0,0032	0,0028	0,0024	0,0021	0,0018	0,0015	0,0013	0,0011	0,00092	0,00079	0,00067	0,00058

Los coeficientes de las tablas deben multiplicarse por los siguientes factores:

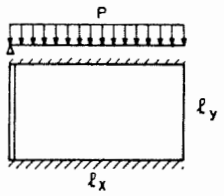
Momentos: $p\,l_x^2$

Flechas: $\dfrac{p\,l_x^4}{D}$

siendo $D = \dfrac{E h^3}{12\,(1 - \nu^2)}$

E = módulo de deformación
ν = módulo de Poisson

GT-30. PLACA RECTANGULAR CON DOS BORDES OPUESTOS EMPOTRADOS, OTRO SIMPLEMENTE APOYADO Y OTRO LIBRE, BAJO CARGA UNIFORME



ℓ_x/ℓ_y	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
M_{xo}	0,046	0,034	0,023	0,016	0,012	0,0085	0,0061	0,0042	0,0028	0,0018	0,0011	0,00082	0,00059	0,00042	0,0003	0,0002
M_{yo}	0,084	0,07	0,058	0,049	0,041	0,035	0,03	0,025	0,022	0,019	0,017	0,015	0,014	0,012	0,011	0,01
M_{ya}	-0,21	-0,17	-0,14	-0,11	-0,091	-0,077	-0,065	-0,056	-0,048	-0,042	-0,037	-0,032	-0,029	-0,026	-0,023	-0,021
$M_{y\ell}$	0,14	0,11	0,083	0,065	0,051	0,042	0,035	0,029	0,025	0,021	0,019	0,016	0,014	0,013	0,012	0,01
$M_{y\ell a}$	-0,36	-0,25	-0,18	-0,14	-0,11	-0,084	-0,069	-0,058	-0,049	-0,043	-0,037	-0,033	-0,029	-0,026	-0,023	-0,021
w_o	0,023	0,013	0,0078	0,005	0,0033	0,0023	0,0016	0,0012	0,00086	0,00065	0,0005	0,00039	0,0003	0,00024	0,0002	0,00016
w_ℓ	0,034	0,018	0,0099	0,0059	0,0037	0,0025	0,0017	0,0012	0,00089	0,00066	0,0005	0,00039	0,00031	0,00025	0,0002	0,00016

Los coeficientes de las tablas deben multiplicarse por los siguientes factores:

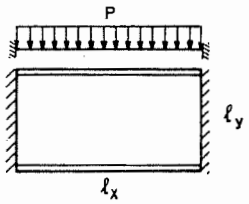
Momentos: $p\,\ell_x^2$

Flechas: $\dfrac{p\,\ell_x^4}{D}$

siendo $D = \dfrac{E h^3}{12\,(1-\nu^2)}$

E = módulo de deformación
ν = módulo de Poisson

GT-31 PLACA RECTANGULAR, CON DOS BORDES OPUESTOS SIMPLEMENTE APOYADOS Y LOS DOS EMPOTRADOS, BAJO CARGA UNIFORME



ℓ_x/ℓ_y	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
$M_{x,o}$	0,041	0,04	0,038	0,035	0,032	0,029	0,025	0,022	0,019	0,016	0,014	0,012	0,0099	0,0083	0,0069	0,0059
M_{yo}	0,0017	0,0043	0,0073	0,010	0,013	0,016	0,018	0,020	0,021	0,022	0,022	0,022	0,022	0,021	0,021	0,020
M_{xa}	-0,085	-0,084	-0,082	-0,078	-0,074	-0,070	-0,065	-0,06	-0,06	-0,051	-0,046	-0,042	-0,039	-0,035	-0,032	-0,030
w_o	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0021	0,0019	0,0017	0,0016	0,0014	0,0012	0,0011	0,00092	0,0008	0,0007	0,00061	0,00053

Los coeficientes de las tablas deben multiplicarse por los siguientes factores:

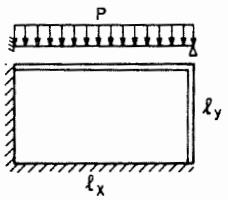
Momentos: $p\,\ell_x^2$

Flechas: $\dfrac{p\,\ell_x^4}{D}$

siendo $D = \dfrac{E h^3}{12\,(1-\nu^2)}$

E = módulo de deformación
ν = módulo de Poisson

GT-32 PLACA RECTANGULAR SIMPLEMENTE APOYADA EN DOS BORDES CONTIGUOS Y EMPOTRADA EN LOS OTROS DOS CON CARGA UNIFORME



ℓ_x/ℓ_y	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
M_{xo}	0,056	0,050	0,043	0,036	0,029	0,023	0,019	0,015	0,011	0,009	0,007	0,0055	0,0043	0,0033	0,0026	0,0020
M_{yo}	0,0079	0,013	0,017	0,020	0,023	0,023	0,024	0,023	0,022	0,021	0,02	0,019	0,017	0,016	0,015	0,014
M_{xa}	-0,12	-0,11	-0,010	-0,088	-0,077	-0,068	-0,059	-0,051	-0,045	-0,039	-0,034	-0,034	-0,027	-0,024	-0,022	-0,020
M_{ya}	-0,078	-0,078	-0,077	-0,075	-0,071	-0,068	-0,063	-0,059	-0,054	-0,050	-0,046	-0,042	-0,038	-0,035	-0,032	-0,029
M_e	±0,044	±0,044	±0,042	±0,040	±0,037	±0,033	±0,030	±0,027	±0,024	±0,023	±0,019	±0,017	±0,015	±0,014	±0,012	±0,011
W_o	0,0047	0,0042	0,0036	0,0031	0,0026	0,0021	0,0017	0,0014	0,0011	0,00092	0,00075	0,00062	0,00051	0,00044	0,00035	0,00029

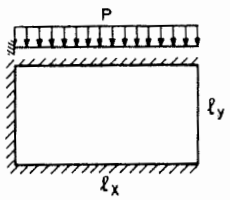
Los coeficientes de las tablas deben multiplicarse por los siguientes factores:

Momentos: $p\,l_x^2$

Flechas: $\frac{p\,l_x^4}{D}$

siendo $D = \frac{E h^3}{12\,(1-\nu^2)}$ E = módulo de deformación
ν = módulo de Poisson

GT-33 PLACA RECTANGULAR EMPOTRADA EN TRES BORDES Y LIBRE EN EL OTRO, BAJO CARGA UNIFORME



ℓ_x/ℓ_y	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
M_{xo}	0,012	0,016	0,015	0,014	0,011	0,0090	0,007	0,0053	0,004	0,003	0,0023	0,0017	0,0012	0,00083	0,00058	0,00038
M_{yo}	0,043	0,043	0,04	0,036	0,032	0,028	0,025	0,022	0,02	0,018	0,016	0,014	0,013	0,012	0,011	0,00099
M_{xa}	-0,2	-0,15	-0,11	-0,088	-0,069	-0,056	-0,046	-0,039	-0,033	-0,028	-0,025	-0,022	-0,019	-0,017	-0,015	-0,014
M_{ya}	-0,13	-0,12	-0,10	-0,087	-0,076	-0,068	-0,058	-0,051	-0,045	-0,04	-0,036	-0,032	-0,028	-0,025	-0,023	-0,021
$M_{y\ell}$	0,098	0,086	0,073	0,06	0,05	0,041	0,034	0,029	0,025	0,021	0,019	0,016	0,014	0,013	0,012	0,01
$M_{y\ell a}$	-0,3	-0,23	-0,18	-0,14	-0,11	-0,087	-0,071	-0,059	-0,05	-0,043	-0,037	-0,033	-0,029	-0,026	-0,023	-0,021
W_o	0,012	0,008	0,0055	0,0037	0,0026	0,0019	0,0014	0,001	0,00078	0,00059	0,00046	0,00036	0,00028	0,00023	0,00018	0,00015
W_ℓ	0,028	0,016	0,0095	0,006	0,0039	0,0026	0,0018	0,0012	0,00091	0,00067	0,00051	0,0004	0,00031	0,00025	0,0002	0,00016

ESCOLA POLITÈCNICA SUPERIOR BIBLIOTECA UNIVERSITAT D'ALACANT

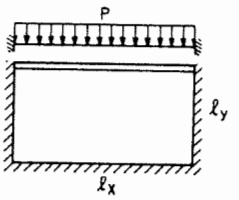
Los coeficientes de las tablas deben multiplicarse por los siguientes factores:

Momentos: $p\,l_x^2$

Flechas: $\frac{p\,l_x^4}{D}$

siendo $D = \frac{E h^3}{12\,(1-\nu^2)}$ E = módulo de deformación
ν = módulo de Poisson

GT-34 PLACA RECTANGULAR SIMPLEMENTE APOYADA EN UN BORDE Y EMPOTRADA EN LOS OTROS TRES, BAJO CARGA UNIFORME



ℓ_x/ℓ_y	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
M_{xo}	0,041	0,039	0,035	0,031	0,027	0,023	0,019	0,016	0,013	0,010	0,0082	0,0064	0,0051	0,0040	0,0032	0,0025
M_{yo}	0,0028	0,0059	0,0091	0,012	0,015	0,017	0,018	0,018	0,018	0,018	0,018	0,017	0,016	0,015	0,014	0,013
M_{xa}	-0,084	-0,081	-0,077	-0,072	-0,066	-0,060	-0,054	-0,048	-0,043	-0,038	-0,033	-0,030	-0,027	-0,024	-0,022	-0,020
M_{ya}	-0,056	-0,057	-0,057	-0,057	-0,056	-0,055	-0,053	-0,051	-0,048	-0,045	-0,042	-0,040	-0,037	-0,034	-0,031	-0,029
W_o	0,0025	0,0024	0,0022	0,0021	0,0018	0,0016	0,0014	0,0011	0,00096	0,00080	0,00067	0,00056	0,00047	0,00039	0,00033	0,00028

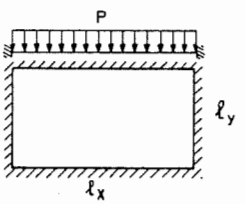
Los coeficientes de las tablas deben multiplicarse por los siguientes factores:

Momentos: $p\,l_x^2$

Flechas: $\dfrac{p\,l_x^4}{D}$

siendo $D = \dfrac{E h^3}{12\,(1 - \nu^2)}$ E = módulo de deformación
ν = módulo de Poisson

GT-35 PLACA RECTANGULAR CON TODOS SUS BORDES EMPOTRADOS BAJO CARGA UNIFORME



ℓ_x/ℓ_y	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
M_{xo}	0,04	0,037	0,032	0,027	0,022	0,018	0,014	0,011	0,008	0,006	0,0045	0,0034	0,0025	0,0018	0,0013	0,00095
M_{yo}	0,0038	0,0076	0,011	0,014	0,017	0,018	0,018	0,018	0,017	0,016	0,015	0,014	0,013	0,012	0,011	0,010
M_{xa}	-0,083	-0,078	-0,073	-0,066	-0,058	-0,051	-0,044	-0,038	-0,033	-0,029	-0,025	-0,022	-0,019	-0,017	-0,016	-0,014
M_{ya}	-0,056	-0,056	-0,057	-0,056	-0,054	-0,051	-0,047	-0,044	-0,04	-0,037	-0,033	-0,03	-0,027	-0,025	-0,023	-0,021
W_o	0,0025	0,0024	0,0021	0,0018	0,0016	0,0013	0,0010	0,00084	0,00067	0,00054	0,00043	0,00035	0,00028	0,00023	0,00019	0,00016

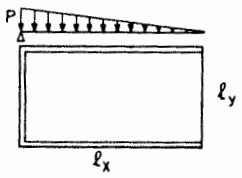
Los coeficientes de las tablas deben multiplicarse por los siguientes factores:

Momentos: $p\,l_x^2$

Flechas: $\dfrac{p\,l_x^4}{D}$

siendo $D = \dfrac{E h^3}{12\,(1 - \nu^2)}$ E = módulo de deformación
ν = módulo de Poisson

GT-36 PLACA RECTANGULAR SIMPLEMENTE APOYADA EN TRES BORDES Y LIBRE EN EL OTRO, BAJO CARGA TRIANGULAR DE VALOR MÍNIMO EN EL BORDE LIBRE



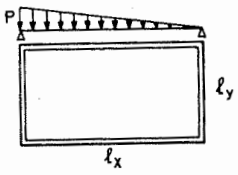
ℓ_x/ℓ_y	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
M_{xo}	0,042	0,034	0,027	0,022	0,017	0,014	0,011	0,009	0,0073	0,0059	0,0048	0,0039	0,0032	0,0027	0,0022	0,0018
M_{yo}	0,042	0,04	0,038	0,035	0,032	0,029	0,027	0,024	0,022	0,021	0,019	0,017	0,016	0,015	0,014	0,013
$M_y\ell$	0,068	0,06	0,051	0,043	0,037	0,031	0,026	0,022	0,019	0,016	0,014	0,012	0,0099	0,0085	0,0074	0,0064
W_o	0,019	0,012	0,0084	0,0059	0,0042	0,0031	0,0024	0,0018	0,0014	0,0011	0,00089	0,00071	0,00058	0,00048	0,0004	0,00033
W_ℓ	0,029	0,017	0,011	0,007	0,0047	0,0032	0,0022	0,0016	0,0011	0,00083	0,00061	0,00046	0,00035	0,00027	0,00021	0,00016

Los coeficientes de las tablas deben multiplicarse por los siguientes factores:

Momentos: $p\,\ell_x^2$

Flechas: $\frac{p\,\ell_x^4}{D}$

siendo $D = \frac{E\,h^3}{12\,(1-\nu^2)}$ E = módulo de deformación
ν = módulo de Poisson



GT-37 PLACA RECTANGULAR SIMPLEMENTE APOYADA BAJO CARGA TRIANGULAR

ℓ_x/ℓ_y	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
M_{xo}	0,048	0,041	0,034	0,028	0,023	0,018	0,015	0,012	0,0096	0,0077	0,0062	0,005	0,0041	0,0033	0,0027	0,0022
M_{yo}	0,0087	0,012	0,015	0,017	0,018	0,018	0,018	0,018	0,018	0,017	0,016	0,015	0,014	0,014	0,013	0,012
$M_{x,max}$	0,05	0,044	0,037	0,031	0,026	0,022	0,019	0,016	0,014	0,012	0,010	0,0089	0,0077	0,0068	0,0059	0,0052
$M_{y,max}$	0,012	0,014	0,015	0,017	0,018	0,018	0,018	0,018	0,018	0,017	0,016	0,016	0,015	0,014	0,014	0,013
M_e^M	±0,038	±0,036	±0,035	±0,033	±0,030	±0,028	±0,025	±0,023	±0,021	±0,019	±0,018	±0,016	±0,015	±0,014	±0,013	±0,012
M_e^m	±0,028	±0,027	±0,025	±0,023	±0,021	±0,019	±0,017	±0,014	±0,012	±0,011	±0,0094	±0,0081	±0,0071	±0,0062	±0,0054	±0,0048
W_o	0,0051	0,0043	0,0036	0,0030	0,0025	0,0020	0,0017	0,0014	0,0011	0,00092	0,00076	0,00063	0,00053	0,00044	0,00037	0,00032
W_{max}	0,0051	0,0043	0,0036	0,0030	0,0025	0,0020	0,0017	0,0014	0,0011	0,00094	0,00078	0,00065	0,00055	0,00047	0,0004	0,00034

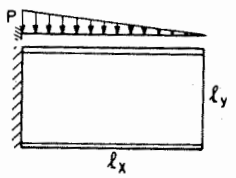
Los coeficientes de las tablas deben multiplicarse por los siguientes factores:

Momentos: $p\,\ell_x^2$

Flechas: $\frac{p\,\ell_x^4}{D}$

siendo $D = \frac{E\,h^3}{12\,(1-\nu^2)}$ E = módulo de deformación
ν = módulo de Poisson

GT-38 PLACA RECTANGULAR SIMPLEMENTE APOYADA EN DOS BORDES OPUESTOS, EMPOTRADA EN UNO Y LIBRE EN EL OTRO, BAJO CARGA TRIANGULAR CON VALOR MÁXIMO EN EL BORDE EMPOTRADO



ℓ_x/ℓ_y	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
M_{xo}	0,012	0,014	0,014	0,014	0,013	0,012	0,01	0,0087	0,0077	0,0067	0,0059	0,005	0,0042	0,0035	0,0028	0,0022
M_{yo}	0,012	0,016	0,017	0,018	0,018	0,018	0,018	0,017	0,017	0,016	0,015	0,014	0,013	0,013	0,012	0,011
M_{xa}	-0,11	-0,097	-0,085	-0,074	-0,065	-0,057	-0,05	-0,045	-0,04	-0,036	-0,033	-0,03	-0,027	-0,025	-0,023	-0,021
$M_{y\ell}$	0,028	0,031	0,03	0,029	0,026	0,024	0,021	0,019	0,016	0,014	0,012	0,01	0,0091	0,008	0,0073	0,0062
W_o	0,0062	0,0051	0,004	0,0032	0,0025	0,002	0,0016	0,0013	0,0011	0,00086	0,00071	0,00058	0,00049	0,00041	0,00035	0,0003
W_ℓ	0,013	0,0093	0,0066	0,0048	0,0034	0,0025	0,0018	0,0013	0,00098	0,00074	0,00055	0,00042	0,00033	0,00025	0,0002	0,00016

Los coeficientes de las tablas deben multiplicarse por los siguientes factores:

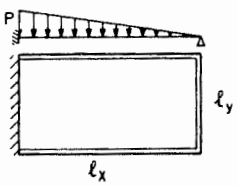
Momentos: $p\,l_x^2$

Flechas: $\dfrac{p\,l_x^4}{D}$

siendo $D = \dfrac{E h^3}{12\,(1-\nu^2)}$

E = módulo de deformación
ν = módulo de Poisson

GT-39 PLACA RECTANGULAR, SIMPLEMENTE APOYADA EN TRES BORDES Y EMPOTRADA EN EL OTRO BAJO CARGA TRIANGULAR CON VALOR MÍNIMO EN EL BORDE EMPOTRADO



ℓ_x/ℓ_y	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
M_{xo}	0,027	0,025	0,023	0,021	0,018	0,016	0,013	0,012	0,0098	0,0082	0,0068	0,0057	0,0047	0,0039	0,0033	0,0027
M_{yo}	0,0029	0,0047	0,0066	0,0084	0,010	0,011	0,012	0,013	0,013	0,013	0,013	0,012	0,012	0,012	0,011	0,011
$M_{x\,max}$	0,027	0,025	0,023	0,021	0,018	0,016	0,013	0,012	0,010	0,009	0,0078	0,0068	0,006	0,0053	0,0047	0,0042
$M_{y\,max}$	0,0051	0,0067	0,0084	0,0093	0,010	0,011	0,012	0,013	0,013	0,013	0,013	0,012	0,012	0,012	0,011	0,011
M_{xa}	-0,065	-0,063	-0,06	-0,056	-0,052	-0,049	-0,045	-0,041	-0,038	-0,034	-0,032	-0,029	-0,027	-0,025	-0,023	-0,021
M_e	±0,017	±0,016	±0,016	±0,016	±0,015	±0,014	±0,013	±0,012	±0,01	±0,0092	±0,0082	+0,0073	±0,0065	±0,0057	±0,0051	±0,0046
W_o	0,0022	0,0020	0,0019	0,0017	0,0015	0,0013	0,0011	0,00096	0,00083	0,0007	0,0006	0,0005	0,0004	0,00038	0,00032	0,00028
W_{max}	0,0022	0,0020	0,0019	0,0017	0,0015	0,0013	0,0011	0,00096	0,00083	0,0007	0,0006	0,0005	0,0004	0,00038	0,00032	0,00028

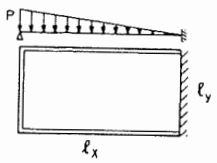
Los coeficientes de las tablas deben multiplicarse por los siguientes factores:

Momentos: $p\,l_x^2$

Flechas: $\dfrac{p\,l_x^4}{D}$

siendo $D = \dfrac{E h^3}{12\,(1-\nu^2)}$

E = módulo de deformación
ν = módulo de Poisson



GT-40 PLACA RECTANGULAR SIMPLEMENTE APOYADA EN TRES BORDES Y EMPOTRADA EN EL OTRO BAJO CARGA TRIANGULAR CON VALOR MÍNIMO EN EL EXTREMO EMPOTRADO

ℓ_x/ℓ_y	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
M_{xo}	0,031	0,028	0,026	0,022	0,019	0,016	0,014	0,011	0,0092	0,0077	0,0064	0,0053	0,0044	0,0036	0,0029	0,0024
M_{yo}	0,0031	0,0058	0,0083	0,010	0,012	0,013	0,014	0,014	0,015	0,014	0,014	0,014	0,013	0,013	0,012	0,011
$M_{x\,max}$	0,038	0,035	0,032	0,028	0,025	0,022	0,019	0,016	0,014	0,012	0,011	0,0091	0,0079	0,0069	0,006	0,0053
$M_{y\,max}$	0,007	0,0082	0,0098	0,011	0,013	0,014	0,015	0,015	0,015	0,015	0,015	0,015	0,014	0,014	0,013	0,013
M_{xa}	-0,056	-0,053	-0,049	-0,045	-0,040	-0,035	-0,031	-0,027	-0,024	-0,021	-0,018	-0,016	-0,014	-0,012	-0,011	-0,0094
M_e	±0,028	±0,028	±0,027	±0,027	±0,026	±0,025	±0,023	±0,021	±0,020	±0,019	±0,017	±0,016	±0,015	±0,014	±0,013	±0,012
W_o	0,0027	0,0025	0,0022	0,0020	0,0017	0,0015	0,0013	0,0011	0,00093	0,00079	0,00067	0,00057	0,00048	0,00041	0,00035	0,0003
W_{max}	0,0028	0,0026	0,0023	0,0021	0,0018	0,0016	0,0014	0,0012	0,0010	0,00085	0,00072	0,00061	0,00052	0,00044	0,00038	0,00033

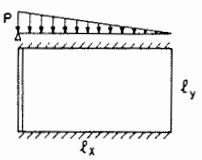
Los coeficientes de las tablas deben multiplicarse por los siguientes factores:

Momentos: $p\,\ell_x^2$

Flechas: $\frac{p\,\ell_x^4}{D}$

siendo $D = \frac{E\,h^3}{12\,(1-\nu^2)}$

E = módulo de deformación
ν = módulo de Poisson



GT-41 PLACA RECTANGULAR EMPOTRADA EN DOS LADOS OPUESTOS, SIMPLEMENTE APOYADA EN UNO Y LIBRE EN EL OTRO BAJO CARGA TRIANGULAR CON VALOR MÍNIMO EN EL BORDE LIBRE

ℓ_x/ℓ_y	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
M_{xo}	0,03	0,021	0,016	0,012	0,0086	0,0063	0,0046	0,0035	0,0025	0,0019	0,0014	0,001	0,00074	0,00052	0,00036	0,00023
M_{yo}	0,019	0,019	0,018	0,017	0,016	0,015	0,013	0,012	0,01	0,0094	0,0084	0,0076	0,0069	0,0062	0,0056	0,0052
M_{ya}	-0,088	-0,072	-0,06	-0,05	-0,043	-0,037	-0,032	-0,028	-0,024	-0,021	-0,018	-0,016	-0,014	-0,013	-0,012	-0,01
$M_{y\ell}$	0,044	0,032	0,024	0,018	0,013	0,0096	0,0072	0,0055	0,0043	0,0034	0,0026	0,0022	0,0018	0,0016	0,0014	0,0012
$M_{y\ell a}$	-0,092	-0,057	-0,038	-0,025	-0,018	-0,012	-0,0087	-0,0062	-0,0047	-0,0037	-0,0029	-0,0024	-0,0021	-0,0018	-0,0015	-0,0013
W_o	0,009	0,0054	0,0033	0,0021	0,0015	0,001	0,00076	0,00056	0,00043	0,00033	0,00025	0,0002	0,00016	0,00013	0,0001	0,000085
W_ℓ	0,011	0,0055	0,0029	0,0016	0,00094	0,00058	0,00037	0,00024	0,00016	0,00011	0,000075	0,000054	0,000039	0,000029	0,000021	0,000016

Los coeficientes de las tablas deben multiplicarse por los siguientes factores:

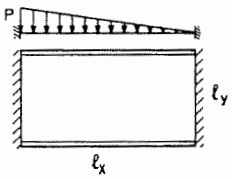
Momentos: $p\,\ell_x^2$

Flechas: $\frac{p\,\ell_x^4}{D}$

siendo $D = \frac{E\,h^3}{12\,(1-\nu^2)}$

E = módulo de deformación
ν = módulo de Poisson

GT-42 PLACA RECTANGULAR SIMPLEMENTE APOYADA EN DOS BORDES OPUESTOS Y EMPOTRADA EN LOS OTROS DOS BAJO CARGA TRIANGULAR QUE VARÍA SEGÚN LOS BORDES APOYADOS



ℓ_x/ℓ_y	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
M_{xo}	0,021	0,02	0,019	0,018	0,016	0,014	0,013	0,011	0,0094	0,0081	0,0069	0,0059	0,0049	0,0041	0,0035	0,0029
M_{yo}	0,0009	0,0021	0,0036	0,0052	0,0067	0,0079	0,009	0,0098	0,01	0,011	0,011	0,011	0,011	0,011	0,01	0,01
$M_{x\,max}$	0,021	0,020	0,019	0,018	0,016	0,015	0,013	0,012	0,011	0,0093	0,0081	0,007	0,0061	0,0053	0,0047	0,0042
$M_{y\,max}$	0,0037	0,0048	0,006	0,0069	0,0075	0,0079	0,009	0,0098	0,01	0,011	0,011	0,011	0,011	0,011	0,01	0,01
M^{M}_{xa}	-0,051	-0,051	-0,049	-0,047	-0,045	-0,043	-0,041	-0,038	-0,036	-0,034	-0,031	-0,029	-0,026	-0,024	-0,022	-0,020
M^{m}_{xa}	-0,034	-0,033	-0,032	-0,031	-0,029	-0,027	-0,024	-0,022	-0,019	-0,017	-0,015	-0,014	-0,012	-0,011	-0,01	-0,0094
W_o	0,0013	0,0013	0,0012	0,0011	0,0011	0,00096	0,00087	0,00077	0,00068	0,0006	0,00053	0,00046	0,0004	0,00035	0,0003	0,00026
W_{max}	0,0013	0,0013	0,0012	0,0011	0,0011	0,00096	0,00087	0,00077	0,00068	0,0006	0,00053	0,00046	0,0004	0,00035	0,0003	0,00026

Los coeficientes de las tablas deben multiplicarse por los siguientes factores:

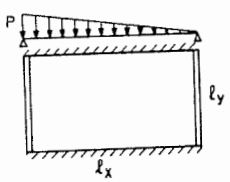
Momentos: $p\,l_x^2$

Flechas: $\dfrac{p\,l_x^4}{D}$

siendo $D = \dfrac{E\,h^3}{12\,(1-\nu^2)}$

E = módulo de deformación
ν = módulo de Poisson

GT-43 PLACA RECTANGULAR SIMPLEMENTE APOYADA EN DOS BORDES OPUESTOS Y EMPOTRADA EN LOS OTROS DOS, BAJO CARGA TRIANGULAR QUE VARÍA SEGÚN UN BORDE EMPOTRADO



ℓ_x/ℓ_y	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
M_{xo}	0,04	0,03	0,02	0,016	0,011	0,0079	0,0056	0,0039	0,0028	0,002	0,0014	0,00098	0,00068	0,00048	0,00034	0,00023
M_{yo}	0,012	0,015	0,016	0,016	0,015	0,014	0,013	0,012	0,011	0,0096	0,0086	0,0077	0,007	0,0063	0,0057	0,0052
$M_{x\,max}$	0,043	0,033	0,025	0,020	0,016	0,013	0,011	0,0089	0,0073	0,006	0,0049	0,004	0,0033	0,0028	0,0023	0,0019
$M_{y\,max}$	0,012	0,015	0,016	0,016	0,015	0,014	0,013	0,012	0,011	0,011	0,0096	0,0088	0,0081	0,0073	0,0067	0,0062
M_{ya}	-0,06	-0,056	-0,051	-0,045	-0,04	-0,035	-0,031	-0,027	-0,024	-0,021	-0,018	-0,016	-0,015	-0,013	-0,012	-0,011
$M_{ya\,max}$	-0,06	-0,056	-0,052	-0,048	-0,042	-0,038	-0,033	-0,029	-0,026	-0,024	-0,022	-0,02	-0,018	-0,017	-0,015	-0,014
W_o	0,0042	0,0032	0,0024	0,0018	0,0013	0,00096	0,00072	0,00054	0,00041	0,00031	0,00024	0,00019	0,00015	0,00012	0,0001	0,000082
W_{max}	0,0042	0,0032	0,0024	0,0018	0,0013	0,00098	0,00076	0,00059	0,00045	0,00035	0,00028	0,00022	0,00018	0,00015	0,00012	0,0001

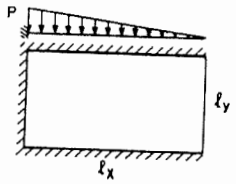
Los coeficientes de las tablas deben multiplicarse por los siguientes factores:

Momentos: $p\,l_x^2$

Flechas: $\dfrac{p\,l_x^4}{D}$

siendo $D = \dfrac{E\,h^3}{12\,(1-\nu^2)}$

E = módulo de deformación
ν = módulo de Poisson



GT-44 PLACA RECTANGULAR EMPOTRADA EN TRES LADOS Y LIBRE EN EL OTRO, BAJO UNA CARGA TRIANGULAR CON VALOR MÁXIMO EN EL BORDE EMPOTRADO Y MÍNIMO EN EL LIBRE

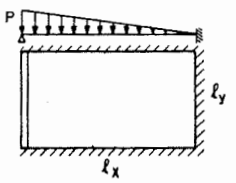
ℓ_x/ℓ_y	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
M_{xo}	0,013	0,014	0,013	0,01	0,0088	0,007	0,0056	0,0044	0,0034	0,0025	0,0018	0,0014	0,001	0,00077	0,00057	0,0004
M_{yo}	0,014	0,014	0,014	0,013	0,013	0,012	0,01	0,0093	0,0084	0,0077	0,007	0,0065	0,006	0,0057	0,0054	0,0051
M_{xa}	−0,085	−0,068	−0,057	−0,048	−0,041	−0,035	−0,03	−0,026	−0,023	−0,021	−0,019	−0,017	−0,015	−0,014	−0,013	−0,012
M_{ya}	−0,05	−0,046	−0,042	−0,037	−0,033	−0,03	−0,026	−0,023	−0,021	−0,019	−0,017	−0,015	−0,014	−0,012	−0,011	−0,01
$M_{y\ell}$	0,026	0,022	0,018	0,015	0,012	0,0091	0,0069	0,0053	0,0041	0,0032	0,0025	0,0021	0,0018	0,0015	0,0013	0,0012
$M_{y\ell a}$	−0,066	−0,046	−0,033	−0,024	−0,017	−0,012	−0,0085	−0,0061	−0,0046	−0,0036	−0,0028	−0,0024	−0,002	−0,0017	−0,0015	−0,0013
W_o	0,0043	0,0029	0,002	0,0014	0,0011	0,00081	0,00062	0,00048	0,00038	0,0003	0,00024	0,00018	0,00015	0,00012	0,000096	0,000079
W_ℓ	0,007	0,0039	0,0023	0,0014	0,00085	0,00053	0,00034	0,00022	0,00015	0,0001	0,000069	0,00005	0,000037	0,000028	0,000021	0,000016

Los coeficientes de las tablas deben multiplicarse por los siguientes factores:

Momentos: $p\,l_x^2$

Flechas: $\dfrac{p\,l_x^4}{D}$

siendo $D = \dfrac{E\,h^3}{12\,(1-\nu^2)}$ E = módulo de deformación
ν = módulo de Poisson



GT-45 PLACA RECTANGULAR, SIMPLEMENTE APOYADA EN UN BORDE Y EMPOTRADA EN LOS OTROS TRES, BAJO CARGA TRIANGULAR CON VALOR MÁXIMO EN EL BORDE APOYADO

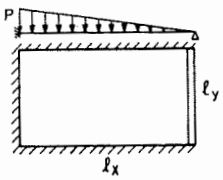
ℓ_x/ℓ_y	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
M_{xo}	0,028	0,024	0,019	0,015	0,011	0,0083	0,0059	0,0041	0,0029	0,0021	0,0015	0,0011	0,00077	0,00055	0,00034	0,00025
M_{yo}	0,0054	0,0085	0,011	0,012	0,012	0,012	0,012	0,011	0,01	0,0092	0,0083	0,0075	0,0068	0,0062	0,0056	0,0052
$M_{x\,max}$	0,035	0,030	0,025	0,021	0,017	0,014	0,011	0,0093	0,0075	0,0063	0,0052	0,0041	0,0038	0,0032	0,0028	0,0025
$M_{y\,max}$	0,0065	0,0087	0,011	0,013	0,013	0,013	0,012	0,012	0,011	0,01	0,0095	0,0087	0,008	0,0073	0,0067	0,0062
M_{ya}	−0,042	−0,041	−0,040	−0,038	−0,035	−0,031	−0,028	−0,025	−0,022	−0,02	−0,018	−0,016	−0,013	−0,012	−0,011	−0,011
$M_{ya\,max}$	−0,047	−0,046	−0,045	−0,042	−0,039	−0,036	−0,033	−0,03	−0,027	−0,024	−0,022	−0,02	−0,019	−0,017	−0,016	−0,015
M_{xa}	−0,052	−0,047	−0,039	−0,032	−0,026	−0,021	−0,016	−0,013	−0,01	−0,0083	−0,0068	−0,0055	−0,0046	−0,0039	−0,0033	−0,0028
W_o	0,0025	0,0021	0,0017	0,0014	0,0011	0,00083	0,00064	0,0005	0,00038	0,0003	0,00024	0,00019	0,00015	0,00012	0,000099	0,000081
W_{max}	0,0026	0,0022	0,0018	0,0015	0,0012	0,00090	0,00072	0,00057	0,00044	0,00034	0,00027	0,00021	0,00017	0,00014	0,00011	0,000093

Los coeficientes de las tablas deben multiplicarse por los siguientes factores:

Momentos: $p\,l_x^2$

Flechas: $\dfrac{p\,l_x^4}{D}$

siendo $D = \dfrac{E\,h^3}{12\,(1-\nu^2)}$ E = módulo de deformación
ν = módulo de Poisson



GT-46 PLACA RECTANGULAR SIMPLEMENTE APOYADA EN UN BORDE Y EMPOTRADA EN LOS OTROS, BAJO CARGA TRIANGULAR CON VALOR MÁXIMO EN EL BORDE EMPOTRADO Y MÍNIMO EN EL APOYADO

ℓ_x/ℓ_y	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
M_{xo}	0,025	0,022	0,018	0,014	0,011	0,009	0,0067	0,0052	0,0039	0,0028	0,0021	0,0015	0,0011	0,0008	0,00059	0,00043
M_{yo}	0,0044	0,0068	0,0089	0,010	0,011	0,011	0,01	0,0098	0,0092	0,0085	0,0078	0,0072	0,0066	0,006	0,0055	0,0051
$M_{x\,max}$	0,025	0,022	0,018	0,014	0,012	0,0095	0,0079	0,0066	0,0056	0,0048	0,0041	0,0036	0,0032	0,0028	0,0025	0,0023
$M_{y\,max}$	0,0058	0,0068	0,0089	0,01	0,011	0,011	0,01	0,0098	0,0092	0,0085	0,0079	0,0074	0,0069	0,0065	0,0061	0,0058
M_{ya}	-0,036	-0,036	-0,035	-0,033	-0,031	-0,028	-0,026	-0,024	-0,021	-0,019	-0,017	-0,015	-0,014	-0,013	-0,011	-0,01
$M_{ya\,max}$	-0,036	-0,036	-0,035	-0,033	-0,031	-0,029	-0,027	-0,025	-0,023	-0,021	-0,019	-0,018	-0,016	-0,015	-0,014	-0,012
M_{xa}	-0,062	-0,058	-0,052	-0,045	-0,04	-0,035	-0,03	-0,026	-0,023	-0,021	-0,019	-0,017	-0,015	-0,014	-0,012	-0,011
W_o	0,002	0,0017	0,0015	0,0012	0,00095	0,00074	0,00059	0,00046	0,00036	0,00028	0,00022	0,00017	0,00014	0,00011	0,000094	0,000078
W_{max}	0,002	0,0017	0,0015	0,0012	0,00095	0,00074	0,00059	0,00046	0,00036	0,00028	0,00023	0,00018	0,00015	0,00012	0,0001	0,000088

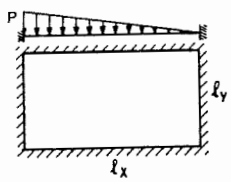
Los coeficientes de las tablas deben multiplicarse por los siguientes factores:

Momentos: $p\,\ell_x^2$

Flechas: $\dfrac{p\,\ell_x^4}{D}$

siendo $D = \dfrac{E\,h^3}{12\,(1-\nu^2)}$

E = módulo de deformación
ν = módulo de Poisson



GT-47 PLACA RECTANGULAR CON TODOS LOS BORDES EMPOTRADOS BAJO CARGA TRIANGULAR

ℓ_x/ℓ_y	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
M_{xo}	0,02	0,018	0,016	0,014	0,011	0,0088	0,0069	0,0053	0,004	0,0031	0,0023	0,0017	0,0012	0,0009	0,00066	0,00048
M_{yo}	0,0019	0,0038	0,0058	0,0072	0,0083	0,0088	0,009	0,0088	0,0085	0,008	0,0075	0,007	0,0064	0,0059	0,0054	0,005
$M_{x\,max}$	0,02	0,018	0,016	0,014	0,012	0,01	0,0086	0,0071	0,0058	0,0048	0,0041	0,0036	0,0032	0,0028	0,0025	0,0023
$M_{y\,max}$	0,005	0,0052	0,0058	0,0072	0,0083	0,0088	0,009	0,0088	0,0086	0,0082	0,0078	0,0073	0,0069	0,0064	0,006	0,0056
M_{ya}	-0,028	-0,028	-0,028	-0,028	-0,027	-0,026	-0,024	-0,022	-0,020	-0,018	-0,017	-0,015	-0,014	-0,012	-0,011	-0,01
$M_{ya\,max}$	-0,029	-0,03	-0,03	-0,029	-0,029	-0,027	-0,026	-0,024	-0,022	-0,021	-0,019	-0,018	-0,016	-0,015	-0,014	-0,013
M_{xa}^{M}	-0,05	-0,048	-0,045	-0,041	-0,037	-0,033	-0,03	-0,026	-0,023	-0,021	-0,018	-0,017	-0,015	-0,013	-0,012	-0,011
M_{xa}^{m}	-0,033	-0,031	-0,028	-0,025	-0,021	-0,018	-0,015	-0,012	-0,0099	-0,0082	-0,0067	-0,0055	-0,0046	-0,0038	-0,0032	-0,0028
W_o	0,0013	0,0012	0,001	0,00092	0,00078	0,00064	0,00052	0,00042	0,00034	0,00027	0,00021	0,00017	0,00014	0,00012	0,000095	0,000078
W_{max}	0,0013	0,0012	0,001	0,00092	0,00078	0,00064	0,00052	0,00042	0,00034	0,00027	0,00022	0,00018	0,00015	0,00012	0,0001	0,000087

Los coeficientes de las tablas deben multiplicarse por los siguientes factores:

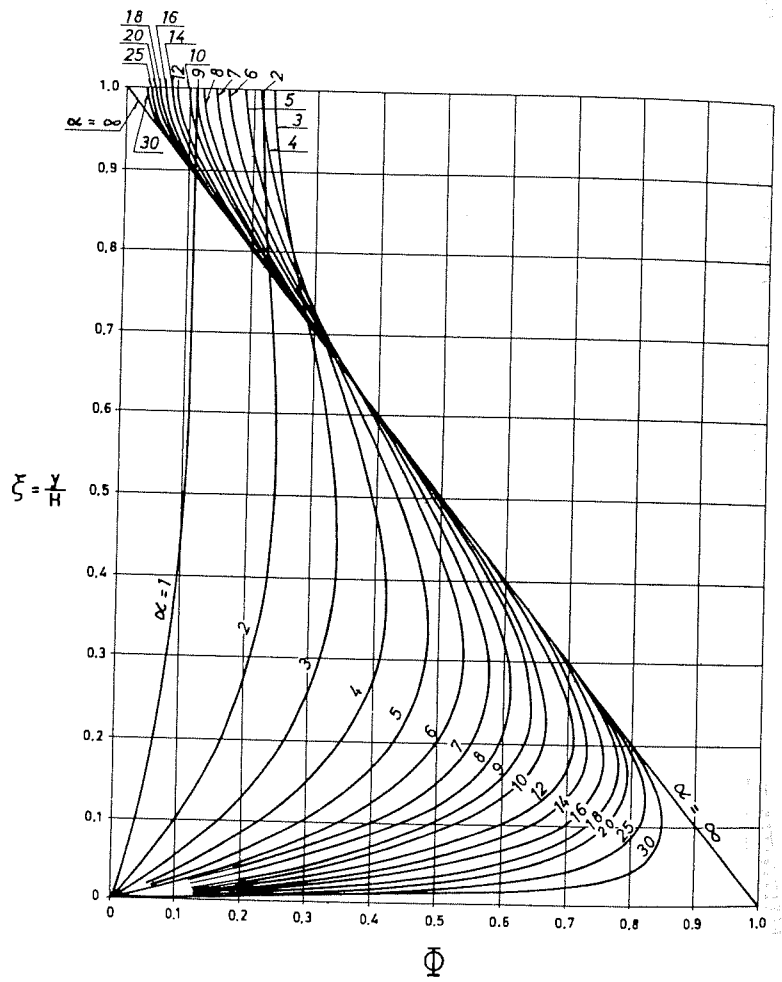
Momentos: $p\,\ell_x^2$

Flechas: $\dfrac{p\,\ell_x^4}{D}$

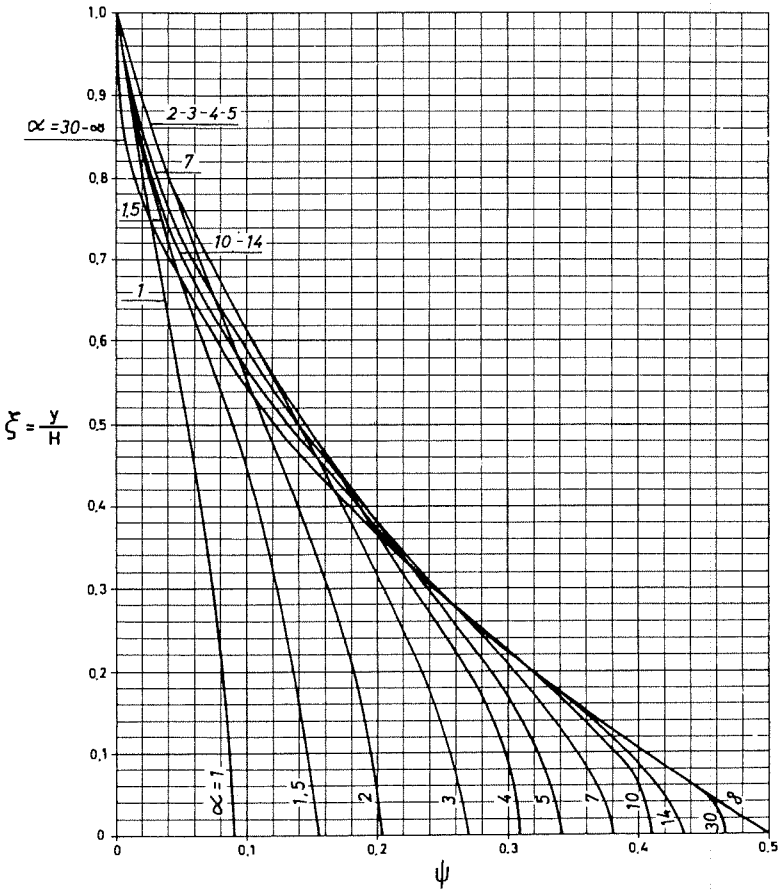
siendo $D = \dfrac{E\,h^3}{12\,(1-\nu^2)}$

E = módulo de deformación
ν = módulo de Poisson

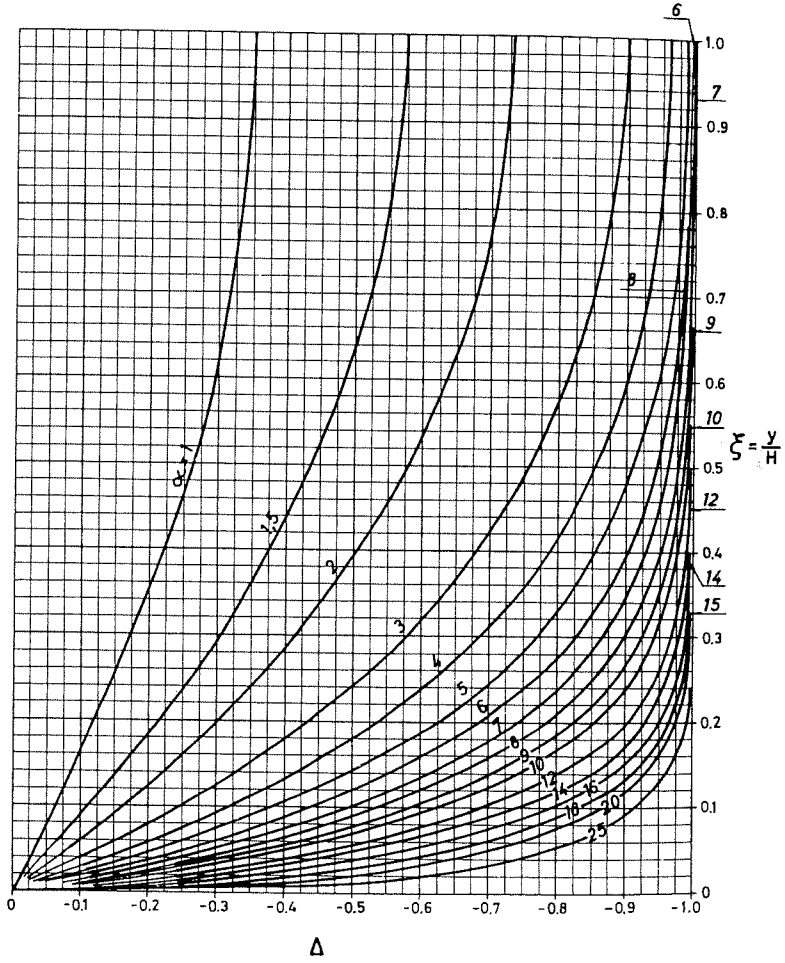
GT-48
PANTALLAS CON HUECOS - VALORES DEL COEFICIENTE Φ



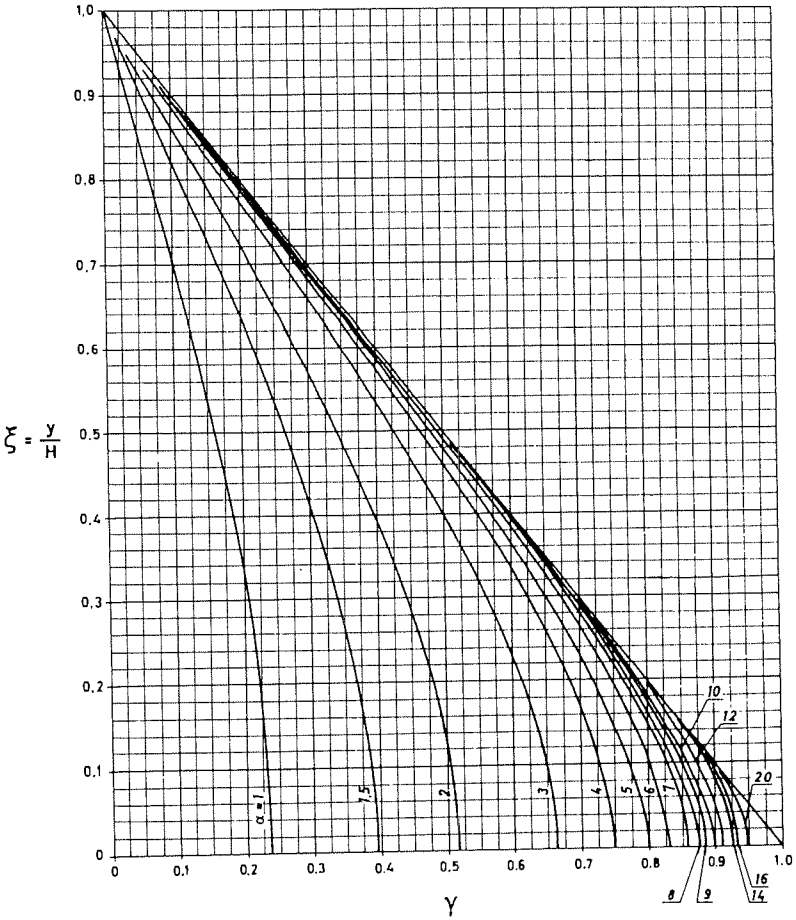
GT-49
PANTALLAS CON HUECOS - VALORES DEL COEFICIENTE Ψ



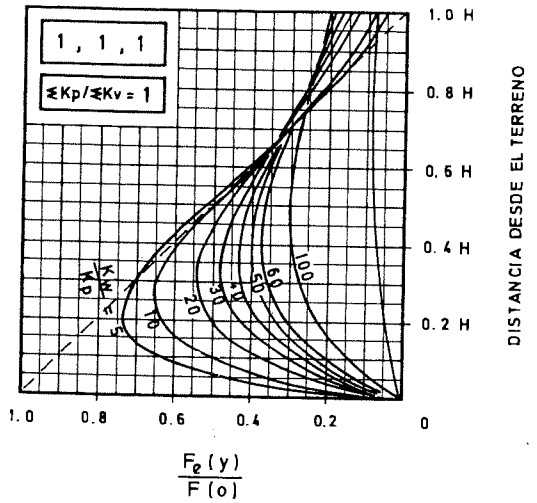
GT-50
PANTALLAS CON HUECOS - VALORES DEL COEFICIENTE Δ



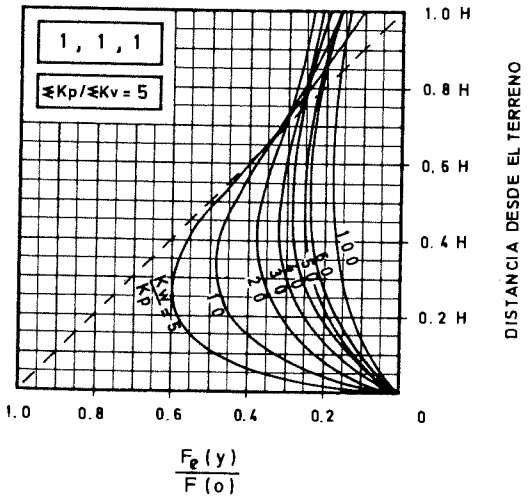
GT-51
PANTALLAS CON HUECOS - VALORES DEL COEFICIENTE γ



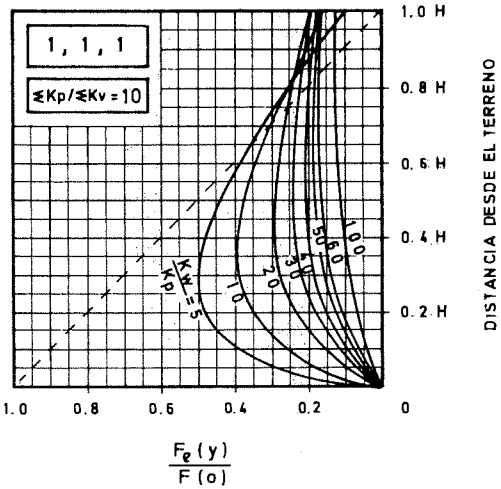
GT-52
CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA EN TODA LA ALTURA



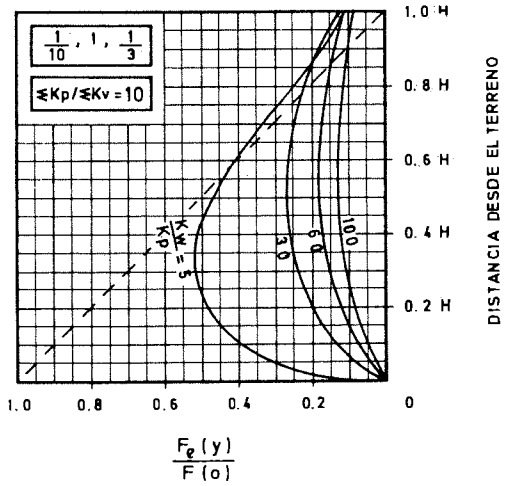
GT-53
CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA EN TODA LA ALTURA



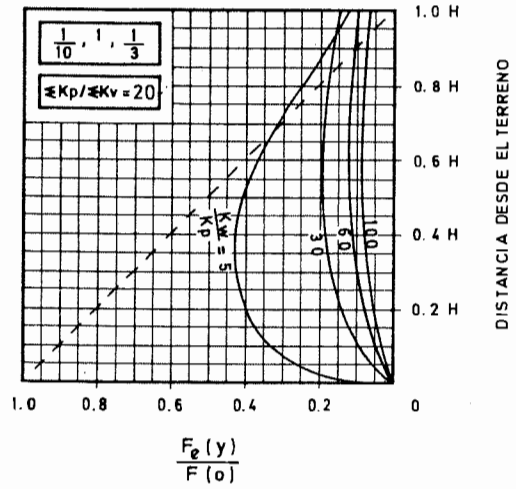
GT-54
CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA EN TODA LA ALTURA



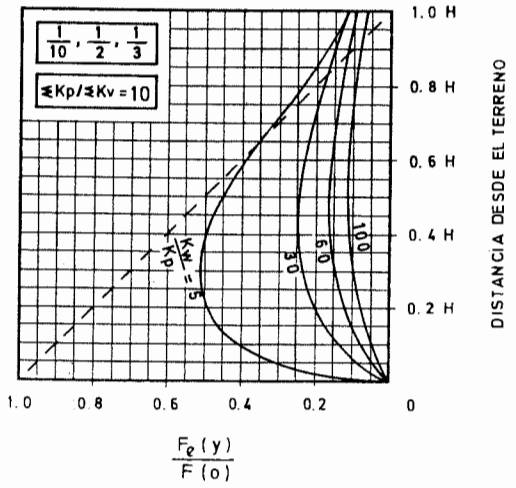
GT-55
CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA EN TODA LA ALTURA



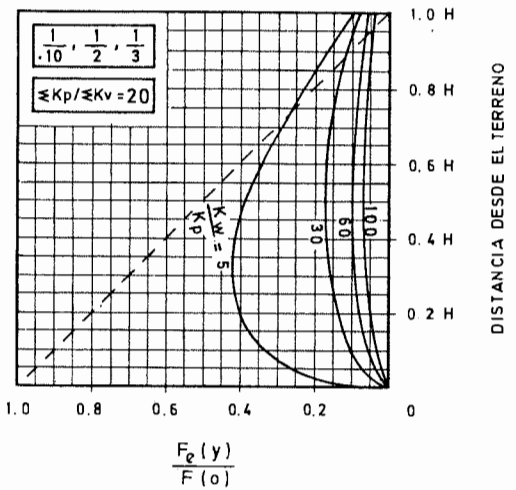
GT-56
CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA EN TODA LA ALTURA



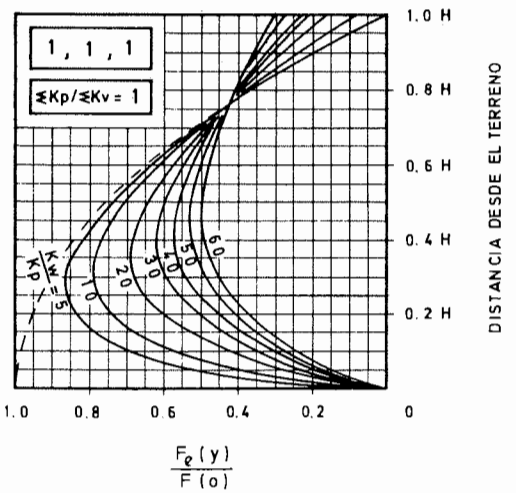
GT-57
CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA EN TODA LA ALTURA



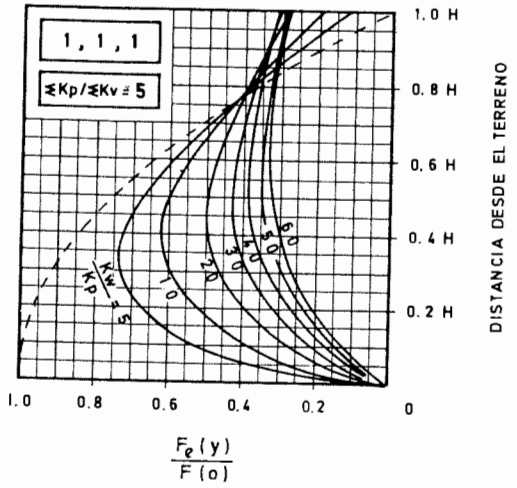
GT-58
CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA EN TODA LA ALTURA



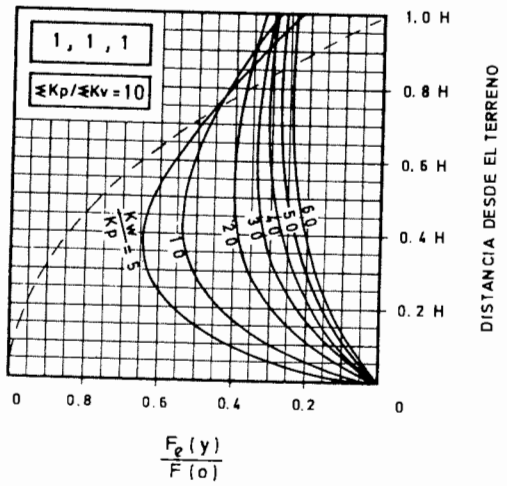
GT-59
DISTRIBUCIÓN TRIANGULAR DE CARGAS



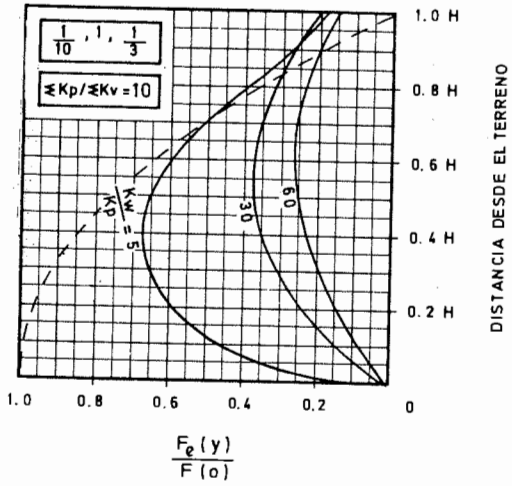
GT-60
DISTRIBUCIÓN TRIANGULAR DE CARGAS



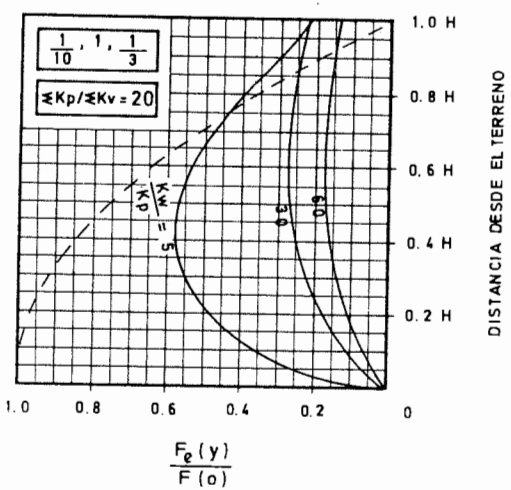
GT-61
DISTRIBUCIÓN TRIANGULAR DE CARGAS



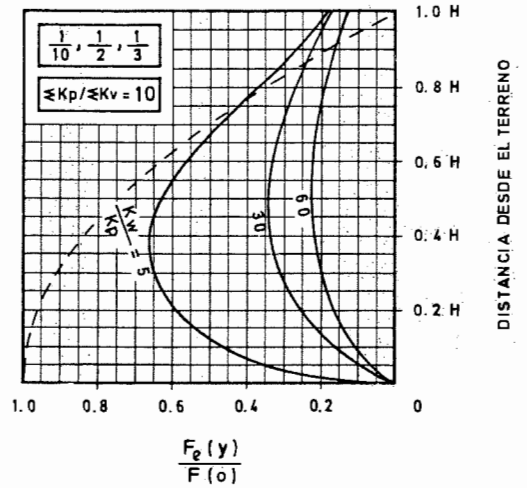
GT-62
DISTRIBUCIÓN TRIANGULAR DE CARGAS



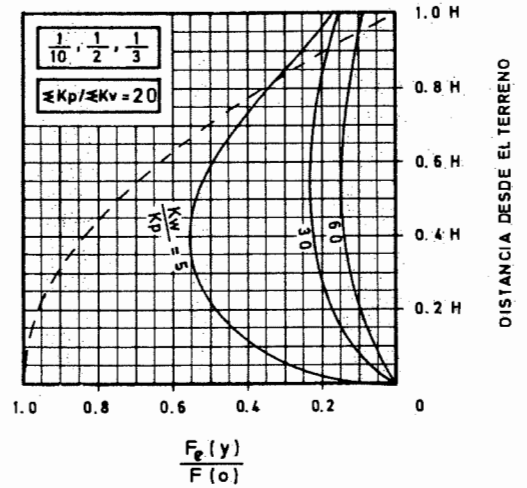
GT-63
DISTRIBUCIÓN TRIANGULAR DE CARGAS



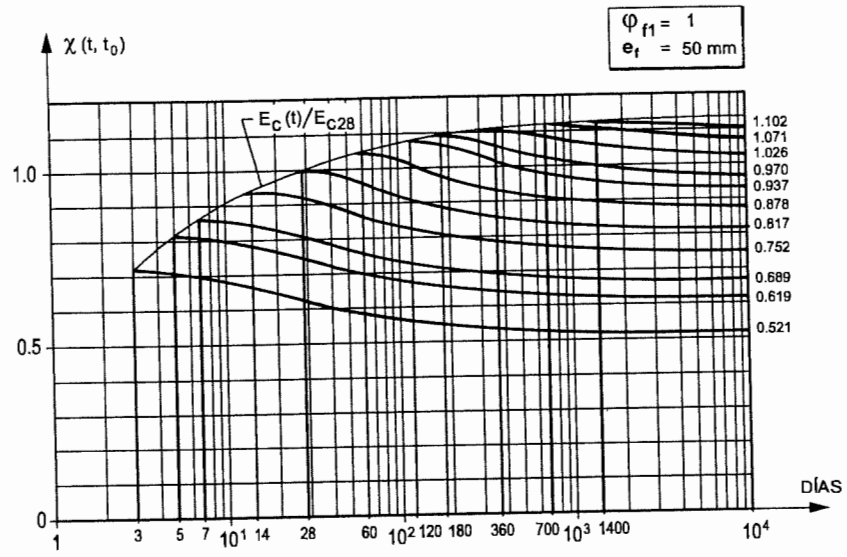
GT-64
DISTRIBUCIÓN TRIANGULAR DE CARGAS



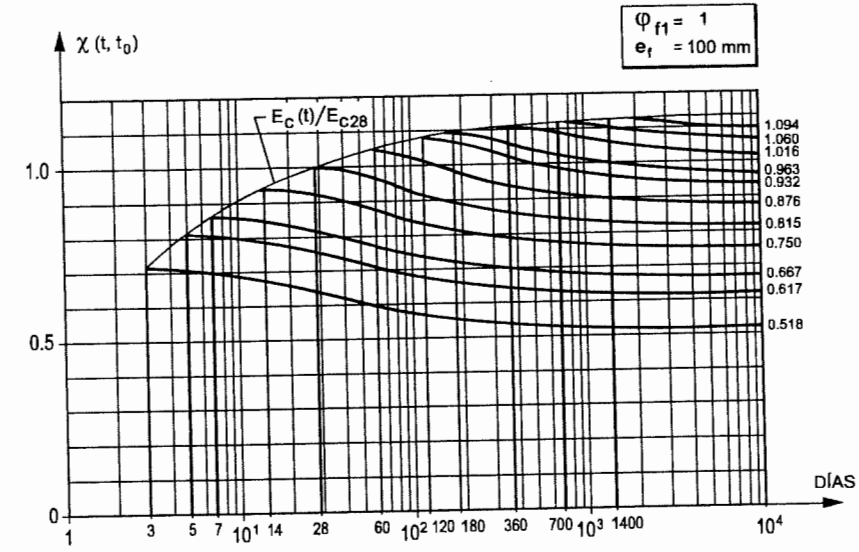
GT-65
DISTRIBUCIÓN TRIANGULAR DE CARGAS



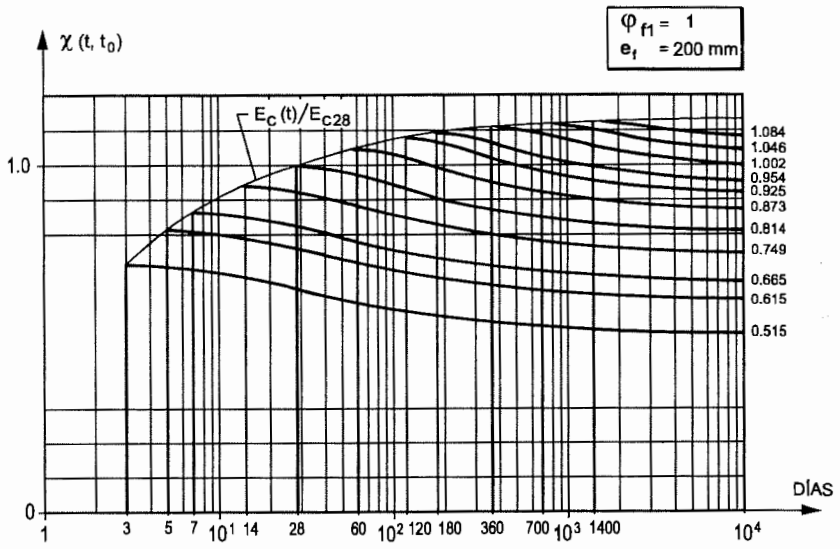
GT-66



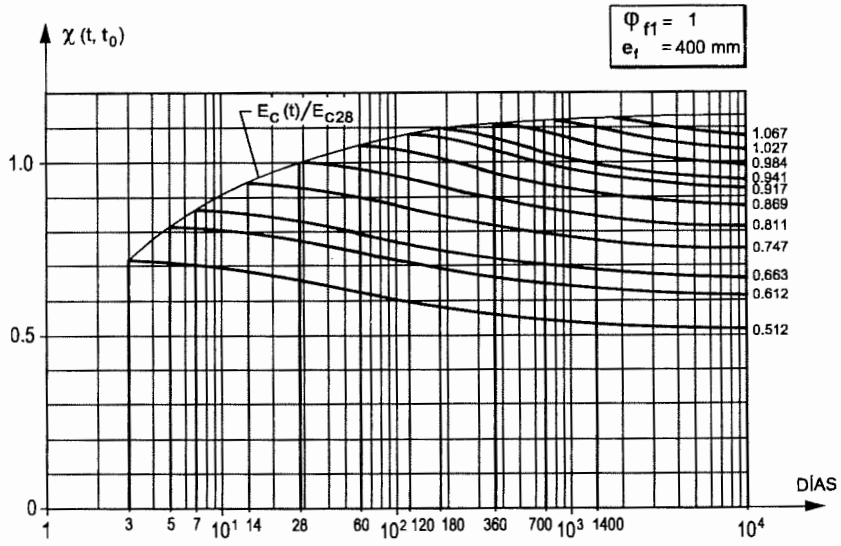
GT-67



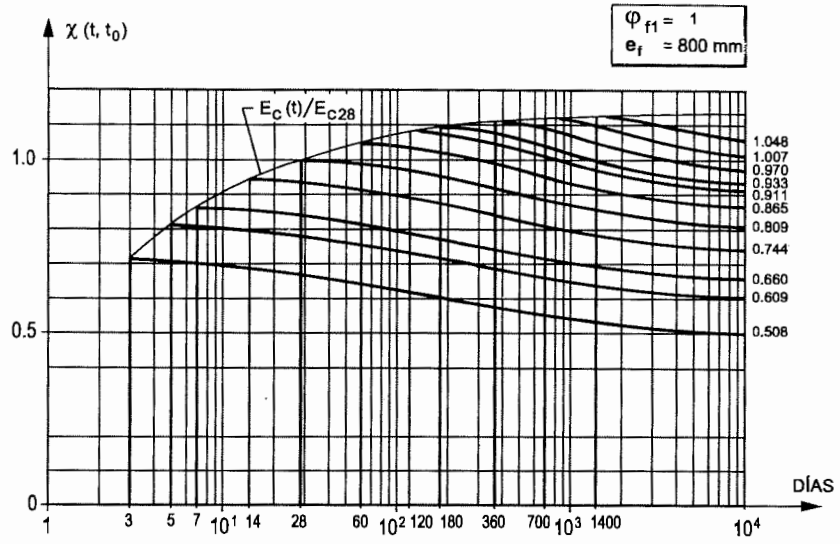
GT-68



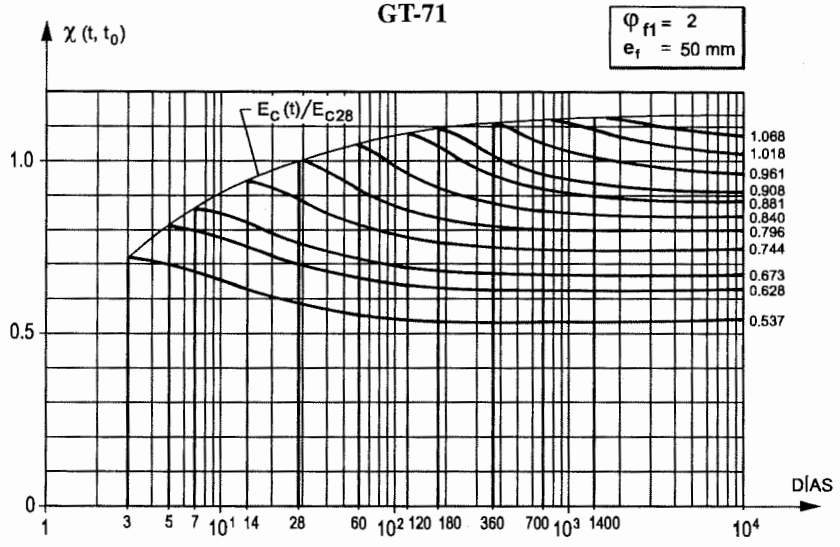
GT-69



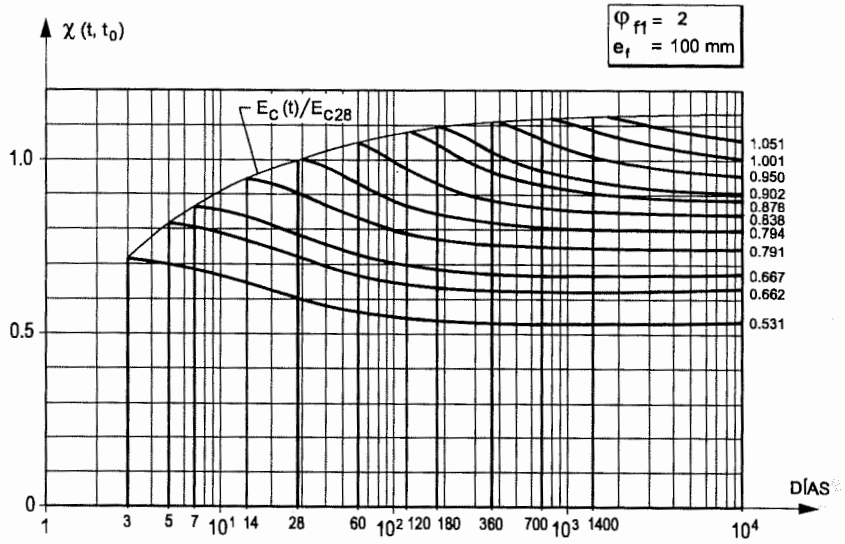
GT-70



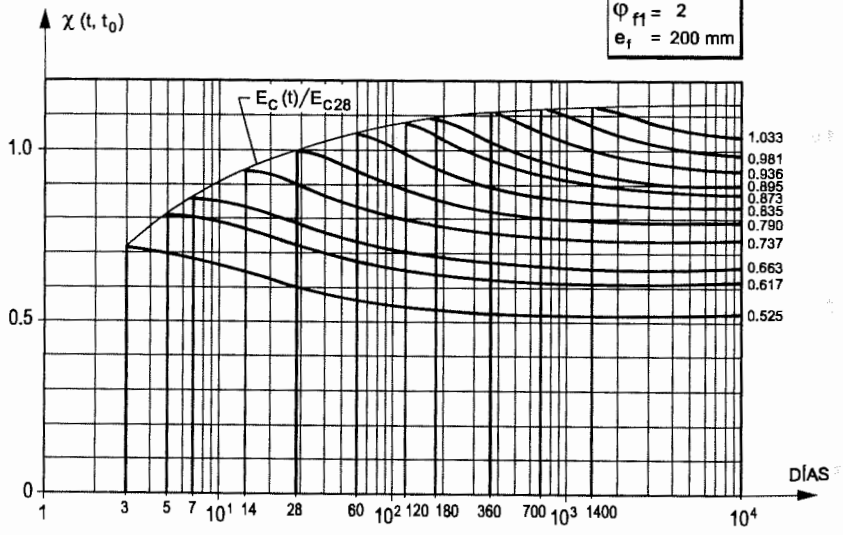
GT-71



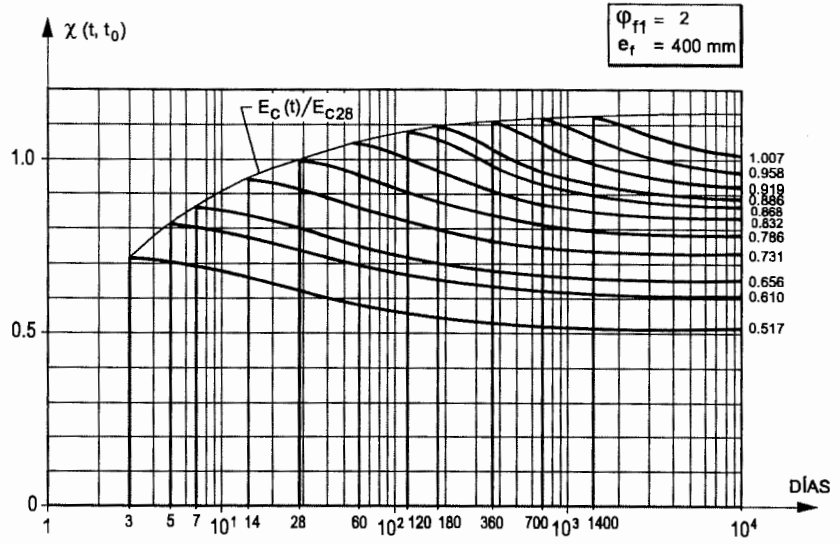
GT-72



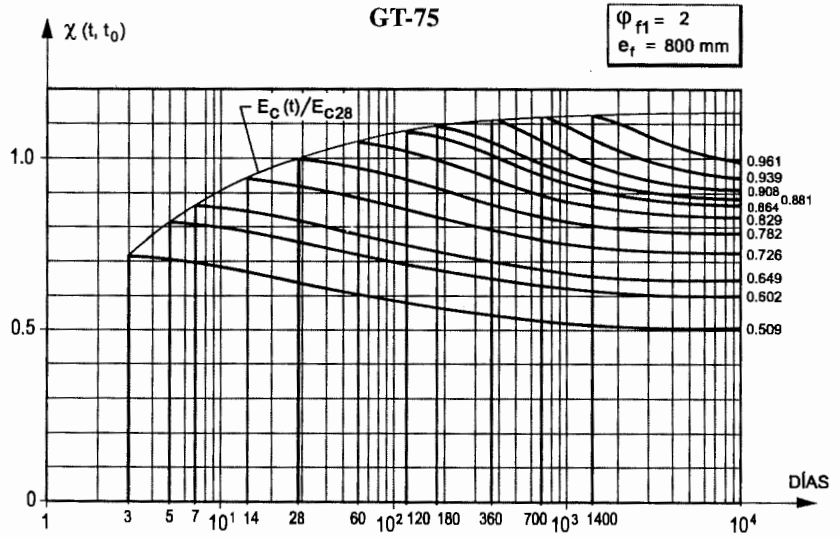
GT-73



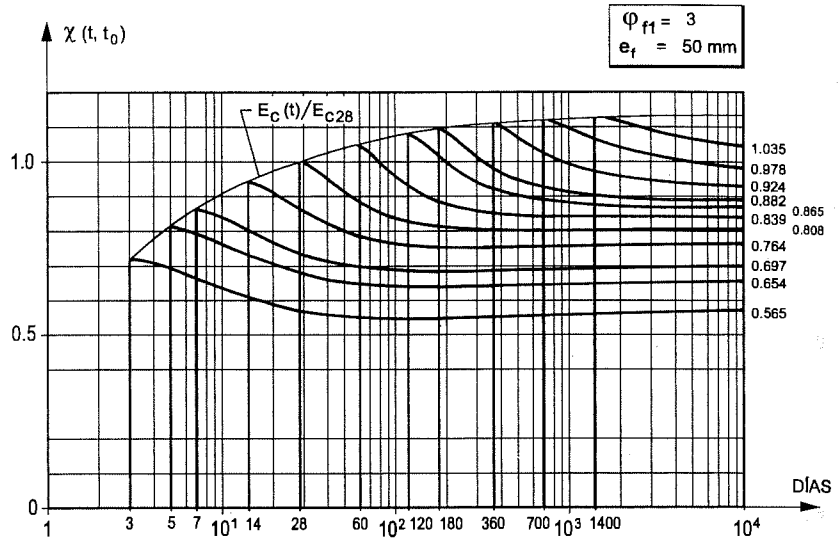
GT-74



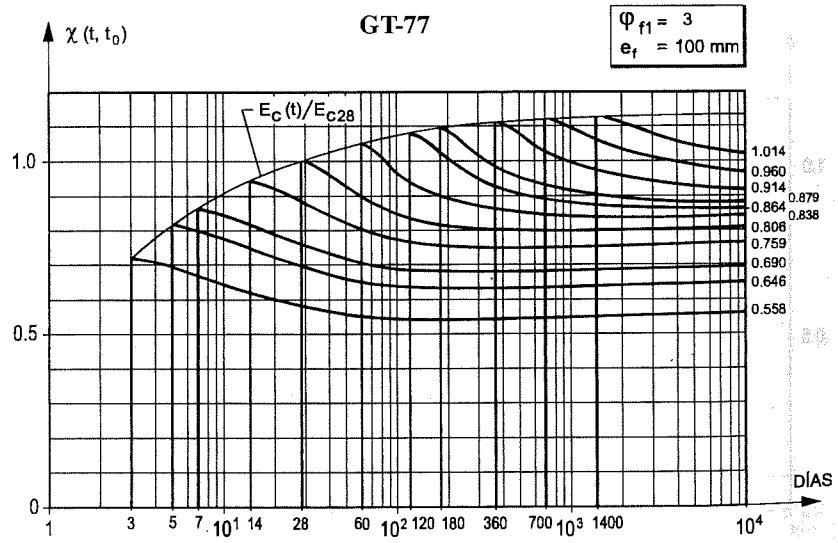
GT-75



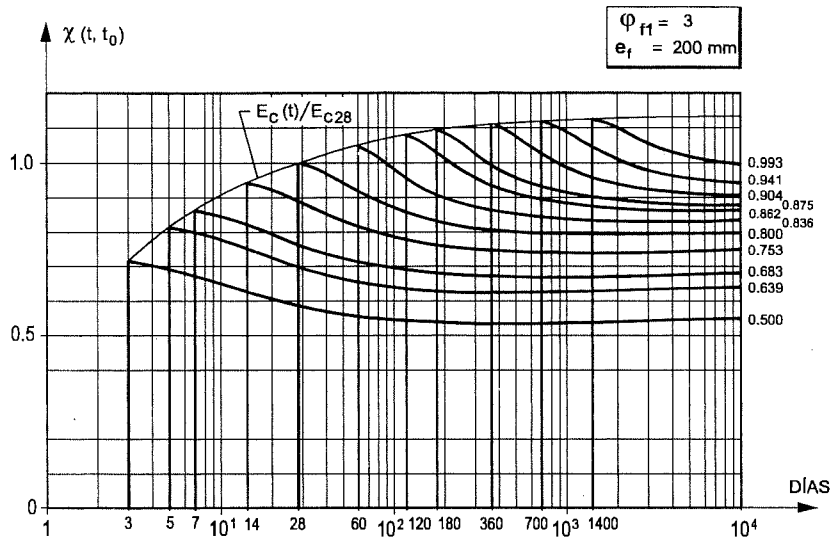
GT-76



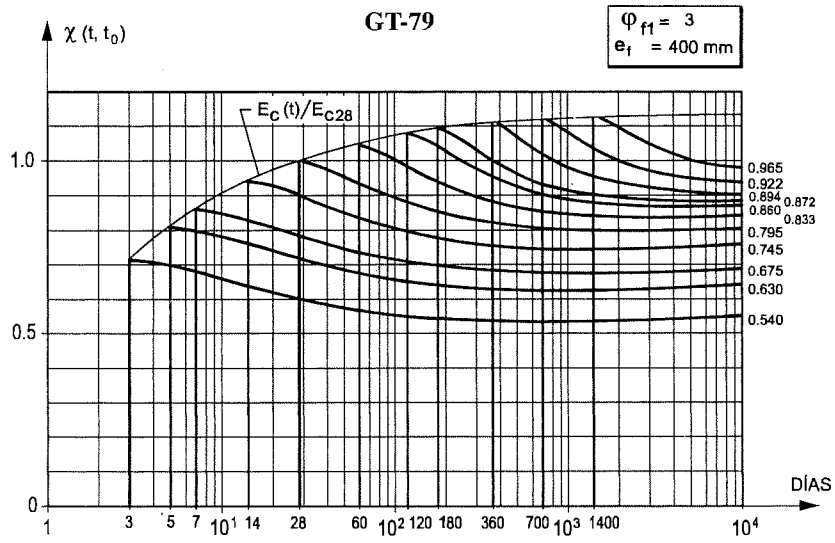
GT-77

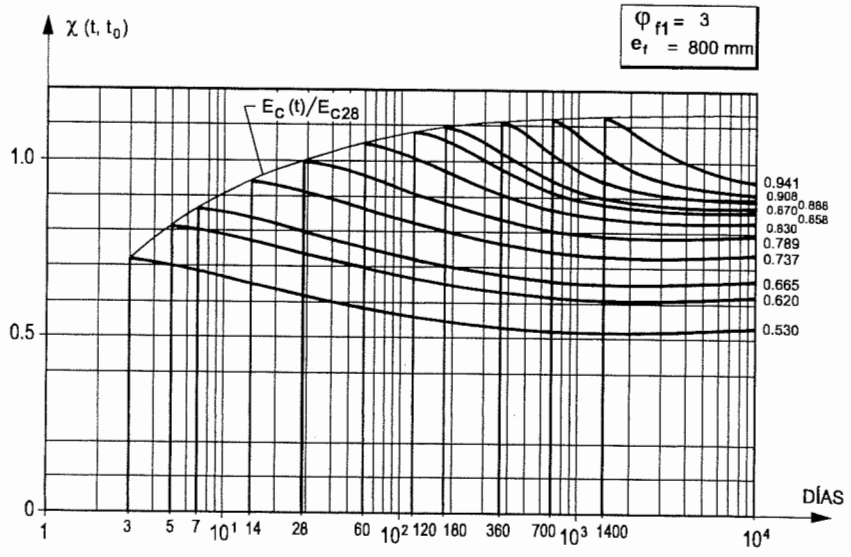


GT-78



GT-79





INDICE DE MATERIAS
TOMO I

ÍNDICE DE MATERIAS

Páginas

PRÓLOGO 5
NOTACIONES Y UNIDADES 9

CAPÍTULO 1. PLANTEAMIENTO ESTRUCTURAL DEL EDIFICIO 13
1.1 INTRODUCCIÓN 13
1.2 TIPOS DE CONSTRUCCIONES 14
1.3 EXIGENCIAS DE COMPORTAMIENTO 16
1.4 ACCIONES SOBRE LA ESTRUCTURA 17
1.5 SISTEMAS ESTRUCTURALES 18
1.5.1 SISTEMAS ESTRUCTURALES ADECUADOS PARA RESISTIR ACCIONES VERTICALES 18
1.5.2 SISTEMAS ESTRUCTURALES ADECUADOS PARA RESISTIR ACCIONES HORIZONTALES 20

CAPÍTULO 2. DEFINICIÓN DE ESFUERZOS Y ENLACES 25
2.1 ESFUERZOS 25
2.2 ENLACES 27
2.3 DEFORMABILIDAD DE APOYOS 29

CAPÍTULO 3. COEFICIENTES ELÁSTICOS 31
3.1 INTRODUCCIÓN. MÉTODOS DE CÁLCULO LINEAL 31
3.2 ECUACIÓN DE LA ELÁSTICA DE UNA PIEZA RECTA 31
3.3 TEOREMAS DE MOHR 34
3.3.1 PRIMER TEOREMA DE MOHR 35
3.3.2 SEGUNDO TEOREMA DE MOHR 36
3.4 PIEZA RECTA, EMPOTRADA POR SUS EXTREMOS, DE SECCIÓN *EI* VARIABLE 37
3.5 COEFICIENTES ELÁSTICOS 40
3.5.1 FACTOR DE TRANSMISIÓN 41
3.5.2 RIGIDEZ DE LA PIEZA EMPOTRADA 41
3.5.3 RIGIDEZ DE LA PIEZA ARTICULADA 42

CAPÍTULO 4. CÁLCULO DE ESTRUCTURAS INTRASLACIONALES. MÉTODO DE CROSS 45
4.1 ENTRAMADOS INTRASLACIONALES 45
4.2 PLANTEAMIENTO GENERAL DEL PROBLEMA. MÉTODO GENERAL DE CÁLCULO 45
4.2.1 RELACIÓN ENTRE LOS COEFICIENTES ELÁSTICOS 45
4.2.2 ECUACIONES GENERALES DE LA PIEZA ELÁSTICAMENTE EMPOTRADA 46
4.2.3 MÉTODO GENERAL DE CÁLCULO 48
4.3 MÉTODO DE CROSS 49
4.3.1 VENTAJAS DEL MÉTODO 50
4.3.2 EXTREMOS ARTICULADOS, EXTREMOS PERFECTAMENTE EMPOTRADOS Y CASOS INTERMEDIOS 51
4.3.3 MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO Y MOMENTOS FLECTORES 52

4.3.4 REACCIONES Y ESFUERZOS TOTALES ... 53
4.3.5 CASO DE ENTRAMADO CON VOLADIZOS ... 54
4.3.6 EJEMPLOS DE APLICACIÓN ... 55
4.3.7 SIMPLIFICACIONES POR SIMETRÍA Y ANTIMETRÍA. TEOREMA DE ANDRÉE ... 61
4.3.8 RIGIDEZ VIRTUAL EN EL CASO DE SIMETRÍA ... 61
4.3.9 RIGIDEZ VIRTUAL EN EL CASO DE ANTIMETRÍA ... 62
4.3.10 ENTRAMADOS REDUCIDOS EN CASO DE SIMETRÍA ... 63
4.3.11 ENTRAMADOS REDUCIDOS EN CASO DE ANTIMETRÍA ... 63
4.3.12 ORDENACIÓN PRÁCTICA DE LOS CÁLCULOS ... 66
4.3.13 COMPROBACIÓN DE LOS CÁLCULOS ... 66

CAPÍTULO 5. MÉTODOS CLÁSICOS DE CÁLCULO DE ESTRUCTURAS TRASLACIONALES ... 69
5.1 ENTRAMADOS TRASLACIONALES ... 69
5.1.1 MOMENTOS INDUCIDOS POR LA TRASLACIÓN DE UN APOYO ... 70
5.1.2 CAUSAS DE TRASLACIONALIDAD ... 71
5.1.3 PLANTEAMIENTO GENERAL DEL PROBLEMA ... 72
5.1.4 MÉTODO DE CROSS ... 73
5.1.4.1 ASIENTO DE APOYOS ... 73
5.1.4.2 EFECTOS TERMOHIGROMÉTRICOS ... 78
5.1.4.3 ACCIONES EXTERIORES ... 85

CAPÍTULO 6. ESTRUCTURAS CON APOYOS ELÁSTICOS Y EMPOTRAMIENTOS FLEXIBLES ... 93
6.1 APOYOS ELÁSTICOS ... 93
6.1.1 APOYOS CON TRASLACIONES ELÁSTICAS ... 93
6.2 APOYOS CON EMPOTRAMIENTO FLEXIBLES ... 100
6.3 EMPOTRAMIENTOS FLEXIBLES ... 101
6.3.1 RIGIDEZ Y FACTOR DE TRANSMISIÓN EN EL CASO DE EMPOTRAMIENTOS FLEXIBLES ... 102
6.3.1.1 PIEZA BIEMPOTRADA CON EMPOTRAMIENTOS FLEXIBLES EN LOS DOS EXTREMOS ... 103
6.3.1.2 PIEZA BIEMPOTRADA CON EMPOTRAMIENTO FLEXIBLE EN UN EXTREMO ... 105
6.3.1.3 PIEZA ARTICULADA CON EMPOTRAMIENTO FLEXIBLE ... 105
6.3.2 MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO DE LA PIEZA BIEMPOTRADA CON EMPOTRAMIENTOS FLEXIBLES EN AMBOS EXTREMOS Y SOMETIDA A CARGA UNIFORMEMENTE REPARTIDA SOBRE TODA LA LUZ ... 106
6.3.3 MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO DE LA PIEZA CON EMPOTRAMIENTOS FLEXIBLES SOMETIDA A CARGAS CUALESQUIERA ... 107
6.3.4 MOMENTOS INDUCIDOS EN UNA VIGA CON EMPOTRAMIENTOS FLEXIBLES POR LA TRASLACIÓN DE UN APOYO ... 108
6.3.4.1 VIGA BIEMPOTRADA CON EMPOTRAMIENTOS FLEXIBLES EN AMBOS EXTREMOS ... 108
6.3.4.2 VIGA BIEMPOTRADA CON EMPOTRAMIENTO FLEXIBLE EN UN SOLO EXTREMO ... 109
6.3.4.3 PIEZA ARTICULADA CON EMPOTRAMIENTO FLEXIBLE ... 109

CAPÍTULO 7. INTERACCIÓN DE ENTRAMADOS ... 111
7.1 FUNCIÓN CONECTADORA DE LOSAS Y FORJADOS ... 111
7.2 CÁLCULO DE LAS FUERZAS DE INTERACCIÓN ... 112
7.3 CÁLCULO DE LOS ENTRAMADOS ... 113
7.4 CASO PARTICULAR DE EDIFICIOS MUY ALARGADOS ... 113
7.5 FUNCIONAMIENTO DEL FORJADO EN UN SOLO PLANO (ACCIÓN DIAFRAGMA) ... 114

CAPÍTULO 8. MÉTODOS SIMPLIFICADOS DE CÁLCULO DE ESTRUCTURAS BAJO ACCIONES VERTICALES Y HORIZONTALES. CÁLCULO DE ENTRAMADOS BAJO ACCIONES DE VIENTO Y SISMO. FLEXIONES NORMALES A LOS ENTRAMADOS ... 115
8.1 TIPOS DE SIMPLIFICACIONES ... 115
8.2 SIMPLIFICACIONES PARA EL CASO DE ENTRAMADOS CON VANOS DE LUCES IGUALES SOMETIDOS A CARGAS VERTICALES ... 116
8.3 SIMPLIFICACIÓN PARA EL CÁLCULO DE ENTRAMADOS EN GENERAL, SOMETIDOS A CARGAS VERTICALES ... 118
8.4 SIMPLIFICACIÓN PARA EL CASO DE CARGAS HORIZONTALES. MÉTODO A ... 118
8.5 SIMPLIFICACIÓN PARA EL CASO DE CARGAS HORIZONTALES. MÉTODO B ... 120
8.6 CÁLCULO DE ENTRAMADOS BAJO ACCIONES DE VIENTO Y SISMO ... 121
8.7 CASO PARTICULAR DE ACCIONES HORIZONTALES EN SENTIDO PERPENDICULAR AL PLANO MEDIO DEL ENTRAMADO ... 122
8.8 FLEXIONES NORMALES AL ENTRAMADO ... 125

CAPÍTULO 9. HIPÓTESIS DE CARGA EN EL CÁLCULO DE ESTRUCTURAS ... 127
9.1 CARGA EN VANO ... 127
9.2 COMBINACIONES DE CARGA EN ENTRAMADOS ... 128
9.3 REDUCCIÓN DE SOBRECARGAS ... 130
9.4 SOBRECARGAS ... 131
9.4.1 SOBRECARGAS DE USO EN EDIFICIOS DE VIVIENDAS, OFICINAS Y ANÁLOGOS ... 131
9.4.1.1 REDUCCIÓN DE SOBRECARGAS ... 131
9.4.2 SOBRECARGAS DE USO EN EDIFICIOS INDUSTRIALES ... 136
9.4.3 SOBRECARGA DE USO EN GARAJES APARCAMIENTOS ... 137
9.4.4 SOBRECARGAS DE USO EN PUENTES DE CARRETERA ... 137
9.4.5 SOBRECARGAS DE USO EN PUENTES DE FERROCARRIL ... 139
9.4.6 SOBRECARGA DE NIEVE ... 142
9.4.7 SOBRECARGA DE VIENTO ... 142
9.5 COMBINACIONES PÉSIMAS PARA EL DIMENSIONAMIENTO ... 143
9.5.1 DINTELES ... 143
9.5.2 PILARES ... 144

CAPÍTULO 10. LUCES, MÓDULOS DE DEFORMACIÓN E INERCIAS A CONSIDERAR EN EL CÁLCULO. TRASLACIONALIDAD E INTRASLACIONALIDAD DE LAS ESTRUCTURAS. REDUCCIÓN DE CARGAS PUNTUALES Y CARGAS UNIFORMES A LO LARGO DE LA LUZ. CASO DE CARGAS RÍGIDAS. INFLUENCIA DE LOS RELLENOS DE FÁBRICA SOBRE EL COMPORTAMIENTO DE LA ESTRUCTURA ... 149

10.1 LUCES DE CÁLCULO ... 149
10.2 MÓDULO DE DEFORMACIÓN ... 150
10.3 MOMENTOS DE INERCIA A CONSIDERAR EN EL CÁLCULO ... 151
10.4 TRASLACIONALIDAD E INTRASLACIONALIDAD DE LOS ENTRAMADOS ... 153
10.5 REDUCCIÓN DE CARGAS PUNTUALES Y CARGAS UNIFORMES A LO LARGO DE LA LUZ ... 154
10.6 CASO DE CARGAS RÍGIDAS ... 156
10.7 INFLUENCIA DE LOS RELLENOS DE FÁBRICA EN EL COMPORTAMIENTO DE LOS ENTRAMADOS ... 156
10.7.1 TRANSMISIÓN DE CARGAS VERTICALES ... 157
10.7.2 TRANSMISIÓN DE CARGAS HORIZONTALES ... 158

CAPÍTULO 11. ENLACES TEÓRICOS Y ENLACES REALES. APARATOS DE APOYO. ROTULAS PLÁSTICAS. BROCHALES. ENLACE DE LOS PILARES A LA CIMENTACIÓN ... 165
11.1 TIPOS DE ANCLAJE ... 165
11.2 CLASES DE APOYOS ... 165
11.3 CÁLCULO DE DISPOSITIVOS DE CENTRADO DE CARGAS ... 173
11.4 CÁLCULO DE APOYOS ELASTOMÉRICOS ... 176
11.5 CÁLCULO DE RÓTULAS PLÁSTICAS ... 181
11.6 BROCHALES ... 184
11.7 EMPOTRAMIENTOS IMPREVISTOS ... 185
11.8 ENLACE DE LOS PILARES A LA CIMENTACIÓN ... 185

CAPÍTULO 12. NOCIONES DE CÁLCULO MATRICIAL DE ESTRUCTURAS ... 191
12.1 INTRODUCCIÓN ... 191
12.2 EJEMPLO Nº 1. CÁLCULO MATRICIAL DE UNA VIGA CONTINUA ... 191
12.3 EJEMPLO Nº 2. CÁLCULO MATRICIAL DE UN ENTRAMADO AISLADO ... 194
12.4 PLANTEAMIENTO GENERAL DEL CÁLCULO MATRICIAL DE ENTRAMADOS ESPACIALES ... 199

CAPÍTULO 13. CÁLCULO MEDIANTE ORDENADOR ... 207
13.1 INTRODUCCIÓN ... 207
13.2 NORMALIZACIÓN ESPAÑOLA SOBRE EL USO DE ORDENADORES EN EL CÁLCULO DE ESTRUCTURAS DE HORMIGÓN ... 208
13.3 ASPECTOS GENERALES DE LOS PROGRAMAS PARA EL CÁLCULO DE ESTRUCTURAS DE HORMIGÓN ... 209
13.4 TIPOS DE PROGRAMAS ... 211
13.5 PROBLEMAS DERIVADOS DEL USO ERRÓNEO DEL ORDENADOR ... 212

CAPÍTULO 14. EXAMEN CRÍTICO DE LOS MÉTODOS DE CÁLCULO LINEAL ... 213
14.1 GENERALIDADES ... 213
14.2 MÓDULO DE DEFORMACIÓN E_c ... 214
14.3 MOMENTO DE INERCIA I ... 216
14.4 LUCES DE CÁLCULO ... 218
14.5 ALGUNAS HIPÓTESIS BÁSICAS ... 218

CAPÍTULO 15. MÉTODOS APROXIMADOS ... 219
15.1 INTERÉS ACTUAL DE LOS MÉTODOS APROXIMADOS ... 219

15.2 MÉTODOS SIMPLIFICADOS PARA EL CÁLCULO DE ESFUERZOS DEBIDOS A ACCIONES VERTICALES ... 220
15.2.1 MÉTODO DE LA NORMA ACI 318-95 ... 220
15.2.1.1 VIGAS CONTINUAS ... 220
15.2.1.2 ENTRAMADOS ... 220
15.2.2 MÉTODO DE LA INSTRUCCIÓN EHE ... 220
15.3 MÉTODOS SIMPLIFICADOS PARA EL CÁLCULO DE SOLICITACIONES DEBIDAS A ACCIONES HORIZONTALES ... 223
15.3.1 MÉTODO DEL PÓRTICO ... 223
15.3.2 MÉTODO DEL VOLADIZO ... 226
15.3.3 CORRECCIÓN DE BULL Y SVED A LOS MÉTODOS DEL PÓRTICO Y DEL VOLADIZO ... 229
15.3.4 MÉTODO DE LA NORMA BAEL 83 ... 231

CAPÍTULO 16. PREDIMENSIONAMIENTO ... 233
16.1 CONSIDERACIONES PREVIAS ... 233
16.2 DETERMINACIÓN DE ESFUERZOS Y DIMENSIONES ... 234
16.2.1 LOSAS Y FORJADOS CON LA MISMA CAPACIDAD RESISTENTE A MOMENTOS POSITIVOS Y NEGATIVOS ... 235
16.2.2 VIGAS CONTINUAS Y DINTELES DE ENTRAMADOS SOMETIDOS A ACCIONES VERTICALES ... 239
16.2.3 PILARES DE ENTRAMADOS SOMETIDOS A ACCIONES VERTICALES ... 240
16.2.4 ENTRAMADOS SOMETIDOS A ACCIONES HORIZONTALES Y VERTICALES ... 242
16.2.5 FORJADOS SIN VIGAS SOMETIDOS A ACCIONES VERTICALES ... 243
16.2.6 FORJADOS SIN VIGAS SOMETIDOS A ACCIONES HORIZONTALES ... 245
16.2.7 PÓRTICOS SIMÉTRICOS DE UN SOLO VANO CON DINTEL HORIZONTAL ... 246
16.2.8 PÓRTICOS SIMÉTRICOS A DOS AGUAS ... 270
16.2.9 PÓRTICOS DE VARIOS VANOS Y UN SOLO PISO ... 286
16.2.10 ARCOS PARABÓLICOS TRIARTICULADOS ... 288
16.2.11 ARCOS PARABÓLICOS BIARTICULADOS ... 296
16.2.12 MUROS DE CONTENCIÓN ... 301
16.2.13 ZAPATAS CORRIDAS DE HORMIGÓN ARMADO CON CARGA LINEAL VERTICAL CENTRADA DE VALOR CONSTANTE ... 303
16.2.14 ZAPATAS AISLADAS DE PLANTA CUADRADA DE HORMIGÓN ARMADO CON CARGA VERTICAL CENTRADA ... 304
16.3 TANTEO DE DIMENSIONAMIENTO ... 305
16.4 NECESIDAD EVENTUAL DE CORRECCIONES ... 305

CAPÍTULO 17. CÁLCULO NO LINEAL ... 307
17.1 GENERALIDADES SOBRE CÁLCULO NO LINEAL. RÓTULAS PLÁSTICAS ... 307
17.2 REDISTRIBUCIÓN DE MOMENTOS CON FORMACIÓN DE RÓTULAS PLÁSTICAS ... 310
17.3 DEFORMACIONES ELÁSTICAS Y PLÁSTICAS. CURVATURAS Y ROTACIONES ... 315
17.4 REDISTRIBUCIÓN DE MOMENTOS CON FORMACIÓN DE ZONAS PLASTIFICADAS ... 318
17.4.1 MODELOS GENERALES ... 318

17.4.2 GRADO DE REDISTRIBUCIÓN ... 322
17.5 MÉTODOS GENERALES DE CÁLCULO NO LINEAL ... 323
17.5.1 PLANTEAMIENTO GENERAL ... 323
17.5.1.1 MÉTODO DE LAS ROTACIONES IMPUESTAS (MACHI) ... 328
17.5.1.2 MÉTODO DE LAS ROTACIONES ÚLTIMAS (BAKER) ... 329
17.5.2 SOLUCIÓN MEDIANTE MÉTODOS DE CÁLCULO NUMÉRICO ... 330
17.6 MÉTODOS BASADOS EN LA REDISTRIBUCIÓN A PARTIR DE LOS RESULTADOS DEL CÁLCULO LINEAL, PARA ELEMENTOS LINEALES DE HORMIGÓN ARMADO ... 331
17.6.1 MÉTODO DEL AMERICAN CONCRETE INSTITUTE (ACI) ... 332
17.6.2 MÉTODO DE LA INSTRUCCIÓN EHE ... 335
17.6.3 MÉTODO DEL MODEL CODE CEB-FIP (MC-90) ... 335
17.6.4 MÉTODO DEL EUROCÓDIGO EC-2 ... 337
17.7 PROGRAMAS DE ORDENADOR PARA CÁLCULO NO LINEAL ... 337
17.8 SITUACIÓN ACTUAL DE LA APLICABILIDAD PRÁCTICA DEL CÁLCULO NO LINEAL ... 338

CAPÍTULO 18. CÁLCULO DE ESFUERZOS EN FORJADOS UNIDIRECCIONALES ... 343
18.1 GENERALIDADES ... 343
18.2 COMBINACIONES DE ACCIONES ... 343
18.3 MÉTODOS BASADOS EN EL CÁLCULO LINEAL ... 344
18.3.1 CASO DE VANOS DE LUCES IGUALES ... 344
18.3.2 MÉTODO DE CROSS PARA FORJADOS DE SECCIÓN CONSTANTE CON EXTREMOS EXTERIORES SIMPLEMENTE APOYADOS ... 344
18.3.3 MÉTODO SIMPLIFICADO DEL AMERICAN CONCRETE INSTITUTE (ACI) PARA FORJADOS CONTINUOS CUYAS LUCES NO DIFIEREN EN MÁS DEL 20% ... 346
18.4 MÉTODOS BASADOS EN LA READAPTACIÓN PLÁSTICA ... 347
18.4.1 MÉTODO DE LA INSTRUCCIÓN BAEL-83 PARA FORJADOS CON SOBRECARGA MODERADA Y LUCES DE VANOS CONSECUTIVOS COMPRENDIDAS ENTRE 0,80 Y 1,25 VECES LA DEL VANO CONSIDERADO ... 347
18.4.1.1 CASO EN QUE NO EXISTEN VOLADIZOS ... 352
18.4.1.2 CASO EN QUE EXISTEN VOLADIZOS ... 354
18.4.2 MÉTODO DE LA INSTRUCCIÓN EF ... 356
18.5 PUNTOS DE CORTE DE LAS BARRAS DE LA ARMADURA ... 359
18.5.1 MÉTODOS BASADOS EN LA CONTINUIDAD TEÓRICA ... 359
18.5.2 MÉTODOS BASADOS EN LA READAPTACIÓN PLÁSTICA ... 360
18.6 CONSIDERACIÓN GENERAL DE LOS MÉTODOS EXPUESTOS BASADOS EN LA READAPTACIÓN PLÁSTICA ... 361
18.7 CASO DE FORJADOS DE UN SOLO VANO O DE FORJADOS DE VARIOS VANOS CALCULADOS COMO ISOSTÁTICOS ... 361

CAPÍTULO 19. CÁLCULO DE ESFUERZOS EN FORJADOS SIN VIGAS ... 365
19.1 GENERALIDADES ... 365
19.2 TERMINOLOGÍA ... 367
19.3 REQUISITOS DIMENSIONALES ... 367
19.4 CÁLCULO DE ESFUERZOS ... 368
19.4.1 MÉTODO SIMPLIFICADO ... 369

19.4.1.1 CÁLCULO A FLEXIÓN DE LA PLACA ... 369
19.4.1.2 CÁLCULO A PUNZONAMIENTO ... 380
19.4.1.3 CÁLCULO A ESFUERZO RASANTE ... 380
19.4.1.4 ESFUERZOS AXILES Y MOMENTOS EN PILARES ... 382
19.4.2 MÉTODO GENERAL DE LOS PÓRTICOS VIRTUALES ... 385
19.4.2.1 ACCIONES VERTICALES ... 386
19.4.2.2 ACCIONES HORIZONTALES ... 386
19.4.2.3 ALTERNANCIA DE SOBRECARGAS ... 390
19.4.2.4 DISTRIBUCIÓN DE MOMENTOS ... 390
19.4.3 RIGIDECES, FACTORES DE TRANSMISIÓN Y MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO QUE DEBEN SER CONSIDERADOS EN AMBOS MÉTODOS ... 390
19.4.4 TRANSMISIÓN DE MOMENTOS DE LAS PLACAS A LOS PILARES ... 391
19.4.4.1 MÉTODO DEL ACI ... 391
19.4.4.2 MÉTODO EHE ... 393
19.4.5 VOLADIZOS ... 394
19.4.6 TORSIONES. TORSIONES EN VIGAS Y ZUNCHOS DE BORDE ... 395
19.4.7 DEFORMACIONES ... 396
19.4.7.1 MÉTODO SIMPLIFICADO DE SCANLON Y MURRAY ... 396
19.4.7.2 MÉTODO DE GARCÍA DUTARI Y CALAVERA ... 397
19.4.7.3 DEFORMACIONES EN EL CASO DE FORJADOS PRETENSADOS CON ARMADURAS POSTESAS ... 398
19.5 ABERTURAS EN LA PLACA ... 398
19.6 CÁLCULO FUERA DE LAS NORMAS ... 399

CAPÍTULO 20. CÁLCULO DE ESFUERZOS EN PLACAS ... 403
20.1 GENERALIDADES ... 403
20.2 MÉTODOS GENERALES DE CÁLCULO ... 404
20.2.1 MÉTODOS ELÁSTICOS ... 405
20.2.2 MÉTODOS EN ESTADO LÍMITE ... 410
20.2.2.1 MÉTODO DE LAS LÍNEAS DE ROTURA (JOHANSEN) ... 410
20.2.2.2 MÉTODO DE LAS BANDAS (HILLERBORG) ... 410
20.3 ESFUERZOS CORTANTES ... 415
20.4 CASO DE CARGAS CONCENTRADAS ... 416

CAPÍTULO 21. PANTALLAS Y NÚCLEOS ... 421
21.1 GENERALIDADES ... 421
21.2 DISPOSICIÓN EN PLANTA ... 422
21.3 FUERZAS EN CADA PLANTA ... 423
21.4 DISTRIBUCIÓN DE LA FUERZA HORIZONTAL DE PLANTA ENTRE LAS DIVERSAS PANTALLAS ... 423
21.4.1 DISTRIBUCIÓN ISOSTÁTICA ... 423
21.4.2 DISTRIBUCIÓN HIPERESTÁTICA. CASO PARTICULAR DE PANTALLAS PARALELAS ... 425
21.4.3 DISTRIBUCIÓN HIPERESTÁTICA. MÉTODO DE LIN PARA EL CÁLCULO DE LA DISTRIBUCIÓN DE LA FUERZA HORIZONTAL ACTUANTE EN UNA PLANTA ENTRE LAS DIFERENTES PANTALLAS EN CUALQUIER POSICIÓN ... 427
21.5 DETERMINACIÓN DE LA DIRECCIÓN PÉSIMA DE LA FUERZA HORIZONTAL PARA UNA PANTALLA DETERMINADA ... 438

21.6 CÁLCULO DE ESFUERZOS EN PANTALLAS CON HUECOS 440
21.7 MÉTODO DE ROSMAN-BECK PARA TENER EN CUENTA LA DEFORMACIÓN DE LAS MÉNSULAS DEBIDA AL ESFUERZO AXIL 445
21.8 ÁBACOS DE ALBIGES Y GOULET PARA EL CÁLCULO DE PANTALLAS CON HUECOS 448
21.8.1 CASO GENERAL *(1 < α < 10)* 448
21.8.2 CASO PARTICULAR CORRESPONDIENTE A $\alpha \leq 1$ 450
21.8.3 CASO PARTICULAR CORRESPONDIENTE A $\alpha \leq 10$ 450
21.9 PANTALLAS CON VARIAS FILAS DE HUECOS 450
21.10 CARGAS VERTICALES EN PANTALLAS CON HUECOS. MÉTODO DE DAVIDOVICI 450
21.11 CASO PARTICULAR DE PANTALLAS APOYADAS SOBRE PILARES EN PLANTA BAJA 452
21.12 OTROS MÉTODOS DE CÁLCULO 453
21.13 NÚCLEOS 454

CAPÍTULO 22. INTERACCIÓN DE ENTRAMADOS CON PANTALLAS Y NÚCLEOS 457
22.1 GENERALIDADES 457
22.2 CONSIDERACIONES SOBRE LOS MÉTODOS DE CÁLCULO 458
22.3 MÉTODO DE KHAN Y SBAROUNIS 459
22.3.1 ORDENACIÓN DE LOS GRÁFICOS 459
22.3.2 DESARROLLO DEL MÉTODO 461
22.3.3 VALIDEZ DEL MÉTODO 462
22.4 CASO PARTICULAR DE ESTRUCTURAS FORMADAS POR PANTALLAS Y FORJADOS SIN VIGAS 463

CAPÍTULO 23. ESTRUCTURAS REALIZADAS CON ENCOFRADO TÚNEL Y SISTEMAS ANÁLOGOS 465
23.1 GENERALIDADES 465
23.2 CÁLCULO DE ESFUERZOS 466
23.3 ESTRUCTURAS CON VIGAS-TABIQUE 467
23.3.1 CONCEPTOS GENERALES 467
23.3.2 CÁLCULO DE ESFUERZOS 469

CAPÍTULO 24. JUNTAS DE DILATACIÓN. JUNTAS DE ASIENTO. JUNTAS DE HORMIGONADO. JUNTAS DE CONTRACCIÓN 473
24.1 JUNTAS DE DILATACIÓN 473
24.1.1 CONCEPTOS GENERALES 473
24.1.2 CÁLCULO DE LA JUNTA. MÉTODO EMPÍRICO 475
24.1.3 CÁLCULO DE LA JUNTA. MÉTODO ANALÍTICO 477
24.1.4 TIPOS DE JUNTAS 477
24.1.5 CONSIDERACIONES ADICIONALES 479
24.2 JUNTAS DE ASIENTO 481
24.2.1 CONCEPTOS GENERALES 481
24.2.2 POSICIÓN DE LAS JUNTAS 481
24.3 JUNTAS DE HORMIGONADO 481
24.3.1 CONCEPTOS GENERALES 481
24.3.2 ASPECTOS ESENCIALES DE LA CONTRACCIÓN TÉRMICA 482

24.3.3 JUNTAS HORIZONTALES EN PIEZAS DE DIRECTRIZ VERTICAL O CUASIVERTICAL 483
24.3.4 JUNTAS EN PIEZAS DE DIRECTRIZ HORIZONTAL O CUASIHORIZONTAL SOMETIDAS A FLEXIÓN 484
24.3.5 CUESTIONES BÁSICAS PLANTEADAS POR LAS JUNTAS DE TRABAJO Y DE CONTRACCIÓN EN PIEZAS DE DIRECTRIZ HORIZONTAL O CUASIHORIZONTAL SOMETIDAS A FLEXIÓN 485
24.3.6 JUNTAS DE CONTRACCIÓN EN PIEZAS DE DIRECTRIZ HORIZONTAL O CUASIHORIZONTAL SOMETIDAS A FLEXIÓN 486
24.3.6.1 POSICIÓN E INCLINACIÓN 486
24.3.6.2 RUGOSIDAD 488
24.3.6.3 TRATAMIENTO PREVIO A LA CONTINUACIÓN DEL HORMIGONADO 490
24.3.6.4 DURACIÓN MÁXIMA DE LA APERTURA DE LA JUNTA 491
24.3.6.5 COMPACTACIÓN EN LA ZONA PRÓXIMA A LA JUNTA 491
24.3.6.6 DISTANCIA ENTRE JUNTAS DE CONTRACCIÓN 491
24.3.6.7 TIEMPO MÍNIMO DE APERTURA DE LA JUNTA 492
24.3.6.8 POSICIÓN A LO LARGO DE LA DIRECTRIZ 492
24.3.6.9 CASOS DE FATIGA O ESFUERZOS DE TRACCIÓN NORMALES A LA JUNTA 493
24.3.7 JUNTAS DE TRABAJO 493
24.3.8 EJECUCIÓN DE LAS JUNTAS HORIZONTALES DE TRABAJO EN PIEZAS DE DIRECTRIZ VERTICAL O CUASIVERTICAL 493
24.3.9 CONSIDERACIONES ESPECIALES PARA JUNTAS DE TRABAJO Y CONTRACCIÓN EN EL CASO DE HORMIGONES VISTOS 494

CAPÍTULO 25. CONCEPTO Y SISTEMAS DEL HORMIGÓN PRETENSADO 497
25.1 DEFINICIÓN DEL HORMIGÓN PRETENSADO 497
25.2 CONCEPTO GENERAL DEL PRETENSADO 497
25.3 CONCEPTOS ESTRUCTURALES DEL HORMIGÓN PRETENSADO 500
25.3.1 COMPENSACIÓN DE TENSIONES 500
25.3.2 COMPENSACIÓN DE DEFORMACIONES 502
25.4 TIPOS DE PRETENSADO 507
25.4.1 HORMIGÓN PRETENSADO CON ARMADURAS PRETESAS 507
25.4.2 HORMIGÓN PRETENSADO CON ARMADURAS POSTESAS 511
25.4.2.1 ASPECTOS GENERALES 511
25.4.2.2 VARIANTES DEL SISTEMA 512
25.4.2.3 FORMAS TÍPICAS 513
25.5 COMBINACIÓN DE DIFERENTES TIPOS DE PRETENSADO 515
25.6 FÓRMULAS BÁSICAS DE UNA SECCIÓN PRETENSADA 516
25.7 FORMAS DE CONSIDERACIÓN DEL PRETENSADO 518

CAPÍTULO 26. MATERIALES Y EQUIPOS PARA HORMIGÓN PRETENSADO CON ARMADURAS POSTESAS 521
26.1 GENERALIDADES 521
26.2 MATERIALES Y EQUIPOS 522
26.2.1 VAINAS 522
26.2.2 TENDONES 523
26.2.3 GATOS 524

26.2.4 ANCLAJES ... 526
26.2.4.1 ANCLAJES ACTIVOS ... 526
26.2.4.2 ANCLAJES CIEGOS O PASIVOS ... 531
26.2.5 ACOPLADORES O EMPALMES ... 532
26.3 CONTROL DE TESADO ... 532
26.4 CONTROL DE LA INYECCIÓN ... 533

CAPÍTULO 27. MATERIALES Y EQUIPOS PARA HORMIGÓN PRETENSADO CON ARMADURAS PRETESAS ... 539
27.1 GENERALIDADES ... 539
27.2 PREFABRICACIÓN GENERAL DE PIEZAS PRETENSADAS EN MESAS ... 539
27.3 EMPLEO DE MÁQUINAS DE ENCOFRADO DESLIZANTE ... 549
27.4 PIEZAS FABRICADAS POR EXTRUSIÓN ... 550

CAPÍTULO 28. PROPIEDADES GENERALES DEL HORMIGÓN. DEFORMACIONES FLUENCIA. RETRACCIÓN. TEMPERATURA ... 551
28.1 GENERALIDADES ... 551
28.2 RESISTENCIAS Y MÓDULO DE DEFORMACIÓN DEL HORMIGÓN ... 551
28.2.1 RESISTENCIA A COMPRESIÓN ... 551
28.2.2 RESISTENCIA A TRACCIÓN ... 552
28.2.3 MÓDULO DE DEFORMACIÓN ... 554
28.2.4 DESARROLLO DE LA RESISTENCIA A COMPRESIÓN CON EL TIEMPO ... 555
28.2.5 DESARROLLO DEL MÓDULO DE DEFORMACIÓN CON EL TIEMPO ... 556
28.3 DEFORMACIONES DEL HORMIGÓN ... 557
28.4 FLUENCIA, RETRACCIÓN Y TEMPERATURA ... 557
28.4.1 FLUENCIA ... 558
28.4.2 RETRACCIÓN ... 561

CAPÍTULO 29. PÉRDIDAS DE LA FUERZA DE PRETENSADO. FUERZA FINAL DE PRETENSADO ... 565
29.1 INTRODUCCIÓN ... 565
29.2 TENSIÓN INICIAL DE PRETENSADO ... 565
29.3 PÉRDIDAS DE LA FUERZA DE PRETENSADO CUANDO SE EMPLEAN ARMADURAS POSTESAS ... 566
29.3.1 PÉRDIDAS INSTANTÁNEAS DE FUERZA ... 567
29.3.2 RECORRIDO DE TESADO EN ARMADURAS POSTESAS ... 582
29.3.3 PÉRDIDAS DIFERIDAS DE FUERZA ... 583
29.4 PÉRDIDAS DE LA FUERZA DE PRETENSADO CUANDO SE EMPLEAN ARMADURAS PRETESAS ... 597
29.4.1 MÉTODO GENERAL. PÉRDIDAS DE LA FUERZA DE PRETENSADO CUANDO SE APLICA CALEFACCIÓN ... 599
29.4.1.1 PÉRDIDAS DE FUERZA DE PRETENSADO HASTA LA TRANSFERENCIA ... 599
29.4.1.2 CONSIDERACIONES SOBRE LAS PÉRDIDAS POR RELAJACIÓN HASTA LA TRANSFERENCIA CUANDO SE USA SISTEMA DE CALEFACCIÓN ... 613
29.4.1.3 PÉRDIDAS DE FUERZA DE PRETENSADO POSTERIORES A LA TRANSFERENCIA ... 614
29.4.2 PÉRDIDAS CUANDO NO SE APLICA CALEFACCIÓN ... 615

29.4.2.1 PÉRDIDA ΔP_{10} DE FUERZA DE PRETENSADO DEBIDA AL ACORTAMIENTO ELÁSTICO ... 615
29.4.2.2 PÉRDIDAS DIFERIDAS ... 616
29.4.3 MÉTODO SIMPLIFICADO PARA EL CÁLCULO DE LAS PÉRDIDAS DE FUERZA DE PRETENSADO ... 616
29.4.4 MÉTODO PARA TANTEOS ... 619
29.5 FUERZA FINAL DE PRETENSADO ... 620

CAPÍTULO 30. CONSIDERACIÓN DE LA DURABILIDAD EN EL PROYECTO ... 637
30.1 INTRODUCCIÓN ... 637
30.2 GENERALIDADES ... 638
30.3 LA ETAPA DE CONCEPCIÓN DE LA ESTRUCTURA ... 644
30.4 ASPECTOS GENERALES RELACIONADOS CON EL PROYECTO ... 647
30.4.1 EMPLEO DE UN HORMIGÓN ADECUADO ... 647
30.4.2 RECUBRIMIENTOS Y SEPARACIÓN DE ARMADURAS ... 648
30.4.2.1 RECUBRIMIENTOS ... 648
30.4.2.2 SEPARACIÓN DE ARMADURAS ... 650
30.4.3 SEPARADORES ... 652
30.4.4 CONTROL DEL ANCHO DE FISURA ... 653
30.5 ASPECTOS ESPECÍFICOS RELACIONADOS CON EL HORMIGÓN ... 653
30.5.1 CALIDAD DEL HORMIGÓN ... 653
30.5.2 PUESTA EN OBRA DEL HORMIGÓN ... 656
30.6 CORROSIÓN DE ARMADURAS ... 657
30.7 SISTEMAS DE PROTECCIÓN CONTRA LA CORROSIÓN Y OTROS ATAQUES ... 658
30.7.1 PROTECCIÓN SUPERFICIAL DEL ELEMENTO DEL HORMIGÓN ... 658
30.7.2 PROTECCIÓN SUPERFICIAL DE LAS ARMADURAS ... 659
30.7.3 PROTECCIÓN DE LOS ANCLAJES ... 660
30.8 ALGUNAS CONSIDERACIONES FINALES SOBRE LA DURABILIDAD ... 660

CAPÍTULO 31. COMPROBACIONES TENSIONALES DE LA PIEZA PRETENSADA EN ESTADO DE SERVICIO. PREDIMENSIONAMIENTO DE PIEZAS PRETENSADAS ... 665
31.1 INTRODUCCIÓN ... 665
31.2 PIEZAS PRETENSADAS CON ARMADURAS POSTESAS ... 665
31.2.1 TENSIONES MÁXIMAS ADMISIBLES EN EL INSTANTE DEL TESADO ... 666
31.2.2 TENSIONES MÁXIMAS ADMISIBLES EN ESTADO DE SERVICIO ... 669
31.2.3 SIGNIFICADO GEOMÉTRICO DEL CONJUNTO DE CONDICIONES TENSIONALES ... 673
31.2.4 PREDIMENSIONAMIENTO DE LA SECCIÓN ... 675
31.2.5 TRAZADO DE TENDONES ... 678
31.2.6 FÓRMULAS PARA LA DEFINICIÓN DE LOS TENDONES ... 680
31.3 PIEZAS PRETENSADAS CON ARMADURAS PRETESAS ... 682
31.3.1 TENSIONES MÁXIMAS ADMISIBLES EN EL INSTANTE DE LA TRANSFERENCIA ... 683
31.3.2 TENSIONES MÁXIMAS ADMISIBLES EN EL ESTADO DE SERVICIO ... 685
31.3.3 SIGNIFICADO GEOMÉTRICO ... 687
31.3.4 CASO DE VIGAS PRETENSADAS DE CANTO VARIABLE ... 688

BIBLIOTECA SUPERIOR DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

CAPÍTULO 32. MÉTODO DE LOS ESTADOS LÍMITE Y OTROS MÉTODOS DE CÁLCULO. CARACTERÍSTICAS DEL HORMIGÓN. CARACTERÍSTICAS DE LAS ARMADURAS. INTRODUCCIÓN DE LA SEGURIDAD EN EL CÁLCULO 705

32.1 CONCEPTOS GENERALES SOBRE LOS MÉTODOS DE CÁLCULO DE ESTRUCTURAS DE HORMIGÓN 705

32.2 INTRODUCCIÓN DE LA SEGURIDAD 705

32.2.1 EL CONCEPTO DE SEGURIDAD 707

32.2.2 DETERMINISMO Y PROBABILISMO 707

32.2.3 MÉTODOS ELÁSTICOS Y MÉTODOS PLÁSTICOS 708

32.3 MÉTODO DE LOS ESTADOS LÍMITE (INSTRUCCIÓN EHE) 708

32.3.1 BASES GENERALES 709

32.3.2 DEFINICIÓN DE LOS ESTADOS LÍMITE 709

32.3.3 ESTADOS LÍMITE ÚLTIMOS 710

32.3.4 ESTADOS LÍMITE DE UTILIZACIÓN 711

32.3.5 NIVELES DE CÁLCULO EN ESTADOS LÍMITE 711

32.4 ACCIONES 712

32.4.1 CLASIFICACIÓN DE LAS ACCIONES 712

32.4.2 VALORES CARACTERÍSTICOS DE LAS ACCIONES 712

32.4.3 VIBRACIONES 714

32.5 MATERIALES 717

32.5.1 HORMIGÓN 717

32.5.2 ARMADURAS PASIVAS 718

32.5.2.1 PRODUCTOS 724

32.5.2.2 VALORES CARACTERÍSTICOS 724

32.5.2.3 CLASIFICACIÓN DE LOS ACEROS SEGÚN SU DUCTILIDAD 729

32.5.3 ARMADURAS ACTIVAS 730

32.5.3.1 GENERALIDADES 732

32.5.3.2 ALAMBRE 732

32.5.3.3 TORZAL 732

32.5.3.4 CORDÓN 736

32.5.3.5 BARRAS 736

32.5.3.6 TRATAMIENTOS 739

32.5.3.7 DIAGRAMA TENSIÓN-DEFORMACIÓN 739

32.5.3.8 LONGITUDES DE DEFINICIÓN DEL PRETENSADO 739

32.5.3.9 RELAJACIÓN 740

32.5.3.10 COEFICIENTES DE EFICACIA 747

32.5.4 NUEVOS MATERIALES 750

32.5.4.1 NUEVOS HORMIGONES 750

32.5.4.2 ARMADURAS 751

32.6 APLICACIÓN DEL MÉTODO DE LOS ESTADOS LÍMITE 751

32.7 COMBINACIÓN DE ACCIONES 752

32.8 ESTADO DE DEFORMACIONES EN UNA SECCIÓN ARMADA SOMETIDA A ESFUERZOS NORMALES 757

32.9 ESTADO DE DEFORMACIONES EN UNA SECCIÓN SOMETIDA A LA ACCIÓN DEL PRETENSADO 763

32.10 ESTADO DE DEFORMACIONES EN UNA SECCIÓN PRETENSADA SOMETIDA A ESFUERZOS NORMALES 765

32.11 OTRAS NORMAS DE CÁLCULO 766

32.12 UTILIZACIÓN DE NORMAS DIFERENTES A LA EHE 766

32.13 CONCEPTO DE SEGURIDAD GLOBAL DETERMINISTA 768

32.14 CONCEPTO DE SEGURIDAD A SOBRECARGAS 769

CAPÍTULO 33. REGIONES DE DISCONTINUIDAD. BIELAS Y TIRANTES 771

33.1 ZONAS DE CONTINUIDAD Y DISCONTINUIDAD EN LAS ESTRUCTURAS DE HORMIGÓN 775

33.2 MÉTODOS DE CÁLCULO DE LAS ZONAS DE DISCONTINUIDAD 775

33.3 PLANTEAMIENTO DEL MÉTODO DE LAS BIELAS Y TIRANTES 777

33.4 COMPROBACIÓN DE LOS CAMPOS DE TENSIONES EN EL HORMIGÓN DE LAS BIELAS 778

33.4.1 TENSIONES DE COMPRESIÓN DEL HORMIGÓN EN BIELAS NO CONFINADAS 780

33.4.2 TENSIONES DE COMPRESIÓN EN EL HORMIGÓN EN BIELAS CON ARMADURAS COMPRIMIDAS Y/O ARMADURAS DE CONFINAMIENTO 780

33.5 COMPROBACIÓN DE LOS CAMPOS DE TENSIONES EN LOS TIRANTES 783

33.6 DIMENSIONAMIENTO DE LOS NUDOS 783

33.7 DIMENSIONAMIENTO DE LAS BIELAS 784

33.8 COMPROBACIÓN DEL ANCLAJE DE LOS TIRANTES EN LOS NUDOS 786

33.9 ESQUEMAS BÁSICOS 788

GRÁFICOS Y TABLAS GT-1 A GT-80 790

ÍNDICE DE AUTORES[1]

AGUADO DE CEA, A., 339, 340
ALBIGES, M., 448, 450, 455
ALEXANDERSON, J., 547, 550
ALVAREZ CABAL, R., 139, 147, 381, 772
ALLEN, F., 123, 387, 400
APARICIO, A..C., 309
ARENAS DE PABLO, J.J., 111, 114, 309, 339
ARGÜELLES ALVAREZ, R., 191, 206
ARGÜELLES BUSTILLO, R., 191, 206
ARMER, G.S.T., 410, 411, 419
ARROYO, R., 772
ASDUKIEWICZ, A., 116, 370, 400
BAKER, A.L.L., 323, 326, 329, 339, 340
BARQUINS, J.A., 464
BEALL, C., 156, 162
BECK, H., 440, 445
BENITO, J.R., 772
BERANEK, W.J., 772
BERTERO, V., 159, 162
BLANCO, F., 305, 306
BRANCH, 749
BROOK, K.M., 488, 494
BROOKEN, 159, 162
BUSELL, M.N., 482, 494
BULL, F.B., 223, 229, 232
BURÓN, M., 655, 662
BUSELL, M.N., 482, 494
BUXADÉ, C., 459, 464
CAFFARENA, J., 482, 487, 489, 491, 494
CALAVERA, J., 13, 14, 23, 91, 111, 114, 125, 140, 144, 147, 155, 162, 212, 301, 303, 305, 322, 337, 339, 340, 362, 397, 401, 482, 488, 493, 505, 564, 638, 655, 662, 729, 773, 769
CAROL, V.I., 339, 340
CARRASCO ORTIZ, S., 340
CARRUTHERS, N.B., 772
CASTANHETA, M., 709, 772
CATHER, R., 482, 494
CLARKE, J.L., 773
COLLINS, M.P., 778, 800
CONWAY, D.J., 16, 23
CORRES, H., 330, 337, 339, 340
CRANE, A.P., 662
CRAWFORD, R.L., 410, 419
CULVERT, 716
CUVILLO, R.L., 111, 114
CHAUSSIN, R., 595, 636
CHECCHI, A., 158, 160, 162
CHITTY, L., 440, 445
DARWALL, P., 123, 387, 400
DAVIDOVICI, V.E., 450, 451, 455
DELIBES, A., 488, 494
DIAZ LOZANO, J., 140, 147
DIVER, M., 448, 455
DOBLARE, M., 410, 419
DOLAN, CH.W., 773
DURIEWICZ, A., 116, 125
ELISES, N.M., 613
ERDELYI, 613
FAVRE, R., 553, 564, 636
FERNÁNDEZ CASADO, C., 14, 23, 67, 91, 118, 125
FERNÁNDEZ CASADO, J.L., 67, 91
FERNÁNDEZ GOMEZ, J., 140, 147, 339, 340
FERNÁNDEZ PRADA, M.A., 339, 341
FERRY BORGES, J., 709, 772

1 Los números indican las páginas donde están citados los autores correspondientes

FINTEL, M., 468, 469, 471
FOGARASI, G., 548, 550
FOURE, B., 493, 495
FREYSSINET, E., 173, 181, 319
FUENTES, A., 162, 339, 341, 636
FURLONG, R.W., 128, 147
GARCÍA DUTARI, L., 397, 401
GARCÍA MESEGUER, A., 414, 419
GERE, J.M., 344, 363
GERMUNDSSON, T., 217, 218
GERWICK, B.C., 536, 537, 566, 636
GÓMEZ HERMOSO, J., 305, 306, 723, 773
GONZÁLEZ ESTEBAN, J.L., 178, 190
GONZÁLEZ VALLE, E., 381, 488, 494
GONZÁLEZ VIDOSA, F., 339, 340
GOULET, J., 448, 451, 455
GUMBA, 181, 190
GUTIÉRREZ JIMÉNEZ, J.P., 427, 455
HALL, A.S., 376, 400
HART, G.C., 715, 772
HENDRY, A.W., 162
HERRERO BENITEZ, J.E., 181, 190
HILLERBORG, A., 404, 410, 411, 415, 418
HOFFMAN, E.S., 401
HOLMBERG, A., 745, 773
HOUGHTON, G.L., 772
IGLESIA, J., 114
IZQUIERDO, J.M., 488, 494
JAEGERMAN, CH., 546, 550
JENNEWEIN, M., 778, 801
JIMÉNEZ MONTOYA, P., 415, 419
JOHANSEN, K.W., 404, 410, 411, 418
KALMANOK, S.A., 408, 418
KARPATI, K.K., 474, 480, 494
KHAN, F.R., 427, 457, 459, 464
KOPRNA, M., 564, 636
KOSIOREK, 613
KOTSOVOS, M.D., 340
KUPPER, H., 778, 800
LACROIX, R., 595, 636
LAHUERTA, J., 356, 363
LENCZNER, D., 474, 494
LEÓN, J., 330, 337, 339, 340
LEONHARDT, F., 181, 190, 778, 800
LEONTOVICH, V., 246, 305
LEY URZÁIZ, J., 140, 147
LIN, T.Y., 427, 455
LINDGREM, S., 745, 773
LIVESLEY, R.K., 191, 206
LONG, J.E., 178, 190
LOSER, B., 344, 363
LLEYDA DIONIS, J.L., 181, 190
MAC LEOD, L.A., 459, 464
MACCHI, G., 323, 328, 339
MACDONALD, A.J., 772
MAGNEL, 507
MANDELBROT, B.B., 491, 495
MARGARIT, J., 459, 464
MARI, A., 339, 340
MARTI, P., 778, 800
MASSONNET, CH., 328, 340
MATTHEIS, L., 474, 494
MATTOCK, A.H., 340
MEDWADOWSKY, S., 427, 455
MEEK, J.L., 191, 206
MESNAGER, 173
MITCHELL, D., 778, 800
MÖNKS, W.I., 488, 492, 494
MONNING, E., 181, 190
MORAGUES, J.J., 305, 306, 723, 772
MORÁN, F., 340, 415, 419
MÖRSCH, E., 778, 800
MOSLEY, H., 707, 772
MOY, S.S.J., 340
MUELLER, P., 778, 800
MULCAHY, J.F., 376, 400
MURCIA, J., 339, 341
MURRAY, D.W., 396, 398, 401
NICHOLS, J.R., 365, 400
NILSON, A.H., 217, 218, 396
O'ROURQUE, C.E., 217, 218
OLATER, W., 365
OÑATE, E., 212
ORTEGA VALENCIA, H., 337, 340, 732, 773
PÁEZ, A., 709, 772
PAGE, A.W., 162
PARDUCCI, A., 158, 160, 162
PARME, A.L., 123, 387
PAULOVIC, M.N., 340
PERCHAT, J., 595, 636
PRALONG, J., 800
PUGSLEY, A., 707, 772
PUNDAK, B., 546, 550
RADOJICI, A., 553, 564, 636
RAKOSNIK, J., 323, 339
RAVINA, 546, 550
RECUERO, A., 427, 455
REIMANN, H., 170, 190

RICE, P.F., 401
RIDDINGTON, J.R., 158, 162
RIPOLL, J.B., 111, 114
RITTER, W., 778, 800
RITZ, P., 800
ROSSMAN, R., 440, 445
ROTTER, J.M., 376, 400
RÜSCH, H., 778, 800
SADGROVE, B.M., 488, 492, 494
SÁEZ BENITO, J.M., 191, 206, 454, 455
SAMARASINGHE, W., 162
SÁNCHEZ GÁLVEZ, V., 613
SANTOS MESA, J., 140, 147
SANTOS OLALLA, F., 140, 147
SAVE, N., 340
SBAROUNIS, J.A., 457, 459, 464
SCANLON, A., 396, 398, 401
SCHÄFER, K., 778, 801
SCHLAICH, J., 778, 800
SEREDA, P.J., 474, 480, 494
SLATER, W.A., 365, 400
SMITH, A., 223, 232
SMITH, B.S., 218
SOSA, P.M., 339, 341
STAFFORD, S.B., 158, 162
STAROSOLSKI, W., 116, 125, 370, 400
STIGLAT, K., 409, 418
SUN GUL HONG, 801
SVED, G., 223, 229, 232
TASSIOS, T., 159, 637, 662
THONIER, H., 339, 341
THÜRLIMANN, B., 778, 800
TICHY, M., 323, 339
TIMOSHENKO, S.P., 405, 418
TORROJA, E., 128, 147, 709, 772
TREDOPP, R., 140, 145, 147
URQUHART, L.C., 217, 218
VÁZQUEZ, M., 191, 206
VERDE, A., 305, 306
VIJAYARANGAN, B., 376, 400
VILLAMONTE VARELA, L., 181, 190
VILLEGAS, L., 658, 663
VINTZELEOU, E., 159
VLASOV, B.Z., 454, 455
WATERS, T., 396, 491, 494
WEISCHEDE, D., 800
WESTERGAARD, H.M., 365, 400
WILSON, A., 226, 232
WINTER, G., 217, 218
WIPPEL, I.H., 409, 418
WOINOWSKY-KRIEGER, S., 405, 418
WOOD, R.H., 410, 411, 418, 419
YOUNG, D.H., 135
ZIMMERLI, B., 800

FE DE ERRATAS

PROYECTO Y CÁLCULO DE ESTRUCTURAS DE HORMIGÓN

J. Calavera
Dr. Ingeniero de Caminos

TOMO I

Capítulo	Página	Línea	DICE	DEBE DECIR
	10	3	EHE-98	EHE
2	27	31	Momento flector M_t	Momento flector M_f
12	200	-6	Los esfuerzos para el extremo 1 de la barra	Las expresiones que relacionan las acciones exteriores aplicadas y las deformaciones en el extremo 1 de la barra
19	371	-6	compresión de la flexibilidad	comprensión de la flexibilidad
19	382	-8	$M_d = \frac{0{,}08\,[(\gamma_{fg}\,g + \gamma_{fq}\cdot 0{,}5\,q)\,\ell_2\,\ell^2_{ln} - \gamma_{fg}\,g'\ell'_2\,(\ell'_{ln})^2]}{1\,\frac{1}{\alpha_{eq}}}$	$M_d = \frac{0{,}08\,[(\gamma_{fg}\,g + \gamma_{fq}\cdot 0{,}5\,q)\,\ell_2\,\ell^2_{ln} - \gamma_{fg}\,g'\ell'_2\,(\ell'_{ln})^2]}{1 + \frac{1}{\alpha_{eq}}}$
25	514		Puente de los Santos de Ribadeo, (Lugo) Figuras, 25-27	Puente de los Santos de Ribadeo, (Lugo). Proyeto: M.JULIÁ; Ingeniero de Caminos. Director de Obra: IGNACIO GARCÍA ARANGO; Ingeniero de Caminos. Empresa Constructora: CUBIERTAS Y TEJADOS, S.A. Figura 25-27
25	514		Puente de Barrios de Luna, 440 m. de luz Figura 25-28	Puente de Barrios de Luna, 440 m. de luz. Proyecto: C. FERNÁNDEZ CASADO, J. MANTEROLA y L. FERNÁNDEZ TROYANO; Ingenieros de Caminos Empresa Constructora: HUARTE Y CIA. FIGURA 25-28
25	514		Puente del Centenario, (Sevilla) Figura 25-29	Puente del Centenario, (Sevilla) Proyecto: JOSÉ A. FERNÁNDEZ ORDÓÑEZ, JULIO MARTÍNEZ CALZÓN, GUILLERMO ONTAÑÓN, FRANCISCO MILLANES Y MANUEL BURÓN; Ingeniero de Caminos Prefabricación: PACADAR Empresas Constructoras: CUBIERTAS Y DRAGADOS Figura 25-29
28	556	15	t_T= Temperatura corregida	t_T= Edad corregida
30	655	17	profundidad	penetración
32	739	14	relación	relajación
32	753	6	la figura 32-11	las figuras 32-8 y 32-9

Capítulo	Página	Línea	DICE	DEBE DECIR
44	344	12	$\sigma_{TD} = \frac{f_{1d\,0,5} + \sigma_c}{y} \le 3\,f_{cd}$	$\sigma_{Td} = \frac{f_{id\,0,05} + \sigma_c}{y} \le 3\,f_{cd}$
44	344	-2	Resistencia garantizada para la unión soldada	Resistencia garantizada para la unión soldada. (con γ_S = 1.15)
44	344	-2	Resistencia garantizada para la unión soldada	Resistencia garantizada para la unión soldada. (con γ_S = 1.15)
44	346	4	ϕ_L	ϕ_T
44	347	4	ϕ_L	ϕ_T
44	359	19	valor de	El valor de
60	652	Fig60-17	cota: a_1	cota: a
60	652	Fig60-17	cota: a	cota: a_1
63	697	5	$A_{st}\,f_{yd} = \frac{N_d}{4}\cdot\frac{h + a_1}{h}$	$A_{st}\,f_{yd} = \frac{N_d}{4}\cdot\frac{h - a_1}{h}$
63	699	17	$F_{sx}\cdot 0{,}81h = x\cdot\sigma_d\left(a - \frac{x}{c}\right)$	$F_{sx}\cdot 0{,}81h = x\cdot\sigma_d\left(a - \frac{x}{2}\right)$
63	718	14	0,25	d ≥ 0,25 m
63	745	-3	$T_d = \frac{N_d(v+0{,}25\,a)}{0{,}85\,d}$	$T_d = \frac{\frac{N_d}{2}(v+0{,}25\,a)}{0{,}85\,d}$
63	749	-8	1,2	Estos números indican pie de página
64	762	21	u	μ
70	858	21	una capa de 20/50	una capa de arena de 20/50